ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 500, с. 35–39

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.2

ТЕОРЕМЫ СРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ С МЛАДШИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ, УЧИТЫВАЮЩИЕ ГЕОМЕТРИЮ ОБЛАСТИ

© 2021 г. А. А. Коньков[1,*]

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 06.07.2021 г.
Поступило 08.07.2021 г.
После доработки 08.07.2021 г.
Принято к публикации 08.08.2021 г.

Получены теоремы сравнения, позволяющие оценить сферический максимум решений квазилинейных эллиптических неравенств, содержащих младшие производные, через решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения, правая часть которого зависит от геометрии области.

Ключевые слова: нелинейные эллиптические операторы, неограниченные области, емкость

DOI: 10.31857/S2686954321050209

Пусть $\Omega \neq \varnothing$ — открытое подмножество $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Положим $\Omega_{r_1,r_2} = \{x \in \Omega : r_1 < |x| < r_2\}$ и $B_{r_1,r_2} = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x| < r_2\}$, $0 < r_1 < r_2$. Через B_r^x и S_r^x обозначим открытый шар и сферу радиуса $r > 0$ с центром в точке x. В случае $x = 0$ пишем B_r и S_r вместо B_r^0 и S_r^0.

Будем рассматривать неравенства

$$\operatorname{div} A(x, Du) + b(x)|Du|^{p-1} \geq 0 \quad \text{в} \quad \Omega_{R_0,R_1}, \tag{1}$$

где $0 \leq R_0 < R_1 \leq \infty$, $D = (\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n})$ — оператор градиента и $p > 1$ — вещественное число. Считаем, что главная часть дифференциального оператора удовлетворяет условию равномерной эллиптичности

$$C_1|\xi|^p \leq \xi A(x,\xi),$$
$$|A(x,\xi)| \leq C_2|\xi|^{p-1}, \quad C_1, C_2 > 0,$$

для почти всех $x \in \Omega_{R_0,R_1}$ и всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, а коэффициент при младших производных b — неотрицательная функция, принадлежащая пространству $L_\nu(\Omega_{R_0,r})$ для всех $r \in (R_0, R_1)$, где $n < \nu \leq \infty$ при $p \leq n$ и $\nu = p$ при $p > n$.

Теоремы сравнения для неравенств (1), не содержащих младшие производные, получены в работе [2].

Решением (1) будем называть функцию u такую, что $u \in W_p^1(\Omega_{R_0,r}) \cap L_\infty(\Omega_{R_0,r})$ и $A(x, Du) \in L_{p/(p-1)}(\Omega_{R_0,r})$ для любого $r \in (R_0, R_1)$ и при этом

$$-\int_{\Omega_{R_0,R_1}} A(x, Du) D\varphi dx + \int_{\Omega_{R_0,R_1}} b(x)|Du|^{p-1}\varphi dx \geq 0$$

для всех неотрицательных $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_{R_0,R_1})$.

Говорим также, что

$$u|_{B_{R_1} \setminus \overline{B_{R_0}} \cap \partial\Omega_{R_0,R_1}} = 0, \tag{2}$$

если $\psi u \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega_{R_0,R_1})$ для всех $\psi \in C_0^\infty(B_{R_0,R_1})$.

Пусть u — решение (1), (2). Обозначим

$$M(r; u) = \operatorname*{ess\,sup}_{S_r \cap \Omega} u, \quad r \in (R_0, R_1),$$

где ограничение u на $S_r \cap \Omega$ понимается в смысле следа, а ess sup берется по $(n-1)$-мерной мере Лебега на сфере S_r. Если $S_r \cap \Omega = \varnothing$, то будем считать, что $M(r; u) = 0$.

Емкость компакта $K \subset \omega$ по отношению к открытому множеству $\omega \subset \mathbb{R}^n$ определяется равенством

$$\operatorname{cap}(K, \omega) = \inf_\varphi \int_\omega |D\varphi|^p dx,$$

[1]*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: konkov@mech.math.msu.su*

где точная нижняя грань берется по всем функциям $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$, равным тождественно единице в окрестности K. Емкость пустого множества считается равной нулю. В случае $\omega = \mathbb{R}^n$ пишем $\operatorname{cap}(K)$ вместо $\operatorname{cap}(K, \omega)$.

Если $p = 2$ и $n \geq 3$, то $\operatorname{cap}(K)$ совпадает с хорошо известной винеровской емкостью [4].

Для любого $\varepsilon \in (0,1)$ величину

$$\operatorname{diam}_\varepsilon \omega = \sup\left\{ r : \exists x \in \omega \frac{\operatorname{cap}(\overline{B_r^x} \setminus \omega, B_{2r}^x)}{\operatorname{cap}(\overline{B_r}, B_{2r})} < \varepsilon \right\}$$

будем называть ε-существенным внутренним диаметром открытого множества $\omega \subset \mathbb{R}^n$ [5]. В случае $\omega = \varnothing$ полагаем $\operatorname{diam}_\varepsilon \omega = 0$.

Несложно увидеть, что $\operatorname{diam}_\varepsilon \omega$ является монотонной функцией множества ω и вещественного числа ε. Другими словами, если $\omega_1 \subset \omega_2$ и $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$, то $\operatorname{diam}_{\varepsilon_1} \omega_1 \leq \operatorname{diam}_{\varepsilon_2} \omega_2$.

Под $\mathcal{L}_{\nu,\varepsilon}(\omega)$, где ω – открытое подмножество $\mathbb{R}^n$, будем подразумевать пространство измеримых функций f таких, что

$$\sup_{x \in \omega} \| f \|_{L_\nu(\omega \cap B^x_{\operatorname{diam}_\varepsilon \omega})} < \infty.$$

Норма в $\mathcal{L}_{\nu,\varepsilon}(\omega)$ определяется равенством

$$\| f \|_{\mathcal{L}_{\nu,\varepsilon}(\omega)} = |B_1|^{-\frac{1}{\nu}} \sup_{x \in \omega} \| f \|_{L_\nu(\omega \cap B^x_{\operatorname{diam}_\varepsilon \omega})},$$

где $|B_1|$ – объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$. В случае $f \in L_\infty(\omega)$, очевидно, имеем

$$\| f \|_{\mathcal{L}_{\nu,\varepsilon}(\omega)} \leq (\operatorname{diam}_\varepsilon \omega)^{\frac{n}{\nu}} \| f \|_{L_\infty(\omega)}. \tag{3}$$

Предположим, что E – непустое открытое подмножество сферы S_r. Обозначим

$$\lambda_{\min}(E) = \inf_{\psi \in C_0^\infty(E)} \frac{\int_E |\nabla \psi|^p dS_r}{\int_E |\psi|^p dS_r},$$

где $|\nabla \psi| = (g^{ij} \nabla_i \psi \nabla_j \psi)^{\frac{1}{2}}$, g^{ij} – дуальный метрический тензор на сфере S_r, индуцированный евклидовой метрикой в $\mathbb{R}^n$, а dS_r – элемент $(n-1)$-мерного объема сферы S_r.

Согласно вариационному принципу $\lambda_{\min}(E)$ является первым собственным значением спектральной задачи

$$\Delta_p w = -\lambda |w|^{p-2} w \quad \text{в} \quad E, \quad w|_{\partial E} = 0,$$

для оператора p-Лапласа–Бельтрами

$$\Delta_p w = \nabla_i (|\nabla w|^{p-2} g^{ij} \nabla_j w).$$

Теорема 1. *Пусть Λ и q – неотрицательные измеримые функции такие, что*

$$\Lambda|_{[R_0, \zeta R_0] \cap [R_0, R_1)} = 0 \tag{4}$$

и при этом

$$\Lambda(r) \leq \inf_{t \in (r/\zeta, r\zeta), S_t \cap \Omega \neq \varnothing} \lambda_{\min}(S_t \cap \Omega) \tag{5}$$

и

$$q(r) \geq (\operatorname{diam}_\varepsilon \Omega_{r/\sigma, r\sigma})^{1-\frac{n}{\nu}} \|b\|_{\mathcal{L}_{\nu,\varepsilon}(\Omega_{r/\sigma, r\sigma})} \tag{6}$$

для всех $r \in (R_0, R_1)$, где $0 < \varepsilon < 1$, $\zeta > 1$ и $\sigma > 1$ – некоторые вещественные числа.

Предположим также, что u – неотрицательное решение (1), (2), причем $M(\cdot; u)$ – неубывающая функция на интервале (R_0, R_1) и

$$M(R_0 + 0; u) > 0. \tag{7}$$

Тогда для любого вещественного числа $a > p - 2$ найдутся постоянные $\gamma > 0$ и $k > 0$, зависящие только от a, n, p, ε, ζ, σ, ν, C_1, C_2, такие, что на промежутке $[R_0, R_1)$ существует решение задачи Коши

$$\frac{1}{r^{1+a}} \frac{d}{dr} \left(r^{1+a} \left| \frac{dm}{dr} \right|^{p-2} \frac{dm}{dr} \right) = \gamma e^{-kq(r)} \Lambda(r) |m|^{p-2} m, \tag{8}$$

$$m(R_0) = M(R_0 + 0; u), \quad m'(R_0) = 0, \tag{9}$$

удовлетворяющее оценке

$$M(r; u) \geq m(r) > 0 \tag{10}$$

для всех $r \in (R_0, R_1)$.

Замечание 1. Если $n > p$, то в теореме 1 можно взять $a = n - 2$. В этом случае, в левой части (8) будем, очевидно, иметь радиальный оператор p-Лапласа.

Теорема 2. *Пусть справедливы условия теоремы 1. Тогда для любого вещественного числа $a > p - 2$ найдутся постоянные $\gamma > 0$ и $k > 0$, зависящие только от a, n, p, ε, ζ, σ, ν, C_1, C_2, такие, что*

$$M(r; u) - M(R_0 + 0; u) \geq$$
$$\geq \int_{R_0}^r dt \left(\frac{\gamma}{t^{1+a}} \int_{R_0}^t \xi^{1+a} e^{-kq(\xi)} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{\frac{1}{p-1}} \tag{11}$$

для всех $r \in (R_0, R_1)$.

Замечание 2. Согласно (3) неравенство (6) будет выполнено, если $b \in L_\infty(\Omega_{R_0, r})$ и

$$q(r) \geq \operatorname{diam}_\varepsilon \Omega_{r/\sigma, r\sigma} \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega_{r/\sigma, r\sigma}} b$$

для всех $r \in (R_0, R_1)$.

Т е о р е м а 3. *Теорема* 1 *остается в силе, если функция* Λ *вместо* (4) *и* (5) *удовлетворяет условиям*

$$\Lambda\big|_{([R_0, hR_0/(1-\delta)]\cup[R_0,\sigma R_0])\cap[R_0,R_1)} = 0 \tag{12}$$

и

$$\Lambda(r) \le \inf_{\Omega_{r/h,rh}} \mu_\delta^p + r^{-n}\operatorname{cap}(\overline{B_{r\sigma_3,r\sigma_2}}\setminus\Omega, B_{r\sigma_4,r\sigma_1}) \tag{13}$$

для всех $r\in(R_0,R_1)$, *где*

$$\mu_\delta(x) = \sup_{\xi\in(0,\delta|x|)}(\xi^{1-n}\operatorname{cap}(\overline{B_\xi^x}\setminus\Omega, B_{2\xi}^x))^{\frac{1}{p-1}},$$

а $1<h$, $0<\delta<\min\left\{1-\frac{1}{h}, 1-\sigma^{-\frac{1}{2}}\right\}$ *и* $\frac{1}{\sigma}\le\sigma_4<\sigma_3<<\sigma_2<\sigma_1\le 1$ — *некоторые вещественные числа. При этом постоянные* $\gamma>0$ *и* $k>0$ *теперь будут зависеть только от* a, h, n, p, δ, ε, σ, ν, σ_1, σ_2, σ_3, σ_4, C_1, C_2.

З а м е ч а н и е 3. Если дополнительно потребовать, чтобы

$$r^{p-n}\operatorname{cap}(\overline{B_{r\sigma_3,r\sigma_2}}\setminus\Omega, B_{r\sigma_4,r\sigma_1}) \ge \varkappa \tag{14}$$

для всех $r\in(R_0,R_1)$, где $\varkappa>0$ — вещественное число, то неравенство (13) будет справедливо для некоторой функции Λ, пропорциональной $(\operatorname{diam}_\varepsilon\Omega_{r/h^2,rh^2})^{-p}$.

В самом деле, можно показать, что соотношение (14) влечет оценку

$$\inf_{\Omega_{r/h,rh}} \mu_\delta^p + r^{-n}\operatorname{cap}(\overline{B_{r\sigma_3,r\sigma_2}}\setminus\Omega, B_{r\sigma_4,r\sigma_1}) \ge \ge C(\operatorname{diam}_\varepsilon\Omega_{r/h^2,rh^2})^{-p}$$

для всех $r\in(R_0,R_1)$, где постоянная $C>0$ зависит только от h, n, p, δ, ε, $\varkappa$.

При $R_0\to+0$ из теоремы 3 можно также получить емкостные оценки решения в окрестности граничной точки $0\in\partial\Omega$, аналогичные [1, 6, 7].

Т е о р е м а 4. *Пусть в предположениях теоремы* 1 *вместо* (4) *и* (5) *справедливы условия* (12) *и* (13). *Тогда для любого вещественного числа* $a>p-2$ *найдутся постоянные* $\gamma>0$ *и* $k>0$, *зависящие только от* a, h, n, p, δ, ε, σ, ν, σ_1, σ_2, σ_3, σ_4, C_1, C_2, *такие, что для всех* $r\in(R_0,R_1)$ *имеет место неравенство* (11).

Далее будем рассматривать неравенства

$$\operatorname{div}A(x,Du) + b(x)|Du|^{p-1} \ge F(x,u) \quad \text{в} \quad \Omega_{R_0,R_1}. \tag{15}$$

Функция u называется решением (15), если $u\in W_p^1(\Omega_{R_0,r})\cap L_\infty(\Omega_{R_0,r})$, $A(x,Du)\in L_{p/(p-1)}(\Omega_{R_0,r})$ и $F(x,u)\in L_{p/(p-1)}(\Omega_{R_0,r})$ для любого $r\in(R_0,R_1)$ и при этом

$$-\int_{\Omega_{R_0,R_1}} A(x,Du)D\varphi dx + \int_{\Omega_{R_0,R_1}} b(x)|Du|^{p-1}\varphi dx \ge \ge \int_{\Omega_{R_0,R_1}} F(x,u)\varphi dx$$

для всех неотрицательных $\varphi\in C_0^\infty(\Omega_{R_0,R_1})$.

Объединяя теоремы 1–4 с результатами работы [3], приходим к следующим утверждениям.

Т е о р е м а 5. *Пусть* Λ *и* q — *неотрицательные измеримые функции, удовлетворяющие условиям* (4)–(6), *a* $f\colon [R_0,R_1)\times(0,\infty)\to[0,\infty)$ *и* $l\colon [R_0, R_1)\times\times(0,\infty)\to[0,\infty)$ — *локально ограниченные измеримые функции такие, что*

$$f(r,t-0) = f(r,t) \tag{16}$$

для всех $r\in(R_0,R_1)$, $t>0$,

$$f(r,t_1)\ge f(r,t_2) \tag{17}$$

для всех $r\in(R_0,R_1)$, $t_1\ge t_2>0$,

$$f(r,t)\le \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega_{r/\theta,\theta r}} F(x,t) \tag{18}$$

для всех $r\in(R_0,R_1)$, $t>0$, *и*

$$l(r)\ge \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega_{r/\theta,\theta r}} b \tag{19}$$

для всех $r\in(R_0,R_1)$, *где* $\theta>1$ — *некоторое вещественное число.*

Предположим также, что u — *неотрицательное решение* (15), (2), *причем* $M(\cdot;u)$ — *неубывающая функция на интервале* (R_0,R_1) *и выполнено условие* (7).

Тогда для любых вещественных чисел $a>p-2$ *и* $\alpha>0$ *найдутся постоянные* $\beta>0$, $\gamma>0$ *и* $k>0$, *зависящие только от* a, n, p, α, ε, ζ, θ, σ, ν, C_1, C_2, *такие, что на промежутке* $[R_0,R_1)$ *существует решение уравнения*

$$\frac{1}{r^{1+a}}\frac{d}{dr}\left(r^{1+a}\left|\frac{dm}{dr}\right|^{p-2}\frac{dm}{dr}\right) + \alpha l(r)\left|\frac{dm}{dr}\right|^{p-2}\frac{dm}{dr} = = \gamma(f(r,\beta m) + e^{-kq(r)}\Lambda(r)|m|^{p-2}m),$$

удовлетворяющее условию (9) *и оценке* (10).

П р и м е р 1. Пусть u – решение задачи

$$Lu \geq F(x,u) \quad \text{в} \quad B_{R_1} \cap \Omega, \quad u|_{B_{R_1} \cap \partial\Omega} = 0,$$

для которого справедливо соотношение (7), где

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}$$

есть равномерно эллиптический оператор с измеримыми коэффициентами. Согласно принципу максимума, $M(\cdot;u)$ должна быть неубывающей функцией на интервале (R_0, R_1). Полагая

$$b(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2(x)\right)^{\frac{1}{2}},$$

очевидно, получим, что u является решением неравенства

$$\operatorname{div}A(x, Du) + b(x)|Du| \geq F(x,u) \quad \text{в} \quad B_{R_1} \cap \Omega,$$

где $A(x, Du) = (A_1(x, Du), \ldots, A_n(x, Du))$,

$$A_i(x, Du) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Таким образом, для любых функций Λ, q, f и l, удовлетворяющих условиям (4)–(6), (16)–(19), и вещественных чисел $a > 0$ и $\alpha > 0$ найдутся постоянные $\beta > 0$, $\gamma > 0$ и $k > 0$, зависящие только от $a, n, \alpha, \varepsilon, \zeta, \theta, \sigma, \nu$ и от постоянных эллиптичности оператора L, такие, что на промежутке $[R_0, R_1)$ существует решение уравнения

$$\frac{d^2m}{dr^2} + \left(\frac{1+a}{r} + \alpha l(r)\right)\frac{dm}{dr} = \gamma\left(f(r, \beta m) + e^{-kq(r)}\Lambda(r)m\right), \tag{20}$$

удовлетворяющее условию (9) и оценке (10).

В случае $n > 2$, полагая $a = n - 2$ и $\alpha = 1$, мы, очевидно, получим радиальную компоненту оператора $\Delta + l(|x|)D|x|D$ в левой части (20).

Т е о р е м а 6. *В предположениях теоремы* 5 *для любых вещественных чисел* $a > p - 2$ *и* $\alpha > 0$ *найдутся постоянные* $\beta > 0$, $\gamma > 0$ *и* $k > 0$, *зависящие только от* $a, n, p, \alpha, \varepsilon, \zeta, \theta, \sigma, \nu, C_1, C_2$, *такие, что*

$$M(r;u) - M(R_0 + 0;u) \geq$$
$$\geq \int_{R_0}^{r} dt \left(\frac{\gamma}{t^{1+a}} \int_{R_0}^{t} \xi^{1+a} e^{-\alpha\int_{\xi}^{t} l(s)ds} (f(\xi, \beta M(\xi;u)) + e^{-kq(r)}\Lambda(\xi)M^{p-1}(\xi;u))d\xi\right)^{\frac{1}{p-1}} \tag{21}$$

для всех $r \in (R_0, R_1)$.

Т е о р е м а 7. *Теорема* 5 *остается в силе, если функция* Λ *вместо* (4) *и* (5) *удовлетворяет условиям* (12) *и* (13). *При этом постоянные* $\beta > 0$, $\gamma > 0$ *и* $k > 0$ *теперь будут зависеть только от* a, h, n, p, $\alpha, \delta, \varepsilon, \theta, \sigma, \nu, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, C_1, C_2$.

Т е о р е м а 8. *Пусть в предположениях теоремы* 5 *функция* Λ *вместо* (4) *и* (5) *удовлетворяет условиям* (12) *и* (13). *Тогда для любых вещественных чисел* $a > p - 2$ *и* $\alpha > 0$ *найдутся постоянные* $\beta > 0$, $\gamma > 0$ *и* $k > 0$, *зависящие только от* a, h, n, p, $\alpha, \delta, \varepsilon, \theta, \sigma, \nu, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, C_1, C_2$, *такие, что для всех* $r \in (R_0, R_1)$ *имеет место неравенство* (21).

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке РНФ, грант 20-11-20272.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gariepy R., Ziemer W.* A regularity condition at the boundary for solutions of quasilinear elliptic equations // Arch. Rat. Mech. Anal. 1977. V. 67. P. 25–39.
2. *Коньков А.А.* О теоремах сравнения для квазилинейных эллиптических неравенств, учитывающих геометрию области // Изв. РАН. Сер. Матем. 2014. Т. 78. 4. С. 123–174.
3. *Kon'kov A.A.* On comparison theorems for elliptic inequalities // J. Math. Anal. Appl. 2012. V. 388. P. 102–124.
4. *Ландкоф Н.С.* Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966.
5. *Мазья В.Г.* Пространства С.Л.Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.
6. *Мазья В.Г.* О непрерывности в граничной точке решений квазилинейных эллиптических уравнений // Вестник ЛГУ. 1970. 13. Вып. 3. С. 42–55.
7. *Мазья В.Г.* О поведении вблизи границы решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка в дивергентной форме // Матем. заметки. 1967. Т. 2. Вып. 2. С. 209–220.

COMPARISON THEOREMS FOR ELLIPTIC INEQUALITIES WITH LOWER-ORDER DERIVATIVES THAT TAKE INTO ACCOUNT THE GEOMETRY OF THE DOMAIN

A. A. Kon'kov[a]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

We obtain comparison theorems that make it possible to estimate the spherical maximum of solutions of quasilinear elliptic inequalities containing lower-order derivatives in terms of solutions of the Cauchy problem for an ordinary differential equation the right-hand side of which depends on the geometry of the domain.

Keywords: non-linear elliptic operators, unbounded domains, capacity