ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 500, с. 31–34

МАТЕМАТИКА

УДК 519.175.4

О 4-СПЕКТРЕ СВОЙСТВ ПЕРВОГО ПОРЯДКА СЛУЧАЙНЫХ ГРАФОВ

М. Е. Жуковский[1,2,3,4,*], А. Д. Матушкин[1,**], Ю. Н. Яровиков[1,5,***]

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 22.04.2021 г.
Поступило 27.04.2021 г.
После доработки 07.07.2021 г.
Принято к публикации 18.08.2021 г.

k-Спектром называется множество таких положительных чисел α, что биномиальный случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ не подчиняется закону нуля или единицы для формул первого порядка кванторной глубины не более k. Мы доказали, что минимальное k, при котором k-спектр бесконечен, равно 5.

Ключевые слова: логика первого порядка, биномиальный случайный граф, закон нуля или единицы, спектр формулы, игра Эренфойхта

DOI: 10.31857/S2686954321050180

1. ЛОГИКА ПЕРВОГО ПОРЯДКА СЛУЧАЙНОГО ГРАФА

Простым графом (далее просто графом) G называется пара множеств $G = (V, E)$, где V – произвольное непустое множество, а E – некоторое множество неупорядоченных пар различных элементов из V. Под изоморфизмом графов $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ подразумевается биекция $f: V_1 \to V_2$, сохраняющая ребра, т.е. $\{x, y\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(x), f(y)\} \in E_2$. Свойство графов – множество графов, замкнутое относительно изоморфизма. Для формализации некоторых свойств графов используется язык первого порядка. Так, например, свойство содержать треугольник (тройку вершин, попарно соединенных ребрами) записывается формулой первого порядка

$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \quad (x_1 \sim x_2) \wedge (x_1 \sim x_3) \wedge (x_2 \sim x_3).$$

Свойство графа иметь изолированную вершину (вершину, из которой не исходит ни одно ребро) записывается формулой первого порядка

$$\exists x \forall y \quad \neg(y \sim x).$$

Говоря простыми словами, формула первого порядка – это формальная запись свойства, использующая символы переменных $(x, x_1, y, z, \ldots)$, булевы связки $(\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow)$, предикатные символы (в случае графов $=$, $\sim$), кванторы $(\forall, \exists)$ и скобки. Строгое определение формулы первого порядка можно найти, например, в [1]. Под сигнатурой формулы подразумевается множество предикатных символов $\mathcal{P}$ с заданными арностями (т.е. натуральными числами, обозначающими количество аргументов соответствующего предиката). Под интерпретацией подразумевается множество $\mathcal{D}$ и отображение σ, ставящее в соответствие каждому символу из $\mathcal{P}$ предикат $\mathcal{D}^a \to \{0,1\}$, где a – арность этого предикатного символа. В случае графов сигнатура состоит из двух предикатных символов $\sim$, $=$, а интерпретациями являются конечные простые графы (предикат $x \sim y$ является истинным для вершин x, y, соединенных ребром). Иными словами, для интерпретации G на n вершинах:

1) $\mathcal{D} = \{1, \ldots, n\}$ – множество вершин графа G,

2) предикат $\sim$ истинен на вершинах x, y тогда и только тогда, когда x, y соединены ребром в G,

[1] *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия*
[2] *Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, Москва, Россия*
[3] *Кавказский математический центр Адыгейского государственного университета, Майкоп, Россия*
[4] *Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия*
[5] *Институт искусственного интеллекта AIRI, Москва, Россия*
*E-mail: zhukmax@gmail.com
**E-mail: 1alexmatushkin1@gmail.com
***E-mail: yu-rovikov@yandex.ru

3) предикат = истинен на совпадающих вершинах x, y.

Логика первого порядка обладает рядом важных свойств, одним из которых является теорема Гёделя о полноте [1]. Из этой теоремы, в частности, следует так называемый закон 0 или 1. Для графов это утверждение звучит следующим образом. Пусть φ – формула первого порядка, а G_n – множество графов на множестве вершин $\{1,\ldots,n\}$, для которых формула φ является истинной. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} |\mathcal{G}_n|/2^{C_n^2} \in \{0,1\}.$$

Заметим, что $2^{C_n^2}$ – это количество всех графов на $\{1,\ldots,n\}$. Закон 0 или 1 был впервые доказан Глебским, Коганом, Легоньким и Талановым в 1969 г. [2] и далее в 1976 г. он независимо (и по-другому) был доказан Фейгиным [3]. Чтобы заметить, что закон 0 или 1 вытекает из теоремы Гёделя, достаточно построить так называемую систему аксиом расширения и доказать, что ни для какого конечного графа не истинны все эти аксиомы одновременно, но существует единственный счетный граф R, для которого они истинны (этот граф называется графом Радо, и с вероятностью 1 он изоморфен случайному счетному графу в биномиальной модели) [4]. Действительно, упомянутая система аксиом является почти наверное теорией, т.е. любая аксиома истинна на почти всех графах, а значит, то же самое верно и для любой выводимой из нее формулы (т.е. формулы, истинной на всех графах, на которых истинен и некоторый конечный набор аксиом). По теореме Гёделя любая формула, истинная на R, истинна на почти всех графах. Наоборот, если формула φ не является истинной на R, то $\neg\varphi$ – истинна, а значит, истинна на почти всех графах. Единственным нетривиальным моментом в этом доказательстве является единственность графа Радо (существование счетного графа следует из непротиворечивости упомянутой системы аксиом, см. [1]).

Альтернативное доказательство [5] закона 0 или 1 опирается на теорему Эренфойхта [6], связывающую игру Эренфойхта с понятием элементарной эквивалентности. Напомним, что кванторной глубиной формулы $\mathbf{q}(\varphi)$ называется количество кванторов в самой длинной последовательности вложенных кванторов в этой формуле (см. формальное определение в [1]). Будем говорить, что графы G_1, G_2 являются k-элементарно эквивалентными, если для любой формулы первого порядка φ с $\mathbf{q}(\varphi) = k$ либо φ истинна на G_1, G_2, либо ложна на G_1, G_2. В игре Эренфойхта на графах G_1, G_2 с k раундами участвуют два игрока, Новатор и Консерватор. В ν-м раунде ($1 \le \nu \le k$) Новатор выбирает вершину из любого графа, отличную от уже выбранных. Затем Консерватор выбирает вершину из другого графа, отличную от уже выбранных. К концу игры выбраны вершины $x_1,\ldots,x_k \in V(G_1)$ и $y_1,\ldots,y_k \in V(G_2)$. Консерватор побеждает в том и только том случае, когда отображение f: $\{x_1, \ldots, x_k\} \to \{y_1,\ldots,y_k\}$, переводящее вершину x_ν в вершину y_ν для каждого $\nu \in \{1,\ldots,k\}$, является изоморфизмом индуцированных подграфов $G_1|_{\{x_1,\ldots,x_k\}}$ и $G_2|_{\{y_1,\ldots,y_k\}}$. Теорема Эренфойхта утверждает, что графы G_1, G_2 являются k-элементарно эквивалентными тогда и только тогда, когда у Консерватора есть выигрышная стратегия на G_1, G_2 в k раундах.

Из теоремы Эренфойхта можно (см., например, [4, 7]) получить следствие о справедливости законов 0 или 1: закон 0 или 1 справедлив для любой формулы первого порядка φ с $\mathbf{q}(\varphi) \le k$ тогда и только тогда, когда у Консерватора есть выигрышная стратегия в k раундах на почти всех графах (иными словами,

$$\lim_{n,m\to\infty} |\mathcal{G}_{n,m}|/2^{C_n^2+C_m^2} = 1,$$

где $\mathcal{G}_{n,m}$ – множество пар графов G_1 на $\{1,\ldots,n\}$ и G_2 на $\{1,\ldots,m\}$, на которых у Консерватора есть выигрышная стратегия в k раундах).

2. СПЕКТРЫ ФОРМУЛ

Мы изучаем вероятности истинности формул первого порядка на биномиальном случайном графе $G(n, p)$ [7, 8]. Множество вершин этого графа – $\{1,\ldots,n\}$, а ребра проводятся независимо с вероятностью p каждое. Иными словами, для любого графа $G = (\{1,\ldots,n\}, E)$

$$\mathrm{P}(G(n,p) = G) = p^{|E|}(1-p)^{C_n^2-|E|}.$$

Говорят, что случайный граф $G(n, p)$ подчиняется закону нуля или единицы, если для любой формулы первого порядка φ либо

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(G(n,p) \models \varphi) = 1,$$

либо

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(G(n,p) \models \varphi) = 0$$

(здесь и далее мы пишем $G \models \varphi$, если формула φ истинна на графе G). Заметим, что упомянутая теорема из предыдущего раздела утверждает справедливость закона 0 или 1 для случайного графа $G\left(n,\frac{1}{2}\right)$. Легко заметить [5], что закон 0 или 1 справедлив и для всех p таких, что для любого $\alpha > 0$ выполнено $\min\{p, 1-p\}n^{\alpha} \to \infty$, $n \to \infty$, в силу истинности (с асимптотической вероятностью 1) всех аксиом расширения.

Если же $p = n^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, то закон 0 или 1 справедлив тогда и только тогда, когда α — иррационально или $\alpha > 1$ и $\alpha \notin \left\{1 + \frac{1}{m}, m \in \mathbb{N}\right\}$ [9]. При ограничении на кванторную глубину формул закон становится справедлив и для некоторых рациональных $\alpha \in (0,1]$ и $\alpha = 1 + \frac{1}{m}$ (см., например, [10, 11]). Говорят, что случайный граф $G(n, p)$ подчиняется k-закону нуля или единицы, если для любой формулы первого порядка φ с $\mathbf{q}(\varphi) \le k$ либо $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(G(n, p) \vDash \varphi) = 1$, либо $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(G(n, p) \vDash \varphi) = 0$. В [11] доказано, что множество таких $m \in \mathbb{N}$, что случайный граф $G(n, n^{-1-1/m})$ не подчиняется k-закону нуля или единицы, конечно. Множество $S(k)$ всех таких $\alpha > 0$, что случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ не подчиняется k-закону нуля или единицы, называется k-спектром. Таким образом, возникает вопрос: а бесконечно ли множество $S(k)$ хоть для каких-то k? Ясно, что если $S(k)$ бесконечно для некоторого k, то $S(\ell)$ также бесконечно для всех $\ell > k$. В [12] Дж. Спенсер доказал, что k-спектр бесконечен при $k \ge 14$. В [10] доказано, что $S(3) \cap (0,1) = \phi$ и $S(4) \cap (0,1/2) = \phi$. В [13] приведен пример такой формулы первого порядка φ кванторной глубины 5, что $\mathrm{P}(G(n, n^{-\alpha}) \vDash \varphi)$ не стремится ни к 0, ни к 1 для бесконечно многих α. Итак, минимальное k, при котором множество $S(k)$ бесконечно, равно 4 или 5.

Нам удалось доказать, что минимальное k, при котором k-спектр бесконечен, равно 5, что равносильно следующей теореме.

Т е о р е м а 1. *Множество $S(4)$ конечно.*

И д е я д о к а з а т е л ь с т в а. В прежней работе [14] нам удалось доказать, что множество $S(4)$ не содержит ни одной предельной точки кроме, быть может, 1/2 и 3/5. Теперь мы доказали, что и 1/2, 3/5 не являются предельными точками спектра. Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что для некоторого $\varepsilon > 0$ случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется 4-закону 0 или 1 для всех $\alpha \in (1/2, 1/2 + \varepsilon)$ и $\alpha \in (3/5, 3/5 + \varepsilon)$ (пустота спектра для некоторой левой окрестности любой предельной точки доказана в [9]). Последнее утверждение мы доказали с помощью следствия из теоремы Эренфойхта и следующей леммы.

Л е м м а 1. *Существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого*

$$\alpha \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \varepsilon\right) \sqcup \left(\frac{3}{5}, \frac{3}{5} + \varepsilon\right)$$

с вероятностью, стремящейся к 1, у Консерватора есть выигрышная стратегия в 4 раундах в игре Эренфойхта на графах $G(n, n^{-\alpha})$, $G(m, m^{-\alpha})$ при n, $m \to \infty$.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены за счет гранта Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 20-31-70025.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Верещагин Н.К., Шень А.* Языки и исчисления. М.: МНЦМО, 2012. 240 с.
2. *Глебский Ю.В., Коган Д.И., Лиогонький М.И., Таланов В.А.* Объем и доля выполнимости формул узкого исчисления предикатов // Кибернетика. 1969. № 2. С. 17–26.
3. *Fagin R.* Probabilities in finite models // J. Symbolic Logic. 1976. № 41. P. 50–58.
4. *Spencer J.H.* The Strange Logic of Random Graphs. Berlin: Springer-Verlag, 2001. 168 p.
5. *Spencer J.H.* Threshold spectra via the Ehrenfeucht game // Discrete Applied Mathematics. 1991. № 30. P. 235–252.
6. *Ehrenfeucht A.* An application of games to the completness problem for formalized theories // Warszawa Fund. Math. 1960. № 49. P. 121–149.
7. *Alon N., Spencer J.H.* Probabilistic method. New York: Wiley, 2008. 400 c.
8. *Janson S., Łuczak T., Ruciński A.* Random Graphs. New York: Wiley, 2000. 336 c.
9. *Shelah S., Spencer J.H.* Zero-one laws for sparse random graphs // J. Amer. Math. Soc. 1988. № 1. P. 97–115.
10. *Zhukovskii M.E.* Zero-one k-law // Discrete Mathematics. 2012. № 312. P. 1670–1688.
11. *Ostrovsky L.B., Zhukovskii M.E.* Monadic second-order properties of very sparse random graphs // Annals of pure and applied logic. 2017. № 168(11). P. 2087–2101.
12. *Spencer J.H.* Infinite spectra in the first order theory of graphs // Combinatorica. 1990. №10:1. P. 95–102.
13. *Zhukovskii M.* On Infinite Spectra of First Order Properties of Random Graphs // Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory. 2016. № 6(4). P. 73–102.
14. *Matushkin A.D., Zhukovskii M.E.* First order sentences about random graphs: small number of alternations // Discrete Applied Mathematics. 2018. № 236. P. 329–346.

ON THE 4-SPECTRUM OF FIRST-ORDER PROPERTIES OF RANDOM GRAPHS

M. E. Zhukovskii[a,b,c,d], A. D. Matushkin[a], and Y. N. Yarovikov[a,e]

[a] *Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Moscow Region, Russian Federation*

[b] *The Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Moscow, Russian Federation*

[c] *Caucasus Mathematical Center, Adyghe State University, Maykop, Republic of Adygea, Russian Federation*

[d] *Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation*

[e] *Artificial Intelligence Research Institute (AIRI), Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

A k-spectrum is a set of all positive α such that the random binomial graph $G(n, n^{-\alpha})$ does not obey the zero-one law for first-order formulas with quantifier depth no more than k. We proved that the minimal k such that the k-spectrum is infinite, equals to 5.

Keywords: first-order logic, random binomial graph, zero-one law, spectrum of formula, Ehrenfeucht game