ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 500, с. 78–86

МАТЕМАТИКА

УДК 517+531.01

НОВЫЕ СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ, ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ КОНЕЧНОМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ

 М. В. Шамолин[1,*]

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 26.04.2021 г.
Поступило 27.04.2021 г.
После доработки 05.07.2021 г.
Принято к публикации 08.07.2021 г.

Показана интегрируемость некоторых классов однородных геодезических, потенциальных и диссипативных динамических систем на касательных расслоениях к гладким конечномерным многообразиям. При этом силовые поля приводят к появлению диссипации переменного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Ключевые слова: динамическая система, геодезические, потенциал, интегрируемость, диссипация, трансцендентный первый интеграл

DOI: 10.31857/S2686954321050143

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, изучение интегрируемости автономных систем на конечномерном конфигурационном многообразии M^n приводит к изучению систем порядка $2n$ на касательном расслоении TM^n. При этом ключевым, наряду с геометрией многообразия M^n, является структура присутствующего в системе силового поля. Так, задача о движении n-мерного закрепленного маятника в обобщенном сферическом шарнире в неконсервативном поле сил приводит к динамической системе на касательном расслоении к $(n - 1)$-мерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительными группами симметрий [1, 2]. Системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций [2, 3].

Также хорошо известны и сложны задачи о движении точки по многомерным поверхностям вращения, в пространствах Лобачевского и др. Тем не менее, иногда в системах с диссипацией удается найти полный список первых интегралов, состоящий из трансцендентных (в смысле комплексного анализа) функций, поскольку полный список даже непрерывных в целом автономных первых интегралов найти невозможно. Здесь результаты важны в смысле присутствия именно неконсервативного поля сил.

Вообще, современное состояние рассматриваемых проблем предполагает обширный список литературы. Приведем лишь некоторые из них [4–6].

В данной работе показана интегрируемость классов однородных динамических систем геодезических, потенциальных и диссипативных на касательных расслоениях к гладким конечномерным многообразиям. При этом силовые поля приводят к появлению диссипации переменного знака и обобщают ранее рассмотренные.

1. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

Как известно, в случае n-мерного гладкого риманова многообразия M^n с координатами (α, β), $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$ и аффинной связностью $\Gamma^i_{jk}(\alpha, \beta)$ уравнения геодезических линий на касательном расслоении $TM^n\{\dot\alpha, \dot\beta_1, \ldots, \dot\beta_{n-1}; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\}$, $\alpha = x^1$, $\beta_1 = x^2$, ..., $\beta_{n-1} = x^n$, $x = (x^1, \ldots, x^n)$, имеют следующий вид (дифференцирование берется по натуральному параметру):

[1]*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: shamolin@imec.msu.ru*

$$x^{i\bullet\bullet} + \sum_{j,k=1}^{n} \Gamma^{i}_{jk}(x) x^{j\bullet} x^{k\bullet} = 0, \quad i = 1,\ldots,n. \tag{1}$$

Изучим структуру уравнений (1) при изменении координат на касательном расслоении TM^n. Для этого рассмотрим замену координат касательного пространства:

$$x^{i\bullet} = \sum_{j=1}^{n} R^{ij} z_j, \tag{2}$$

которую можно обратить: $z_j = \sum_{i=1}^{n} T_{ji} x^{i\bullet}$, при этом R^{ij}, T_{ji}, $i, j = 1, \ldots, n$, – функции от x, а также $RT = E$, где $R = (R^{ij})$, $T = (T_{ji})$. Назовем также уравнения (2) новыми кинематическими соотношениями, т.е. линейными соотношениями на касательном расслоении TM^n. Справедливы равенства

$$z_i^{\bullet} = \sum_{j,k=1}^{n} T_{ij,k} x^{j\bullet} x^{k\bullet} - \sum_{j,p,q=1}^{n} T_{ij} \Gamma^{j}_{pq} x^{p\bullet} x^{q\bullet}, \tag{3}$$

где $T_{ji,k} = \dfrac{\partial T_{ji}}{\partial x^k}$, $j, i, k = 1, \ldots, n$, при этом в системе (3) вместо $x^{i\bullet}$, $i = 1, \ldots, n$, надо подставить формулы (2), и правые части составной системы (2), (3) являются однородными формами по квазискоростям $z_1, \ldots, z_n$.

П р е д л о ж е н и е 1. *Система* (1) *в той области, где* $\det R(x) \neq 0$, *эквивалентна составной системе* (2), (3).

Результат перехода от уравнений геодезических (1) к эквивалентной системе (2), (3) зависит как от замены (2) (т.е. вводимых кинематических соотношений), так и от аффинной связности $\Gamma^{i}_{jk}(\alpha, \beta)$.

Рассмотрим далее достаточно общий случай задания кинематических соотношений в следующем виде:

$$\alpha^{\bullet} = z_n f_n(\alpha), \quad \beta_1^{\bullet} = z_{n-1} f_1(\alpha), \quad \beta_2^{\bullet} = z_{n-2} f_2(\alpha) g_1(\beta_1),$$
$$\beta_3^{\bullet} = z_{n-3} f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h_1(\beta_2), \ldots, \tag{4}$$
$$\beta_{n-1}^{\bullet} = z_1 f_{n-1}(\alpha) g_{n-2}(\beta_1) h_{n-3}(\beta_2) \ldots i_1(\beta_{n-2}),$$

где $f_k(\alpha)$, $k = 1, \ldots, n-1$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, \ldots, n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, \ldots, n-3$, ..., $i_1(\beta_{n-2})$ – гладкие функции, не равные тождественно нулю. Такие координаты $z_1, \ldots, z_n$ в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются следующие уравнения геодезических [7, 8] (в частности, на многомерных поверхностях вращения, в пространствах Лобачевского и т.д.) с $n(n-1)+1$ ненулевыми коэффициентами связности (здесь и далее двойной индекс, разделенный запятой, это не дифференцирование, в отличие от формул (3)):

$$\alpha^{\bullet\bullet} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\alpha^{\bullet 2} +$$
$$+ \Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta)\beta_1^{\bullet 2} + \ldots + \Gamma^{\alpha}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\beta_{n-1}^{\bullet 2} = 0,$$
$$\beta_1^{\bullet\bullet} + 2\Gamma^{1}_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\alpha^{\bullet}\beta_1^{\bullet} +$$
$$+ \Gamma^{1}_{22}(\alpha,\beta)\beta_2^{\bullet 2} + \ldots + \Gamma^{1}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\beta_{n-1}^{\bullet 2} = 0,$$
$$\beta_2^{\bullet\bullet} + 2\Gamma^{2}_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\alpha^{\bullet}\beta_2^{\bullet} + 2\Gamma^{2}_{12}(\alpha,\beta)\beta_1^{\bullet}\beta_2^{\bullet} +$$
$$+ \Gamma^{2}_{33}(\alpha,\beta)\beta_3^{\bullet 2} + \ldots + \Gamma^{2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\beta_{n-1}^{\bullet 2} = 0, \tag{5}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\beta_{n-2}^{\bullet\bullet} + 2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta)\alpha^{\bullet}\beta_{n-2}^{\bullet} + 2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta)\beta_1^{\bullet}\beta_{n-2}^{\bullet} + \ldots$$
$$\ldots + 2\Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta)\beta_{n-3}^{\bullet}\beta_{n-2}^{\bullet} + \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\beta_{n-1}^{\bullet 2} = 0,$$
$$\beta_{n-1}^{\bullet\bullet} + 2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)\alpha^{\bullet}\beta_{n-1}^{\bullet} +$$
$$+ 2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)\beta_1^{\bullet}\beta_{n-1}^{\bullet} + \ldots + 2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)\beta_{n-2}^{\bullet}\beta_{n-1}^{\bullet} = 0,$$

и в случае (4) уравнения (3) примут вид

$$z_1^{\bullet} = -f_n(\alpha)[2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta) + Df_{n-1}(\alpha)]z_1 z_n -$$
$$- f_1(\alpha)[2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)]z_1 z_{n-1} -$$
$$- f_2(\alpha)g_1(\beta_1)[2\Gamma^{n-1}_{2,n-1}(\alpha,\beta) + Dh_{n-3}(\beta_2)]z_1 z_{n-2} - \ldots$$
$$\ldots - f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3})[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) +$$
$$+ Di_1(\beta_{n-2})]z_1 z_2,$$
$$z_2^{\bullet} = -f_n(\alpha)[2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta) + Df_{n-2}(\alpha)]z_2 z_n -$$
$$- f_1(\alpha)[2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta) + Dg_{n-3}(\beta_1)]z_2 z_{n-1} - \ldots$$
$$\ldots - f_{n-3}(\alpha)g_{n-4}(\beta_1)h_{n-5}(\beta_2)\ldots s_1(\beta_{n-4})[2\Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta) +$$
$$+ Dr_1(\beta_{n-3})]z_2 z_3 -$$
$$- \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_{n-2}(\alpha)} \frac{g_{n-2}^2(\beta_1)}{g_{n-3}(\beta_1)} \frac{h_{n-3}^2(\beta_2)}{h_{n-4}(\beta_2)} \ldots \frac{r_2^2(\beta_{n-3})}{r_1(\beta_{n-3})} i_1^2(\beta_{n-2}) \times$$
$$\times \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) z_1^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \tag{6}$$
$$z_{n-1}^{\bullet} = -f_n(\alpha)[2\Gamma^{1}_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha)]z_{n-1} z_n -$$
$$- \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1)\Gamma^{1}_{22}(\alpha,\beta) z_{n-2}^2 - \ldots$$
$$\ldots - \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^{1}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) z_1^2,$$
$$z_n^{\bullet} = -f_n(\alpha)[\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + Df_n(\alpha)]z_n^2 -$$
$$- \frac{f_1^2(\alpha)}{f_n(\alpha)} \Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta) z_{n-1}^2 -$$
$$- \frac{f_2^2(\alpha)}{f_n(\alpha)} g_1^2(\beta_1)\Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta) z_{n-2}^2 - \ldots$$
$$\ldots - \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_n(\alpha)} g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^{\alpha}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) z_1^2,$$

$Dj(\gamma) = d\ln|j(\gamma)|/d\gamma$, и уравнения (5) геодезических почти всюду эквивалентны составной системе (4), (6) на многообразии $TM^n\{z_n, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\}$.

Для полного интегрирования системы (4), (6) необходимо знать, вообще говоря, $2n - 1$ независимых первых интегралов. При этом первые интегралы (в частности, и для уравнений геодезических) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее.

Предложение 2. *Если всюду справедлива система* $1 + n(n-1)/2$ *дифференциальных равенств*

$$\begin{gathered}
\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + Df_n(\alpha) \equiv 0, \\
f_n^2(\alpha)[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha)] + f_1^2(\alpha)\Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta) \equiv 0, \ldots, \\
f_n^2(\alpha)[2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta) + Df_{n-1}(\alpha)] + \\
+ f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^{\alpha}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) \equiv 0, \\
f_1^2(\alpha)[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + Dg_1(\beta_1)] + \\
+ f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) \equiv 0, \ldots, \\
f_1^2(\alpha)[2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)] + \\
+ f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) \equiv 0, \ldots, \\
f_{n-2}^2(\alpha)\ldots r_1^2(\beta_{n-3})[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) + Di_1(\beta_{n-2})] + \\
+ f_{n-1}^2(\alpha)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) \equiv 0,
\end{gathered} \tag{7}$$

то система (4), (6) *имеет аналитический первый интеграл вида*

$$\Phi_1(z_n, \ldots, z_1) = z_1^2 + \ldots + z_n^2 = C_1^2 = \mathrm{const}. \tag{8}$$

Примеры. Уравнения (5) геодезических в многомерном пространстве Лобачевского в модели Клейна примут вид

$$\begin{gathered}
\alpha^{\bullet\bullet} - \frac{1}{\alpha}(\alpha^{\bullet 2} - \beta_1^{\bullet 2} - \ldots - \beta_{n-1}^{\bullet 2}) = 0, \\
\beta_k^{\bullet\bullet} - \frac{2}{\alpha}\alpha^{\bullet}\beta_k^{\bullet} = 0, \quad k = 1, \ldots, n-1.
\end{gathered} \tag{9}$$

Можно выписать многопараметрическую систему, эквивалентную уравнениям (9) геодезических и имеющую первый интеграл вида (8). Аналогичными свойствами обладают уравнения геодезических и на многомерных поверхностях вращения.

Система равенств (7) может трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики многообразия к каноническому виду с законом сохранения энергии (8) (или см. ниже (21)) в зависимости от рассматриваемой задачи. История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работы [8, 9]). Поиск же как первого интеграла (8), так и других (см. далее) опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий.

Можно доказать отдельную теорему существования решения $f_k(\alpha)$, $k = 1, \ldots, n-1$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, \ldots, n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, \ldots, n-3, \ldots, i_1(\beta_{n-2})$ системы (7) для наличия аналитического интеграла (8) для исследуемой системы (4), (6) уравнений геодезических. Но в дальнейшем при изучении динамических систем с диссипацией не всегда все условия (7) нам потребуются. Тем не менее, в дальнейшем будем предполагать в уравнениях (4) выполнение условий

$$f_1(\alpha) \equiv \ldots \equiv f_{n-1}(\alpha) = f(\alpha), \tag{10}$$

при этом функции $g_l(\beta_1)$, $l = 1, \ldots, n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, \ldots, n-3, \ldots, i_1(\beta_{n-2})$, вообще говоря, должны удовлетворять $(n-1)(n-2)/2$ преобразованным уравнениям из (7):

$$\begin{gathered}
2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + Dg_1(\beta_1) + g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) \equiv 0, \ldots, \\
2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) + Dg_{n-2}(\beta_1) + \\
+ g_{n-2}^2(\beta_1)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) \equiv 0, \ldots, \\
g_{n-3}^2(\beta_1)\ldots r_1^2(\beta_{n-3})[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) + Di_1(\beta_{n-2})] + \\
+ g_{n-2}^2(\beta_1)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) \equiv 0.
\end{gathered} \tag{11}$$

Таким образом, функции $g_l(\beta_1)$, $l = 1, \ldots, n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, \ldots, n-3, \ldots, i_1(\beta_{n-2})$ зависят от коэффициентов связности, а ограничения на функции $f(\alpha)$, $f_n(\alpha)$ будут даны ниже.

Предложение 3. *Если выполнены свойства* (10), (11), *при этом справедливы равенства*

$$\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) \equiv \ldots \equiv \Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta) = \Gamma_1(\alpha), \tag{12}$$

то система (4), (6) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида:*

$$\begin{gathered}
\Phi_2(z_{n-1}, \ldots, z_1; \alpha) = \\
= \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2}\,\Phi_0(\alpha) = C_2 = \mathrm{const}, \\
\Phi_0(\alpha) = f(\alpha)\exp\left\{2\int_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\}.
\end{gathered} \tag{13}$$

Предложение 4. *Если выполнены условия предложения* 3, *а также*

$$g_1(\beta_1) \equiv \ldots \equiv g_{n-2}(\beta_1) = g(\beta_1), \tag{14}$$

при этом справедливы равенства

$$\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) \equiv \ldots \equiv \Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) = \Gamma_2(\beta_1), \tag{15}$$

то система (4), (6) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида:*

$$\begin{gathered}\Phi_3(z_{n-2},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1) = \\ = \sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2}\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1) = C_3 = \text{const},\end{gathered} \tag{16}$$

$$\Psi_1(\beta_1) = g(\beta_1)\exp\left\{2\int_{\beta_{10}}^{\beta_1}\Gamma_2(b)db\right\}.$$

Далее доказываем по индукции необходимое количество предложений (их всего n) и приходим к следующему утверждению (здесь и далее многоточие в утверждениях и означает n утверждений об n интегралах).

Предложение 5. *Если выполнены условия предложений* 3, 4, ..., *при этом справедливо равенство*

$$\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) = \Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}), \tag{17}$$

то система (4), (6) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида:*

$$\begin{gathered}\Phi_n(z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = \\ = z_1\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\ldots\Psi_{n-2}(\beta_{n-2}) = C_n = \text{const},\end{gathered} \tag{18}$$

$$\Psi_{n-2}(\beta_{n-2}) = i_1(\beta_{n-2})\exp\left\{2\int_{\beta_{n-2,0}}^{\beta_{n-2}}\Gamma_{n-1}(b)db\right\}.$$

Предложение 6. *Если выполнены условия предложений* 3, ..., 5, *то система* (4), (6) *имеет первый интеграл следующего вида:*

$$\begin{gathered}\Phi_{n+1}(\beta_{n-2},\beta_{n-1}) = \\ = \beta_{n-1} \pm \int_{\beta_{n-2,0}}^{\beta_{n-2}}\frac{C_n h(b)}{\sqrt{C_{n-1}^2\Psi_{n-2}^2(b) - C_n^2}}db = C_{n+1} = \text{const},\end{gathered} \tag{19}$$

где, после взятия интеграла (19), *вместо постоянных* C_{n-1}, C_n *можно формально подставить левые части соответствующих равенств.*

Теорема 1. *Если выполнены условия предложений* 2, ..., 5, *то система* (4), (6) *обладает* $n+1$ *независимыми первыми интегралами вида* (8), (13), (16), ..., (18), (19).

То, что полный набор при некоторых условиях состоит из $n+1$, а не из $2n-1$ первых интегралов, будет показано ниже.

2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ

Модифицируем (4), (6), получив систему консервативную: введем гладкое (внешнее) силовое поле в проекциях на оси $z_k^\bullet$, $k = 1, \ldots, n$, соответственно: $F_1(\beta_{n-1})f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)\ldots i_1(\beta_{n-2})$, $F_2(\beta_{n-2})f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)\ldots r_1(\beta_{n-3})$, ..., $F_{n-1}(\beta_1)f_1(\alpha)$, $F_n(\alpha)f_n(\alpha)$. Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^n\{z_n,\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}\}$ примет вид

$$\begin{gathered}\alpha^\bullet = z_n f_n(\alpha),\\ z_n^\bullet = F_n(\alpha)f_n(\alpha) - f_n(\alpha)[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + Df_n(\alpha)]z_n^2 - \\ -\frac{f_1^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)z_{n-1}^2 - \\ -\frac{f_2^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)z_{n-2}^2 - \ldots - \\ -\frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)z_1^2,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}z_{n-1}^\bullet = F_{n-1}(\beta_1)f_1(\alpha) - f_n(\alpha)[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha)]z_{n-1}z_n - \\ -\frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)z_{n-2}^2 - \ldots - \\ -\frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)z_1^2,\end{gathered}$$

....,

$$\begin{gathered}z_2^\bullet = F_2(\beta_{n-2})f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)\ldots r_1(\beta_{n-3}) - \\ - f_n(\alpha)[2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta) + Df_{n-2}(\alpha)]z_2 z_n - \\ -f_1(\alpha)[2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta) + Dg_{n-3}(\beta_1)]z_2 z_{n-1} - \ldots - \\ -f_{n-3}(\alpha)g_{n-4}(\beta_1)h_{n-5}(\beta_2)\ldots s_1(\beta_{n-4})[2\Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta) + \\ + Dr_1(\beta_{n-3})]z_2 z_3 - \\ -\frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_{n-2}(\alpha)}\frac{g_{n-2}^2(\beta_1)}{g_{n-3}(\beta_1)}\frac{h_{n-3}^2(\beta_2)}{h_{n-4}(\beta_2)}\ldots\frac{r_2^2(\beta_{n-3})}{r_1(\beta_{n-3})}\times \\ \times i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)z_1^2,\end{gathered} \tag{20}$$

$$\begin{gathered}z_1^\bullet = F_1(\beta_{n-1})f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)\ldots i_1(\beta_{n-2}) - \\ - f_n(\alpha)[2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta) + Df_{n-1}(\alpha)]z_1 z_n - \\ - f_1(\alpha)[2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)]z_1 z_{n-1} - \\ - f_2(\alpha)g_1(\beta_1)[2\Gamma^{n-1}_{2,n-1}(\alpha,\beta) + Dh_{n-3}(\beta_2)]z_1 z_{n-2} - \\ -\ldots - f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3})\times \\ \times[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) + Di_1(\beta_{n-2})]z_1 z_2,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\beta_1^\bullet = z_{n-1}f_1(\alpha), \quad \beta_2^\bullet = z_{n-2}f_2(\alpha)g_1(\beta_1), \ldots, \\ \beta_{n-1}^\bullet = z_1 f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)h_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1(\beta_{n-2}),\end{gathered}$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$
\begin{gathered}
\alpha^{\bullet\bullet} - F_n(\alpha) f_n^2(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\alpha^{\bullet 2} + \\
+ \Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta)\beta_1^{\bullet 2} + \ldots + \Gamma^{\alpha}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\beta_{n-1}^{\bullet 2} = 0, \\
\beta_1^{\bullet\bullet} - F_{n-1}(\beta_1) f_1^2(\alpha) + 2\Gamma^{1}_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\alpha^{\bullet}\beta_1^{\bullet} + \\
+ \Gamma^{1}_{22}(\alpha,\beta)\beta_2^{\bullet 2} + \ldots + \Gamma^{1}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\beta_{n-1}^{\bullet 2} = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\beta_{n-2}^{\bullet\bullet} - F_2(\beta_{n-2}) f_{n-2}^2(\alpha) g_{n-3}^2(\beta_1)\ldots r_1^2(\beta_{n-3}) + \\
+ 2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta)\alpha^{\bullet}\beta_{n-2}^{\bullet} + 2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta)\beta_1^{\bullet}\beta_{n-2}^{\bullet} + \ldots \\
\ldots + 2\Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta)\beta_{n-3}^{\bullet}\beta_{n-2}^{\bullet} + \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\beta_{n-1}^{\bullet 2} = 0, \\
\beta_{n-1}^{\bullet\bullet} - F_1(\beta_{n-1}) f_{n-1}^2(\alpha) g_{n-2}^2(\beta_1)\ldots i_1^2(\beta_{n-2}) + \\
+ 2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)\alpha^{\bullet}\beta_{n-1}^{\bullet} + \\
+ 2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)\beta_1^{\bullet}\beta_{n-1}^{\bullet} + \ldots + 2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)\beta_{n-2}^{\bullet}\beta_{n-1}^{\bullet} = 0.
\end{gathered}
$$

П р е д л о ж е н и е 7. *Если выполнены условия предложения* 2, *то система* (20) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида:*

$$
\begin{gathered}
\Phi_1(z_n, \ldots, z_1; \alpha, \beta) = \\
= z_1^2 + \ldots + z_n^2 + V(\alpha,\beta) = C_1 = \text{const},
\end{gathered} \tag{21}
$$

$$
\begin{gathered}
V(\alpha,\beta) = V_n(\alpha) + \sum_{k=1}^{n-1} V_{n-k}(\beta_k) = \\
= -2\int_{\alpha_0}^{\alpha} F_n(a)\,da - 2\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\beta_{k0}}^{\beta_k} F_{n-k}(b)\,db.
\end{gathered}
$$

Следующие утверждения справедливы в более общем виде, но мы ограничимся следующим.

П р е д л о ж е н и е 8. *Пусть* $F_{n-k}(\beta_k) \equiv 0$, $k = 1, \ldots, n-1$. *Если выполнены условия предложений* 3, ..., 5, *то система* (20) *имеет* n *гладких первых интеграла вида* (13), (16), ..., (18), (19).

Т е о р е м а 2. *Пусть* $F_{n-k}(\beta_k) \equiv 0$, $k = 1, \ldots, n-1$. *Если выполнены условия предложений* 2, ..., 5, *то система* (20) *обладает* $n + 1$ *независимыми первыми интегралами вида* (21), (13), (16), ..., (18), (19).

То, что полный набор при некоторых условиях состоит из $n + 1$, а не из $2n - 1$ первых интегралов, будет показано ниже.

3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ В СИЛОВОМ ПОЛЕ С ДИССИПАЦИЕЙ

Теперь несколько модифицируем (20) при условиях (10)–(12), (14), (15), ..., (17), а также при $F_{n-k}(\beta_k) \equiv 0$, $k = 1, \ldots, n-1$. При этом получим систему со знакопеременной диссипацией, наличие которой характеризует не только коэффициент $b\delta(\alpha)$, $b > 0$, в первом уравнении (22), но и следующая зависимость (внешнего) силового поля в проекциях на оси $z_k^{\bullet}$, $k = 1, \ldots, n$, соответственно: $z_1 F^1(\alpha), \ldots, z_{n-1} F^1(\alpha), F_n(\alpha) f_n(\alpha) + z_n F_n^1(\alpha)$. Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^n\{z_n, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\}$ примет вид

$$
\begin{gathered}
\alpha^{\bullet} = z_n f_n(\alpha) + b\delta(\alpha), \\
z_n^{\bullet} = F_n(\alpha) f_n(\alpha) - f_n(\alpha)[\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + Df_n(\alpha)] z_n^2 - \\
- \frac{f^2(\alpha)}{f_n(\alpha)} \Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta) z_{n-1}^2 - \\
- \frac{f^2(\alpha)}{f_n(\alpha)} [g^2(\beta_1)\Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta) z_{n-2}^2 + \ldots + \\
+ g^2(\beta_1) h^2(\beta_2)\ldots i^2(\beta_{n-2})\Gamma^{\alpha}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) z_1^2] + z_n F_n^1(\alpha), \\
z_{n-1}^{\bullet} = -f_n(\alpha)[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)] z_{n-1} z_n - \\
- f(\alpha) g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) z_{n-2}^2 - \ldots \\
\ldots - f(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2)\ldots i^2(\beta_{n-2})\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) z_1^2 + \\
+ z_{n-1} F^1(\alpha), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad (22) \\
z_2^{\bullet} = -f_n(\alpha)[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)] z_2 z_n - \\
- f(\alpha)[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)] z_2 z_{n-1} - \ldots \\
\ldots - f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2)\ldots s(\beta_{n-4})[2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3}) + \\
+ Dr(\beta_{n-3})] z_2 z_3 - \\
- f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2)\ldots r(\beta_{n-3}) i^2(\beta_{n-2}) \times \\
\times \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) z_1^2 + z_2 F^1(\alpha), \\
z_1^{\bullet} = -f_n(\alpha)[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)] z_1 z_n - \\
- f(\alpha)[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)] z_1 z_{n-1} - \\
- f(\alpha) g(\beta_1)[2\Gamma_3(\beta_2) + Dh(\beta_2)] z_1 z_{n-2} - \ldots \\
\ldots - f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2)\ldots r(\beta_{n-3}) \times \\
\times [2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + Di(\beta_{n-2})] z_1 z_2 + z_1 F^1(\alpha), \\
\beta_1^{\bullet} = z_{n-1} f(\alpha),\ \beta_2^{\bullet} = z_{n-2} f(\alpha) g(\beta_1), \ldots, \\
\beta_{n-1}^{\bullet} = z_1 f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2)\ldots i(\beta_{n-2}),
\end{gathered}
$$

и она почти всюду эквивалентна системе на вторые производные от α, β, в которой явно выделяется знакопеременная диссипация [2, 3].

Перейдем теперь к интегрированию системы (22) порядка $2n$ при выполнении группы условий (11) и при выполнении равенств

$$
\begin{gathered}
\Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta) g^2(\beta_1) \equiv \ldots \\
\ldots \equiv \Gamma^{\alpha}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2)\ldots = \Gamma_n(\alpha).
\end{gathered}
$$

Пусть при этом функция $f_n(\alpha)$ удовлетворяет первому из группы равенств (7). Введем также (по аналогии с (11)) ограничение и на функцию $f(\alpha)$: она должна удовлетворять следующему преобразованному равенству из (7):

$$f_n^2(\alpha)[2\Gamma_1(\alpha)+Df(\alpha)]+\Gamma_n(\alpha)f^2(\alpha)\equiv 0,$$

и происходит отделение независимой подсистемы порядка $2n-1$:

$$\begin{gathered}
\alpha^{\bullet}=z_n f_n(\alpha)+b\delta(\alpha),\\
z_n^{\bullet}=F_n(\alpha)f_n(\alpha)-\frac{f^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}\times\\
\times\Gamma_n(\alpha)(z_{n-1}^2+\ldots+z_1^2)+z_nF_n^1(\alpha),\\
z_{n-1}^{\bullet}=-f_n(\alpha)[2\Gamma_1(\alpha)+Df(\alpha)]z_{n-1}z_n-\\
-f(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\beta_1)z_{n-2}^2-\ldots\\
\ldots-f(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\ldots i^2(\beta_{n-2})\times\\
\times\Gamma_{n-1,n-1}^1(\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})z_1^2+z_{n-1}F^1(\alpha),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
z_2^{\bullet}=-f_n(\alpha)[2\Gamma_1(\alpha)+Df(\alpha)]z_2z_n-\\
-f(\alpha)[2\Gamma_2(\beta_1)+Dg(\beta_1)]z_2z_{n-1}-\ldots\\
\ldots-f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots s(\beta_{n-4})\times\\
\times[2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3})+Dr(\beta_{n-3})]z_2z_3-\\
-f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots r(\beta_{n-3})i^2(\beta_{n-2})\times\\
\times\Gamma_{n-1,n-1}^{n-2}(\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})z_1^2+z_2F^1(\alpha),\\
z_1^{\bullet}=-f_n(\alpha)[2\Gamma_1(\alpha)+Df(\alpha)]z_1z_n-\\
-f(\alpha)[2\Gamma_2(\beta_1)+Dg(\beta_1)]z_1z_{n-1}-\\
-f(\alpha)g(\beta_1)[2\Gamma_3(\beta_2)+Dh(\beta_2)]z_1z_{n-2}-\ldots\\
\ldots-f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots r(\beta_{n-3})\times\\
\times[2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2})+Di(\beta_{n-2})]z_1z_2+z_1F^1(\alpha),\\
\beta_1^{\bullet}=z_{n-1}f(\alpha),\quad \beta_2^{\bullet}=z_{n-2}f(\alpha)g(\beta_1),\ \ldots,\\
\beta_{n-1}^{\bullet}=z_1f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots i(\beta_{n-2}).
\end{gathered}$$

Для полного интегрирования данной системы необходимо знать, вообще говоря, $2n-1$ независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных $w_1=z_{n-1}/\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2}$, ..., $w_{n-3}=z_3/\sqrt{z_1^2+z_2^2}$, $w_{n-2}=z_2/z_1$, $w_{n-1}=\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2}$, $w_n=z_n$, последняя система распадается следующим образом:

$$\begin{gathered}
\alpha^{\bullet}=w_nf_n(\alpha)+b\delta(\alpha),\\
w_n^{\bullet}=F_n(\alpha)f_n(\alpha)-\frac{f^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}\Gamma_n(\alpha)w_{n-1}^2+w_nF_n^1(\alpha),\qquad (23)\\
w_{n-1}^{\bullet}=\frac{f^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}\Gamma_n(\alpha)w_{n-1}w_n+w_{n-1}F^1(\alpha),
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
w_s^{\bullet}=(\pm)w_{n-1}\sqrt{1+w_s^2}f(\alpha)g(\beta_1)\ldots[2\Gamma_{s+1}(\beta_s)+Dj(\beta_s)],\\
\beta_s^{\bullet}=(\pm)\frac{w_sw_{n-1}}{\sqrt{1+w_s^2}}f(\alpha)g(\beta_1)\ldots,\ s=1,\ldots,n-2,
\end{gathered}\qquad (24)$$

$$\beta_{n-1}^{\bullet}=(\pm)\frac{w_{n-1}}{\sqrt{1+w_{n-2}^2}}f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2)\ldots i(\beta_{n-2}),\qquad (25)$$

где в системе (24) символом «...» показаны одинаковые члены, а функция $j(\beta_s)$ – одна из функций g, h, ..., зависящая от соответствующего угла β_s.

Видно, что для полной интегрируемости системы (23)–(25) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (23), по одному – для систем (24) (меняя в них независимые переменные; таких систем – $n-2$ штуки), и дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (25) (т.е. всего $n+1$).

Будем также предполагать, что для некоторого $\kappa\in\mathbf{R}$ выполнено равенство

$$\frac{f^2(\alpha)}{f_n^2(\alpha)}\Gamma_n(\alpha)=\kappa\frac{d}{d\alpha}\ln|\Delta(\alpha)|,\quad \Delta(\alpha)=\frac{\delta(\alpha)}{f_n(\alpha)},\ (26)$$

а для некоторых $\lambda_n^0,\lambda_k^1\in\mathbf{R}$ выполнены равенства

$$\begin{gathered}
F_n(\alpha)=\lambda_n^0\frac{d}{d\alpha}\frac{\Delta^2(\alpha)}{2},\\
F_k^1(\alpha)=\lambda_k^1f_n(\alpha)\frac{d}{d\alpha}\Delta(\alpha),\quad k=1,\ldots,n.
\end{gathered}\qquad (27)$$

Здесь $F_1^1(\alpha)=\ldots=F_{n-1}^1(\alpha)=F^1(\alpha)$, т.е. $\lambda_1^1=\ldots=\lambda_{n-1}^1=\lambda^1$. Условие (26) назовем “геометрическим”, а условия из группы (27) – “энергетическими”.

Условие (26) названо геометрическим в том числе потому, что накладывает условие на коэффициент связности $\Gamma_n(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции $\Delta(\alpha)$. Условия же группы (27) названы энергетическими в том числе потому, что силы становятся, в некотором смысле, “потенциальными” по отношению к функциям $\Delta^2(\alpha)/2$ и $\Delta(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду (опять же относительно функции $\Delta(\alpha)$). При этом функция $\Delta(\alpha)$ и вводит в систему диссипацию разных знаков.

Т е о р е м а 3. *Пусть выполняются условия* (26) *и* (27). *Тогда система* (23)–(25) *обладает полным набором* ($n+1$) *независимых, вообще говоря, трансцендентных* [10, 11] *первых интегралов.*

В общем случае первые интегралы выписываются громоздко (интегрирование уравнения Абеля [12]). В частности, если $\kappa = -1$, $\lambda_n^1 = \lambda^1$, явный вид ключевого первого интеграла таков:

$$\Theta_1(w_n, w_{n-1}; \alpha) = G_1\left(\frac{w_n}{\Delta(\alpha)}, \frac{w_{n-1}}{\Delta(\alpha)}\right) =$$
$$= \frac{f_n^2(\alpha)(w_n^2 + w_{n-1}^2) + (b - \lambda^1)w_n\delta(\alpha)f_n(\alpha) - \lambda_n^0\delta^2(\alpha)}{w_{n-1}\delta(\alpha)f_n(\alpha)} = \tag{28}$$
$$= C_1.$$

При этом дополнительный первый интеграл системы (23) имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_n, w_{n-1}; \alpha) =$$
$$= G_2\left(\Delta(\alpha), \frac{w_n}{\Delta(\alpha)}, \frac{w_{n-1}}{\Delta(\alpha)}\right) = C_2 = \text{const}. \tag{29}$$

Первые интегралы для систем (24) будут иметь вид

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\Psi_s(\beta_s)} = C_{s+2} = \text{const}, \tag{30}$$
$$s = 1, \ldots, n-2,$$

о функциях $\Psi_s(\beta_s)$, $s = 1, \ldots, n-2$, см. (16), ..., (18). Дополнительный интеграл, “привязывающий” уравнение (25), находится по аналогии с (19):

$$\Theta_{n+1}(\beta_{n-2}, \beta_{n-1}) = \beta_{n-1} \pm$$
$$\pm \int\limits_{\beta_{n-2,0}}^{\beta_{n-2}} \frac{i(b)}{\sqrt{C_n^2\Psi_{n-2}^2(b) - 1}} db = C_{n+1} = \text{const}, \tag{31}$$

при этом после взятия интеграла (31) вместо постоянной C_n можно формально подставить левую часть равенств (30) при $s = n - 2$.

Выражение первых интегралов (28)–(31) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\Delta(\alpha)$. Действительно, при $\kappa = -1$, $\lambda_n^1 = \lambda^1$ дополнительный первый интеграл системы (23) найдется из квадратуры

$$d \ln|\Delta(\alpha)| = \frac{(b + u_n)\, du_4}{2W(u_n) - C_1\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4W(u_n)}\}/2},$$
$$W(u_n) = u_n^2 + (b - \lambda^1)u_n - \lambda_n^0, \quad u_n = \frac{w_n}{\Delta(\alpha)}.$$

При этом после интегрирования вместо C_1 можно подставить левую часть (28). Правая часть данной квадратуры выражается через конечную комбинацию элементарных функций, а левая — в зависимости о функции $\Delta(\alpha)$.

Справедлива и теорема, в некотором смысле обратная к теореме 3.

Т е о р е м а 4. *Условия* (26), (27) (*например, при* $\kappa = -1$, $\lambda_n^1 = \lambda^1$) *являются необходимыми условиями существования ключевого первого интеграла* (28) *для системы* (23)–(25).

4. СТРУКТУРА ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ ДЛЯ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ

Если α — периодическая координата периода 2π, то система (23)–(25) в условиях теоремы 3 становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним [2, 13]. При этом при $b = -\lambda^1$ она превращается в систему консервативную, которая обладает следующими гладкими первыми интегралами:

$$\Phi_1(-b; w_n, w_{n-1}; \alpha) =$$
$$= w_{n-1}^2 + w_n^2 + 2bw_n\Delta(\alpha) - \lambda_n^0\Delta^2(\alpha) = \text{const}, \tag{32}$$

$$\Phi_2(w_{n-1}; \alpha) = w_{n-1}\Delta(\alpha) = \text{const}. \tag{33}$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (32), (33) также является первым интегралом системы (23)–(25) при $b = -\lambda^1$. Но при $b \neq -\lambda^1$ каждая из функций

$$\Phi_1(\lambda^1; w_n, w_{n-1}; \alpha) =$$
$$= w_{n-1}^2 + w_n^2 + (b - \lambda^1)w_n\Delta(\alpha) - \lambda_n^0\Delta^2(\alpha) \tag{34}$$

и (33) по отдельности не является первым интегралом системы (23)–(25). Однако отношение функций (34), (33) является первым интегралом системы (23)–(25) (при $\kappa = -1$, $\lambda_n^1 = \lambda^1$) при любом b.

Как отмечалось, для систем любого порядка с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств [14, 15].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ: СИСТЕМЫ НА РАССЛОЕНИИ К КОНЕЧНОМЕРНОЙ СФЕРЕ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Выше уже были выделены в качестве примеров два класса многообразий (многомерные поверхности вращения и пространства Лобачевского), для которых применима предлагаемая методика интегрирования систем с диссипацией. Теперь отметим однопараметрическое семейство функций $f(\alpha)$ и $f_n(\alpha)$, определяющей метрику на конечномерной сфере:

$$f(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sqrt{1+\mu_1\sin^2\alpha}},$$
$$\mu_1 \in \mathbf{R}, \quad f_n(\alpha) \equiv -1,$$

при этом выделим два существенных подслучая:

$$\mu_1 = 0, \tag{35}$$

$$\mu_1 = -1. \tag{36}$$

Случай (35) формирует класс систем, соответствующих движению динамически симметричного $(n+1)$-мерного твердого тела на нулевых уровнях циклических интегралов, вообще говоря, в неконсервативном поле сил, при дополнительной зависимости силового поля от (тензора второго ранга) угловой скорости [2, 13]. Случай (36) формирует класс систем, соответствующих движению точки на n-мерной сфере с естественной метрикой, индуцированной метрикой всеобъемлющего $(n+1)$-мерного евклидова пространства. В частности, при $\delta(\alpha) = F_n(\alpha) \equiv 0$ рассматриваемая система описывает геодезический поток на n-мерной сфере. В случае (35) если $\delta(\alpha) = F_n(\alpha)f_n(\alpha)/\cos\alpha$, то система описывает движение $(n+1)$-мерного твердого тела в силовом поле $F_n(\alpha)f_n(\alpha)$ под действием следящей силы [2, 3]. В частности, если $F_n(\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha$, $\delta(\alpha) = \sin\alpha$, то система описывает обобщенный сферический маятник, помещенный в поток набегающей среды в $(n+1)$-ном пространстве, и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций [2, 3, 13, 14].

Если функция $\delta(\alpha)$ не является периодической, то рассматриваемая диссипативная система является системой с переменной диссипацией с ненулевым средним (т.е. она является собственно диссипативной). Тем не менее, и в этом случае (благодаря теоремам 3 и 4) можно получить явный вид трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Последнее также определяет новые нетривиальные случаи интегрируемости динамических систем с диссипацией на касательном расслоении гладкого конечномерного многообразия в явном виде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шамолин М.В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук. 1998. Т. 53. Вып. 3. С. 209–210.
2. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере // ДАН. 2017. Т. 474. № 2. С. 177–181.
3. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия // ДАН. 2018. Т. 482. № 5. С. 527–533.
4. *Козлов В.В.* Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. 2019. Т. 74. Вып. 1. С. 117–148.
5. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Современные методы теории интегрируемых систем. М.–Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2003. 294 с.
6. *Новиков С.П., Тайманов И.А.* Современные геометрические структуры и поля. М.: МЦНМО, 2005. 584 с.
7. *Козлов В.В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем // Прикл. матем. и механ. 2015. Т. 79. № 3. С. 307–316.
8. *Клейн Ф.* Неевклидова геометрия. Пер. с нем. 4-е изд., испр., обновл. М.: URSS, 2017. 352 с.
9. *Вейль Г.* Симметрия. М.: URSS, 2007.
10. *Козлов В.В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи матем. наук. 1983. Т. 38. Вып. 1. С. 3–67.
11. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.–Л.: ОГИЗ, 1947.
12. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.
13. *Трофимов В.В., Шамолин М.В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундам. и прикл. матем. 2010. Т. 16. В. 4. С. 3–229.
14. *Шамолин М.В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 495. № 1. С. 84–90.
15. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1987.

NEW CASES OF INTEGRABILITY OF SYSTEMS OF GEODESICS, POTENTIAL, AND DISSIPATIVE ONES ON THE TANGENT BUNDLES OF FINITE-DIMENSIONAL MANIFOLDS

M. V. Shamolin[a]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

The integrability of certain classes of homogeneous geodesic, potential, and dissipative dynamical systems is shown on the tangent bundles to finite-dimensional manifolds. In this case, the force fields have the so-called variable dissipation and generalize the previously considered fields.

Keywords: dynamical system, geodesics, potential, integrability, dissipation, transcendental first integral