ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 500, с. 74–77

МАТЕМАТИКА

УДК 517.929

ВТОРАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2021 г. А. Л. Скубачевский[1,2,*], Н. О. Иванов[1,]**

Представлено академиком РАН Ю.С. Осиповым 17.08.2021 г.
Поступило 20.08.2021 г.
После доработки 20.08.2021 г.
Принято к публикации 02.09.2021 г.

Рассматривается вторая краевая задача для дифференциально-разностного уравнения второго порядка с переменными коэффициентами на интервале (0, d). Получено необходимое и достаточное условие существования обобщенного решения. Доказано, что если правая часть уравнения ортогональна в $L_2(0, d)$ некоторым функциям, то обобщенное решение из пространства Соболева $W_2^1(0, d)$ будет принадлежать пространству $W_2^2(0, d)$.

Ключевые слова: дифференциально-разностные уравнения, обобщенные решения, краевая задача

DOI: 10.31857/S2686954321050155

ВВЕДЕНИЕ

Обобщенные решения первой краевой задачи для функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа на конечном интервале (0, d) впервые рассматривались в работах [1, 2]. Было показано, что гладкость обобщенных решений может нарушаться во внутренних точках интервала даже при бесконечно дифференцируемой правой части и сохраняется лишь на подынтервалах, получаемых выбрасыванием из интервала (0, d) орбит его концов. В работах [3, 4] получены условия на правые части уравнения, обеспечивающие гладкость обобщенных решений первой краевой задачи для дифференциально-разностных уравнений на всем интервале (0, d). Вопрос о нахождении таких условий в случае второй краевой задачи является открытым. В работах [5, 6] в случаях как первой, так и второй краевых задач были получены условия на коэффициенты дифференциально-разностного уравнения, при выполнении которых гладкость обобщенных решений дифференциально-разностного уравнения сохраняется на всем интервале для любой правой части. Краевые задачи для функционально-дифференциальных уравнений возникают во многих важных приложениях, в частности в задачах теории управления системами с последействием [4, 7–10].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Введем операторы R_Q: $L_2(Q) \to L_2(Q)$, R: $L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, I_Q: $L_2(Q) \to L_2(\mathbb{R})$ и P_Q: $L_2(\mathbb{R}) \to L_2(Q)$ следующим образом:

$$(Ru)(x) = \sum_{j=-n}^{n} a_j(x)u(x + j), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $Q := (0, d)$, $d = n + \theta$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < \theta \le 1$; $a_j(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ – комплекснозначные функции; $(I_Q v)(x) = v(x)$, $x \in Q$; $(I_Q v)(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}\backslash Q$; $(P_Q v)(x) = v(x)$, $x \in Q$; $R_Q = P_Q R I_Q$.

Рассмотрим задачу

$$-(R_Q u')'(x) = f(x), \quad x \in Q, \tag{2}$$

$$(R_Q u')(0) = (R_Q u')(d) = 0, \tag{3}$$

где $f \in L_2(Q)$.

Заметим, что сдвиги аргументов $x \mapsto x + j$ в операторе R могут отображать точки интервала Q в $\mathbb{R}\backslash Q$. Поэтому краевые условия для уравнения (2) мы задаем не только в точках 0 и d, но и на множестве $\mathbb{R}\backslash Q$. Для этого используется оператор I_Q, который является оператором продолжения

[1] *Математический институт Российского университета дружбы народов, Москва, Россия*
[2] *Центр фундаментальной и прикладной математики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: skub@lector.ru*
***E-mail: noivanov1@gmail.com*

нулем функции из $L_2(Q)$ на $\mathbb{R}\backslash Q$. Для рассмотрения дифференциально-разностного уравнения (2) на интервале Q вводится оператор P_Q, являющийся оператором сужения функции из $L_2(\mathbb{R})$ на Q.

Если $\theta = 1$, рассмотрим один класс непересекающихся подынтервалов: $Q_{1k} = (k-1,k)$, $k = 1, \dots, n+1$. Если $0 < \theta < 1$, рассмотрим два класса непересекающихся подынтервалов: $Q_{1k} = (k-1, k-1+\theta)$, $k = 1,\dots,n+1$, и $Q_{2k} = (k-1+\theta, k)$, $k = 1,\dots,n$.

Обозначим через $R_s = R_s(x)$, $x \in \bar{Q}_{s1}$, теплицеву матрицу порядка $N(s)\times N(s)$ с элементами

$$r_{ij}^s(x) := a_{j-i}(x+i-1), \quad x \in \mathbb{R}, \quad i,j = 1,\dots,N(s), \tag{4}$$

где $N(1) = n+1$, $N(2) = n$; $s = 1,2$, если $0 < \theta < 1$; $s = 1$, если $\theta = 1$.

Очевидно, матрица $R_2(x)$ может быть получена из матрицы $R_1(x)$ вычеркиванием последней строки и последнего столбца. Свойства оператора R_Q тесно связаны со свойствами матриц $R_s(x)$.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что для всех $x \in \bar{Q}_{s1}$ и $Y \in \mathbb{C}^{N(s)}$ ($s = 1,2$, если $0 < \theta < 1$, и $s = 1$, если $\theta = 1$) выполняется неравенство

$$\operatorname{Re}(R_s(x)Y, Y) \geq c\|Y\|^2, \tag{5}$$

где $c > 0$ не зависит от x и Y, $(\cdot,\cdot)$ и $\|\cdot,\cdot\|$ – скалярное произведение и норма в $\mathbb{C}^{N(s)}$ соответственно.

2. РАЗРЕШИМОСТЬ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Пусть $W_2^k(Q)$ – пространство Соболева комплекснозначных функций из $L_2(Q)$, имеющих все обобщенные производные вплоть до k-го порядка из $L_2(Q)$. Скалярное произведение в $W_2^k(Q)$ вводится по формуле

$$(u,v)_{W_2^k(Q)} = \sum_{i=0}^{k}\int_0^d u^{(i)}\overline{v^{(i)}}dx.$$

Введем неограниченный оператор $\mathcal{A}_R : L_2(Q) \supset D(\mathcal{A}_R) \to L_2(Q)$ с областью определения $D(\mathcal{A}_R) = \{u \in W_2^1(Q) : Ru' \in W_2^1(Q), (Ru')(0) = (Ru')(d) = 0\}$, действующий по формуле

$$\mathcal{A}_R u = -(Ru')', \quad u \in D(\mathcal{A}_R). \tag{6}$$

Определение 1. Функция $u \in D(\mathcal{A}_R)$ называется обобщенным решением задачи (2), (3), если

$$\mathcal{A}_R u = f. \tag{7}$$

Теорема 1. *Пусть выполняется неравенство* (5). *Тогда вторая краевая задача* (2), (3) *имеет обобщенное решение* $u \in D(\mathcal{A}_R)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\int_0^d f(x)dx = 0. \tag{8}$$

3. ГЛАДКОСТЬ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ НА ПОДЫНТЕРВАЛАХ

Теорема 2. *Пусть выполняется неравенство* (5), *и пусть* $u \in D(\mathcal{A}_R)$ – *обобщенное решение задачи* (2), (3). *Тогда* $u \in W_2^2(k-1,k-1+\theta)$, $k = 1, \dots, n+1$, $u \in W_2^2(k-1+\theta,k)$, $k = 1,\dots,n$, *если* $0 < \theta < 1$; $u \in W_2^2(k-1,k)$, $k = 1,\dots,n+1$, *если* $\theta = 1$.

4. ГЛАДКОСТЬ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ НА ВСЕМ ИНТЕРВАЛЕ (0, d)

Предположим, что $\theta = 1$, т.е. $d = n+1$. Введем матрицу $\mathbf{R}_1$ порядка $(n+2)\times(2n+2)$ по формуле

$$\mathbf{R}_1 := \begin{pmatrix} a_0(0) & a_1(0) & \dots & a_n(0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{-1}(1) & a_0(1) & \dots & a_{n-1}(1) & a_0(1) & a_1(1) & \dots & a_n(1) \\ a_{-2}(2) & a_{-1}(2) & \dots & a_{n-2}(2) & a_{-1}(2) & a_0(2) & \dots & a_{n-1}(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{-n}(n) & a_{-n+1}(n) & \dots & a_0(n) & a_{-n+1}(n) & a_{-n+2}(n) & \dots & a_1(n) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{-n}(n+1) & a_{-n+1}(n+1) & \dots & a_0(n+1) \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\mathbf{R}_1^1(\mathbf{R}_1^2)$ матрицу порядка $(n+2)\times(2n+1)$, полученную из матрицы $\mathbf{R}_1$ вычеркиванием первого (последнего) столбца соответственно, а через $\mathbf{R}_1^0$ матрицу порядка $(n+2)\times 2n$, полученную из $\mathbf{R}_1$ вычеркиванием первого и последнего столбцов.

Будем предполагать, что выполняется условие

$$\sum_{k=1}^{n}\left(|a_k(0)| + |a_{-k}(n+1)|\right) \neq 0. \tag{9}$$

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (5) *и* (9). *Тогда* $\mathrm{rank}\mathbf{R}_1 = n+2$ *и* $\mathrm{rank}\mathbf{R}_1^0 \ge n+1$.

Обозначим через $G_j^1 = G_j^1(x)$ $(G_j^2 = G_j^2(x))$ j-й столбец матрицы порядка $n \times (n+1)$, полученной из матрицы $R_1 = R_1(x)$ вычеркиванием первой (последней) строки $(j = 1,\dots,n+1)$.

Введем линейный ограниченный оператор $A_R^0 : W_2^2(Q) \supset D(A_R^0) \to L_2(Q)$ с областью определения $D(A_R^0) = D(\mathcal{A}_R) \cap W_2^2(Q)$, действующий по формуле

$$A_R^0 u = \mathcal{A}_R u, \quad u \in D(A_R^0).$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (5) *и* (9), *и пусть* $\theta = 1$. *Предположим, что столбцы* $G_1^1(0)$ *и* $G_{n+1}^2(1)$ *линейно независимы. Тогда оператор* $A_R^0 : W_2^2(Q) \supset D(A_R^0) \to L_2(Q)$ *фредгольмов*, $1 \in \mathcal{N}(A_R^0)$ *и* $\dim\mathcal{N}(A_R^0) = 1$. *Если к тому же*

$$\mathrm{rank}\mathbf{R}_1^0 = \mathrm{rank}\mathbf{R}_1^1 = \mathrm{rank}\mathbf{R}_1^2, \tag{10}$$

то $\mathrm{codim}\mathcal{R}(A_R^0) = 3$; *если же*

$$\mathrm{rank}\mathbf{R}_1^0 < \max\{\mathrm{rank}\mathbf{R}_1^1, \mathrm{rank}\mathbf{R}_1^2\}, \tag{11}$$

то $\mathrm{codim}\mathcal{R}(A_R^0) = 2$.

Из теорем 1 и 3 вытекает

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 3. *Если к тому же справедливы равенства* (10), *то найдутся три линейно независимые функции* $h_0, h_1, h_2 \in L_2(Q)$ *такие, что* $h_0(x) \equiv 1$, *и при выполнении условий* $(f, h_j)_{L_2(Q)} = 0$, $j = 0,1,2$, *обобщенное решение задачи* (2), (3) $u_f \in W_2^1(Q)$ *существует и принадлежит пространству* $W_2^2(Q)$. *Если же справедливо неравенство* (11), *то найдутся две линейно независимые функции* h_0, $h_1 \in L_2(Q)$ *такие, что* $h_0(x) \equiv 1$, *и при выполнении условий* $(f, h_j)_{L_2(Q)} = 0$, $j = 0, 1$, *обобщенное решение задачи* (2), (3) $u_f \in W_2^1(Q)$ *существует и принадлежит пространству* $W_2^2(Q)$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (5) *и* (9), *и пусть* $\theta = 1$. *Предположим, что столбцы* $G_1^1(0)$ *и* $G_{n+1}^2(1)$ *линейно зависимы и* $G_1^1(0), G_{n+1}^2(1) \neq 0$. *Тогда оператор* $A_R^0 : W_2^2(Q) \supset D(A_R^0) \to L_2(Q)$ *фредгольмов*, $1 \in \mathcal{N}(A_R^0)$ *и* $\dim\mathcal{N}(A_R^0) = 1$. *Если при этом* $\mathrm{rank}\mathbf{R}_1^0 = \mathrm{rank}\mathbf{R}_1^1$ *или* $\mathrm{rank}\mathbf{R}_1^0 = \mathrm{rank}\mathbf{R}_1^2$, *то* $\mathrm{codim}\mathcal{R}(A_R^0) = 2$.

Из теорем 1 и 4 вытекает

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 4. *Тогда найдутся две линейно независимые функции* h_0, $h_1 \in L_2(Q)$ *такие, что* $h_0(x) \equiv 1$, *и при выполнении условий* $(f, h_j)_{L_2(Q)} = 0$, $j = 0,1$, *обобщенное решение задачи (2), (3)* $u_f \in W_2^1(Q)$ *существует и принадлежит пространству* $W_2^2(Q)$.

Пример 1. Рассмотрим оператор R_Q: $L_2(0,3) \to L_2(0, 3)$, где $Q = (0,3)$, $(Ru)(x) = a_0 u(x) + a_1 u(x+1) + a_{-1} u(x-1) + a_2 u(x+2) + a_{-2} u(x-2)$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \pm 1, \pm 2$. Тогда $n = 2$, $\theta = 1$, а матрица R_1 имеет вид

$$R_1 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_{-1} & a_0 & a_1 \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$G_1^1 = \begin{pmatrix} a_{-1} \\ a_{-2} \end{pmatrix}, \quad G_3^2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_{-1} & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_{-2} & a_{-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что выполняется условие (5), а столбцы G_1^1 и G_3^2 линейно независимы. Можно показать, что тогда $\det\mathbf{R}_1^0 \neq 0$. Следовательно, выполняется условие (10). Таким образом, в силу теоремы 3 оператор $A_R^0 : W_2^2(0,3) \supset D(A_R^0) \to L_2(0, 3)$ фредгольмов, $1 \in \mathcal{N}(A_R^0)$ и $\dim\mathcal{N}(A_R^0) = 1$, при этом $\mathrm{codim}\mathcal{R}(A_R^0) = 3$.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Публикация подготовлена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания: соглашение № 075-03-2020-223/3 (FSSF-2020-0018).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Каменский Г.А., Мышкис А.Д.* Постановка краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимися аргументами в старших членах // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. № 3. С. 409–418.
2. *Каменский А.Г.* Краевые задачи для уравнений с формально симметричными дифференциально-разностными операторами // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 10. № 5. С. 815–824.
3. *Каменский Г.А., Мышкис А.Д., Скубачевский А.Л.* О гладких решениях краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения нейтрального типа // Укр. матем. журнал. 1985. Т. 37. № 5. С. 581–585.

4. *Skubachevskii A.L.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications. Basel–Boston–Berlin, Birkhäuser, 1997. 298 p.
5. *Неверова Д.А., Скубачевский А.Л.* О классических и обобщенных решениях краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами // Матем. заметки. 2013. Т. 94. № 5. С. 702–719.
6. *Neverova D.A.* Generalized and classical solutions to the second and third boundary-value problem for differential-difference equations // Functional Differential Equations. 2014. Т. 21. С. 47–65.
7. *Осипов Ю.С.* О стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1. № 5. С. 605–618.
8. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. Линейные системы. М.: Наука, 1968. 475 с.
9. *Кряжимский А.В., Максимов В.И., Осипов Ю.С.* О позиционном моделировании в динамических системах // Прикл. мат. мех. 1983. Т. 47. № 6. С. 883–890.
10. *Скубачевский А.Л.* К задаче об успокоении системы управления с последействием // ДАН. 1994. Т. 335. № 2. С. 157–160.

THE SECOND BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR DIFFERENTIAL-DIFFERENCE EQUATIONS

A. L. Skubachevskii[a,b] and N. O. Ivanov[a]

[a] *Mathematical Institute of the RUDN University, Moscow, Russian Federation*
[b] *Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*
Presented by Academician of the RAS Yu.S. Osipov

We consider the second boundary value problem for a second order differential-difference equation with variable coefficients on the interval $(0, d)$. It was obtained the necessary and sufficient condition for existence of a generalized solution. It was proved that, if the right-hand side of the equation is orthogonal in $L_2(0,d)$ to some functions, then a generalized solution from the Sobolev space $W_2^1(0,d)$ belongs to the space $W_2^2(0,d)$.

Keywords: differential–difference equations, generalized solutions, boundary value problem