ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 500, с. 67–73

МАТЕМАТИКА

УДК 531.19

СУЩЕСТВОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ВЛАСОВА С МОДИФИЦИРОВАННЫМ ГРАВИТАЦИОННЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

© 2021 г. Т. В. Сальникова[1,*]

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 28.04.2021 г.
Поступило 28.04.2021 г.
После доработки 12.07.2021 г.
Принято к публикации 18.08.2021 г.

Рассмотрена система взаимно гравитирующих частиц с возможными столкновениями, которые мы моделируем путем добавления к гравитационному потенциалу потенциала отталкивающих сил типа межмолекулярных сил Леннарда-Джонса. При бесконечном числе частиц функция плотности распределения вероятности определяется кинетическим уравнением Власова с модифицированным гравитационным потенциалом. С помощью метода энергии–Казимира доказывается существование большого класса нелинейно устойчивых равновесных решений этого уравнения.

Ключевые слова: метод энергии–Казимира, нелинейная устойчивость, потенциал типа Леннарда-Джонса

DOI: 10.31857/S2686954321050131

ВВЕДЕНИЕ

Уравнения типа Власова содержат в себе решения задачи N тел для любого N. Это свойство делает их сверхфундаментальными. Уравнение Власова имеет микроскопические решения, соответствующие точным решениям классической механики. Это свойство используется и при выводе из цепочки Боголюбова, и при аппроксимации непрерывного решения с помощью этих микроскопических решений в виде суммы дельта-функций. Тот факт, что уравнение Власова имеет микроскопические решения, полезен для обоснования метода частиц в численных расчетах. Под уравнением Власова понимается обычно следующее уравнение для произвольного потенциала $K(x, y)$ парного взаимодействия частиц:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \left(v, \frac{\partial F}{\partial x}\right) - \left(\nabla_x \int K(x,y)F(t,v,y)dvdy, \frac{\partial F}{\partial v}\right) = 0.$$

Рассмотрим подстановку

$$F(t,v,x) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \delta(v - V_i(t))\delta(x - X_i(t)).$$

Здесь $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, $X_i(t)$ и $Y_i(t)$ – функции времени, координат и скоростей частиц, $\rho_i > 0$ – числа (веса частиц). Такая подстановка проходит, если X_i и Y_i удовлетворяют уравнениям движения N тел:

$$\dot{X}_i = V_i,$$

$$\dot{Y}_i = -\sum_{j=1}^{N} \nabla_1 K(X_i, X_j)\rho_j,$$

где ∇_1 – вектор градиента по первому аргументу. Такие решения называются микроскопическими – либо подстановкой в виде конечного числа частиц, либо подстановкой в виде суммы дельта-функций [1–4]. Уравнения гидродинамического типа получают из системы кинетических уравнений, последовательно интегрируя и вводя моменты:

плотность частиц

$$\rho = \int f(t,x,v)d^3v,$$

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: tatiana.salnikova@gmail.com*

математическое ожидание импульса или средний импульс

$$P_i(x,t) = \frac{1}{\rho}\int v_i f(t,x,v)d^3v,$$

дисперсия по импульсам, которая пропорциональна энергии хаотического движения

$$D = \frac{1}{\rho}\int (v-P)^2 f(t,x,v)d^3v.$$

Пусть $U = U(t,x)$ – гравитационный потенциал, $t \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}^3$. Для произвольной точки $m(x,v)$:

$$\dot{x} = v, \quad \dot{y} = -\partial_x U(t,x). \tag{1}$$

Для описания эволюции всего ансамбля точек введем функцию плотности $f = f(t,x,v) \geq 0$ на фазовом пространстве $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$, $\int\int f(t,x,v)dvdx = M$. Если столкновениями частиц можно пренебречь, то функция f постоянна вдоль решений уравнений (1) и удовлетворяет закону сохранения первого порядка на фазовом пространстве, характеристической системой которого являются уравнения движения (1) одиночной пробной частицы:

$$\partial_t f + v\partial_x f - \partial_x U \partial_v f = 0. \tag{2}$$

Пространственная плотность массы $\rho = \rho(t,x)$, индуцированная f, определяет гравитационный потенциал U с обычным граничным условием на пространственной бесконечности:

$$\Delta U = 4\pi\rho, \quad \lim_{|x|\to\infty} U(t,x) = 0, \tag{3}$$

$$\rho(t,x) = \int f(t,x,v)dv. \tag{4}$$

Тогда (2)–(4) – уравнения Власова–Пуассона, замкнутая нелинейная система уравнений в частных производных, определяющая временную эволюцию самогравитирующего бесстолкновительного ансамбля частиц. Помимо нелинейности, особая математическая сложностьэтой системы заключается в том, что уравнение в фазовом пространстве связано с уравнением в конфигурационном пространстве. Уравнение (2) легко дает априорные оценки L_p-норм функции $f(t)$ для любых $p \in [1,\infty)$, но после интегрирования по v сохраняется только L_1-оценка на $\rho(t)$, что не дает хорошей оценки для $\partial_x U$. Важное предположение состоит в том, что ансамбль частиц достаточно велик, чтобы обосновать описание гладкой функцией плотности на фазовом пространстве, и что столкновения достаточно редки, чтобы ими можно было пренебречь. Если же нужно учитывать столкновения, то оператор столкновений Больцмана заменяет нуль в правой части уравнения Власова (2). Функция плотности распределения вероятности определяется системой уравнений Власова–Больцмана–Пуассона [5].

В математических моделях столкновения между частицами можно описывать различными способами. Можно использовать теорию неупругого удара твердых тел с коэффициентом восстановления Ньютона для относительной скорости отскакивающих частиц. При компьютерном моделировании основная трудность этого подхода состоит в отслеживаниии уточнении громадного числа моментов времени соударений частиц. Другая математическая модель, предложенная в [6], состоит в добавлении к гравитационному потенциалу потенциала отталкивающих сил типа межмолекулярных сил типа Леннарда-Джонса. Численные эксперименты показали, что при выполнении условия устойчивости по Якоби обе модели приводят к качественно идентичному характеру эволюции системы, с образованием устойчивых конфигураций. В настоящем исследовании обсуждается кинетическое уравнение Власова с модифицированным гравитационным потенциалом – потенциалом типа Леннарда-Джонса, который обеспечит "сглаженное" контактное взаимодействие системы взаимно гравитирующих частиц. К гравитационному потенциалу добавляется потенциал силы отталкивания, позволяющий учитывать размеры частиц и избегать сингулярностей, характерных для гравитационного потенциала. Для частиц, например, однородных шаров с массами m_i, m_j, центры которых находятся на расстоянии r, потенциал типа Леннарда-Джонса имеет вид

$$V(r) = -\frac{\gamma m_i m_j}{r} + \frac{k}{r^\alpha}, \quad \alpha > 1,$$

где γ – гравитационная постоянная, коэффициент k можно выбрать из условия, чтобы на расстоянии, равном сумме радиусов шаров, силы притяжения и отталкивания равнялись по величине. Показатель степени $\alpha \in (1,2)$. Несложно получить из теоремы об изменении момента инерции системы, с помощью формулы Эйлера для однородных функций, что для потенциала вида r^{-2} не выполняется необходимое условие устойчивости Якоби.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Мы собираемся доказывать существование и нелинейную устойчивость стационарных состояний предлагаемой динамической модели с модифицированным гравитационным потенциалом. При этом, в отличие от множества работ по этой теме для гравитационных и электромагнитных взаимодействий частиц, в нашей системе не присутствует уравнение Пуассона. Эволюция системы взаимно гравитирующих частиц со “сглаженными” столкновениями подчиняется уравнению Власова (2), где $t \in \mathbf{R}$ – время, $x \in \mathbf{R}^3$ – положения частиц, $v \in \mathbf{R}^3$ – скорости частиц,

$$\rho(t,x) = \int f(t,x,v)dv$$

есть пространственная плотность вероятности – некоторое обобщение принятого в случае гравитационного взаимодействия определения массы частиц. Модифицированный гравитационный потенциал запишем в следующем виде:

$$U(r) = -\frac{1}{r} + \frac{1}{r^{\alpha}}, \quad \alpha \in (1,2).$$

Целью работы является доказательство динамической устойчивости системы вследствие получения устойчивых состояний как минимизирующих решений функционала энергии–Казимира.

1. Метод функционалов энергии–Казимира

В развитие метода А.М. Ляпунова исследования нелинейной устойчивости равновесных решений, В.И. Арнольд предложил в [7, 8] для гамильтоновых систем с гамильтонианом H и с дополнительными коммутирующими интегралами C исследовать $(H + C)$, выбирая функцию Казимира C так, чтобы функция $(H + C)$ имела критическую точку на стационарном решении. В.И. Арнольд использовал свойства выпуклости $(H + C)$, чтобы найти явную норму и априорные оценки, необходимые для ограничения конечных отклонений от состояния равновесия. Эти оценки позволяют доказать нелинейную устойчивость, тогда как обычно используемые вторая вариация или спектральные аргументы доказывают только линеаризованную устойчивость [9]. Заметим, кстати, что для системы $\dot{x} = v(x), x \in D \subset \mathbf{R}^n$ с первыми интегралами известна теорема Рауса о том, что точки строгого локального минимума или максимума одного интеграла на фиксированных уровнях остальных интегралов определяют устойчивые стационарные движения системы.

Итак, отправной точкой настоящего исследования является общий метод утверждения нелинейной устойчивости для бесконечномерных гамильтоновых систем, представленный в [8]. Строгое применение этого метода к системам Власова–Пуассона в различных ситуациях представлено в многочисленных работах Герхарда Рейна, в том числе с соавторами (Яном Го и др.) [5, 10–13]. Ключевое отличие рассматриваемой задачи состоит в том, что для модифицированного потенциала с параметром $\alpha \in (1,2)$ отсутствует уравнение Пуассона. Так что наша стратегия доказательства существования нелинейно устойчивых стационарных состояний будет следующей. Соответствующий уравнению Власова для задачи с модифицированным гравитационным потенциалом фазовый поток уравнений характеристик сохраняет фазовый объем. Тогда для любой разумно выбранной функции Φ так называемый функционал Казимира

$$C(f) = \iint \Phi(f(x,v))dvdx$$

будет также сохраняться. Гамильтониан $\mathcal{H} = E_{kin}(f) + E_{pot}(f)$ не имеет критических точек, если брать в качестве пространства состояний пространство всех плотностей фазового пространства f, то линейная часть продолжения в окрестности некоторого устойчивого состояния f_0 с потенциалом U_0 не исчезает, однако для функционала энергии–Казимира

$$\mathcal{H}_C = \mathcal{H} + C$$

соответствующие устойчивые состояния есть критические точки. (Критические точки гамильтониана, ограниченного на многообразие, которое определяется связью $C(f) = C(f_0)$.) Вместо анализа устойчивости некоторого состояния мы будем исследовать функционал Φ – будет ли этот функционал достигать минимума на подходящем множестве состояний f. Такой минимизатор, если существует, является критической точкой функционала $\mathcal{H}_C$, следовательно, это должно быть устойчивым состоянием. Его минимизирующее свойство приводит к утверждению устойчивости.

В этом исследовании есть два подхода – две различные вариационные задачи, определяемые ролью функционала Казимира.

Первая – доказать, что функционал $\mathcal{H}_C$ имеет минимизирующую плотность $f_0 \in \mathcal{F}_M$, такую, что

$$\mathcal{H}_C(f) \geq \mathcal{H}_C(f_0)$$

для всех $f \in \mathcal{F}_M$, где ограничивающее множество есть

$$\mathcal{F}_M = \Big\{ f \in L^1_+(\mathbf{R}^6) / \iint f(t,x,v)dvdx = M, \\ E_{kin}(f) + C(f) < \infty \Big\}.$$

Вторая вариационная задача – доказать, что функционал $\mathcal{H}$ имеет минимизирующую функцию $f_0 \in \mathcal{F}_{MC}$, где ограничивающее множество определено как

$$\mathcal{F}_{MC} = \Big\{ f \in L^1_+(\mathbf{R}^6) / \iint f(t,x,v)dvdx + C(f) = M, \\ E_{kin}(f) < \infty \Big\}.$$

Во всех случаях параметр $M > 0$ — это заданное положительное число. В первой задаче функционал Казимира является частью функционала, который нужно минимизировать, а во второй вариационной задаче – это часть ограничения [5]. Мы обратимся ко второй вариационной задаче.

1.1. Вторая вариационная задача

В нашей модели уравнение Власова, описывающее эволюцию функции фазовой плотности $f(x,v,t)$ частиц, взаимодействующих с модифицированным трехмерным гравитационным потенциалом типа Леннарда-Джонса, имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\nabla_x f - \nabla_x U \nabla_v f = 0,$$

$$U(x) = -\int \frac{\rho(y)}{|x-y|}dy + \int \frac{\rho(y)}{|x-y|^{\alpha}}dy,$$

$$\rho(x,t) = \int f(t,x,v)dv.$$

Сохраняющаяся полная энергия системы $\mathcal{H}$ содержит слагаемые разных знаков. Очевидная трудность состоит в том, чтобы контролировать формы энергии по отдельности. С этой целью можно интерполировать потенциальную энергию из кинетической энергии и из пространства Лебега L_p, сохранение которого обеспечивается инвариантностью функционалов Казимира, т.е. потенциальная энергия может контролироваться интерполяцией между инвариантами системы и кинетической энергией, со степенью кинетической энергии строго меньше единицы. Для гравитационного потенциала степень равна 1/2, трехмерная система Власова–Пуассона является докритической. (По аналогии с дисперсионными уравнениями в частных производных, в случае такого уравнения, в котором гамильтониан состоит из двух членов противоположного знака, которые могут расходиться при балансировке, говорят об уравнении фокусировки; и когда такой контроль над потенциальной энергией может быть установлен, это называется докритическим уравнением. Когда такой контроль возможен, но со степенью потенциальной энергии, равной единице, говорят о критическом уравнении. Когда такое управление возможно только при мощности, строго превышающей 1, говорят о сверхкритических уравнениях, для которых обычно ожидается явления взрыва с течением времени) [14].

Задача Коши для системы Власова–Пуассона хорошо изучена. После множества предварительных результатов в 1989 г. независимо и почти одновременно были даны два разных доказательства глобального существования классических решений для общих данных, одно К. Пфаффельмозером, а другое П.-Л. Лайонсом и Б. Пертхэмом. В отличие от задачи N тел глобальное существование получается как для случая отталкивания, так и для случая притяжения. В первом случае полная энергия положительно определена, а во втором – неопределенная, однако при этом одни и те же априорные оценки могут быть получены в обоих случаях.

В рассматриваемой нами системе с потенциалом типа Леннарда-Джонса к отрицательному члену гравитационного потенциала добавился положительный, со степенью α в знаменателе: $\alpha \in (1,2)$, так что потенциальная энергия имеет вид

$$E_{pot} = -\int\int \frac{\rho(x)\rho(y)}{|x-y|}dxdy + \\ +\int\int \frac{\rho(x)\rho(y)}{|x-y|^{\alpha}}dxdy = E_g + E_{\alpha}.$$

В дополнение к известным оценкам для гравитационной части потенциальной энергии нам необходимо получить аналогичные оценки для различных значений параметра α. Воспользуемся неравенством Соболева оценки для сверток в L_p. Пусть $0 < \lambda < n$, и пусть $f \in L_p(\mathbf{R}^n); h \in L^r(\mathbf{R}^n)$, где

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{r} + \frac{\lambda}{n} = 2, \quad p > 1, \quad r < \infty.$$

Тогда

$$\int\int \frac{|f(x)||f(y)|}{|x-y|^{\lambda}} d^n x d^n y \le C_{p,r,\lambda,n} \|f\|_p \|h\|_r.$$

Доказательство следует из неравенства Юнга и интерполяционной теоремы Марцинкевича [15].

Пусть $\lambda = 1$: $\frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \frac{1}{3} = 2$ $(n = 3)$, следовательно, $p = 6/5$, и мы получаем известную ранее оценку для гравитационного потенциала

$$|E_g| \le C\|\rho\|^2_{6/5}.$$

Пусть $\lambda = 2$: $\frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \frac{2}{3} = 2$ $(n = 3)$, следовательно, $p = 3/2$, и мы получаем оценку для потенциала

$$|E_2| \le C\|\rho\|^2_{3/2}.$$

Пусть $\lambda = \alpha$: $\frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \frac{\alpha}{3} = 2$ $(n = 3)$, следовательно, $p = 6/(6-\alpha)$, и мы получаем оценку для потенциала

$$|E_{\alpha}| \le C\|\rho\|^2_{6/(6-\alpha)}.$$

Например, для $\alpha = 6/5, p = 5/4$, для $\alpha = 3/2$, $p = 4/3$.

Чтобы знать о достаточной регулярности осредненного силового поля и иметь возможность определять характеристические кривые для соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнений характеристик, надо знать зависимость от функции плотности распределения для больших скоростей. Пространственная плотность ограничена в соответствующей норме кинетической энергией

$$E_{kin}(f) := \int |v|^2 f(x,v)dvdx,$$

так как E_{kin} является моментом второго порядка по скорости от f, а ρ_f — моментом нулевого порядка. Для $p \in [1,\infty)$ известна оценка целостности пространственной плотности [5, 14]. Применяя эту формулу для различных значений параметра $\alpha \in (1,2)$, мы получим для нашей модели для $\|\rho\|_p$ оценку кинетической энергией в соответствующей степени и далее оценку потенциальной энергии. В частности, для приведенных выше оценок для $\alpha = 1, 6/5, 3/2, 2$, имеем следующие неравенства:

$$\alpha = 1, \quad |E_g| \le C\|\rho\|_{6/5}^2 \le \tilde{C}E_{kin}(f)^{1/2}$$

есть известная ранее оценка для гравитационного потенциала;

$$\alpha = 6/5, \quad |E_\alpha| \le C\|\rho\|_{5/4}^2 \le \tilde{C}E_{kin}(f)^{3/5},$$

$$\alpha = 3/2, \quad |E_\alpha| \le C\|\rho\|_{4/3}^2 \le \tilde{C}E_{kin}(f)^{3/4},$$

$$\alpha = 2, \quad |E_2| \le C\|\rho\|_{3/2}^2 \le \tilde{C}E_{kin}(f).$$

Последняя оценка приведена для полноты картины, мы не рассматриваем $\alpha = 2$ в рамках нашей модели.

2. Динамическая устойчивость

Динамическая переменная — плотность $f(t,x,v)$ в фазовом пространстве — индуцирует пространственную плотность $\rho(t,x)$. Любой минимизатор f_0 функционала $\mathcal{H}$ на множестве $\mathcal{F}_{MC}$ будет устойчивым по Ляпунову стационарным состоянием:

$$f_{in} \ge 0, \quad f_{in} \in L_1 \cap L_\infty(\mathbf{R}^6);$$
$$\mathcal{D}(f_{in}, f_0) := \|(f_{in} - f_0\|_{L_1(\mathbf{R}^6)} + |\mathcal{H}(f_{in}) - \mathcal{H}(f_0)| \le \delta$$
$$\Rightarrow \quad \forall t \ge 0, \quad \mathcal{D}(f_t, f_0) \le \varepsilon$$

(Если $f_0(\cdot - z(t), \cdot)$, то говорят об орбитальной устойчивости.)

Для стационарных решений $f_0(x,v) = \varphi(E) = \varphi(E(x,v))$ — изотропное установившееся состояние. Простейший пример функции, удовлетворяющей свойствам компактности, это политропные модели: $f_0(x,v) = (E_0 - E)_+^k$, где $(\cdot)_+$ обозначает положительную часть, $E = v^2/2 + U_0(x)$ — энергия частицы, сохраняющаяся вдоль характеристик уравнения Власова, $E_0 \in \mathbf{R}$ — некоторая отрицательная константа (далее — множитель Лагранжа), $-1/2 < k < 7/2$ [10]. Для политропных моделей ассоциированное пространственное распределение такое же, как для самогравитирующего газа, что подтверждает закон давления политропных газов. Решение имеет компактный носитель и конечную массу — необходимое ограничение для стационарных состояний. Случай $k > 7/2$ приводит к решениям с бесконечно малой массой и с некомпактным носителем. В предельном случае $k = 7/2$ (сфера Пламмера) масса конечна, но некомпактный носитель [14].

Для функционала Казимира конкретизируем условия, накладываемые на функцию Φ. Строго выпуклая функция $\Phi \in C^1([0;\infty)), \Phi(0) = 0 = \Phi'(0)$; $\Phi(f) \ge Cf^{1+1/k}$ для больших $f \ge 0$, при $0 < k < 7/2$.

Ключевой момент настоящего исследования — это доказательство существования минимизатора функционала энергии на ограничивающем множестве, определенном заданными константами.

3. Теорема о существовании минимизатора

Т е о р е м а. *Пусть функция $\Phi(f)$ удовлетворяет перечисленным выше условиям. Тогда функционал энергии $\mathcal{H}$ ограничен снизу на множестве $\mathcal{F}_{MC}$ с $h_M := \inf_{\mathcal{F}_{MC}}(\mathcal{H}) < 0$. Пусть $(f_j) \subset \mathcal{F}_{MC}$ — минимизирующая последовательность функционала $\mathcal{H}$, такая что $\mathcal{H}(f_j) \to h_{MC}$. Тогда существует функция $f_0 \in \mathcal{F}_{MC}$, подпоследовательность $(\tilde{f}_j)$ и последовательность сдвигов векторов $(a_j) \subset \mathbf{R}^3$), так что*

$\mathcal{T}^{a_j}\tilde{f}_j := \tilde{f}_j(\cdot - a_j, \cdot)$ слабо сходится к f_0 в $L^{1+1/k}(\mathbf{R}^6)$, при $j \to \infty$,

$\mathcal{T}^{a_j}\Delta U_{\tilde{f}_j} = \Delta U_{\tilde{f}_j}(\cdot - a_j, \cdot)$ сильно сходится к ΔU_{f_0} в $L^2(\mathbf{R}^3)$, при $j \to \infty$, а f_0 является минимизатором функционала энергии: $\mathcal{H}(f_0) = h_{MC}$.

Доказательство теоремы для нашего случая модифицированного гравитационного потенциала существенно опирается на работы для гравитационного потенциала [5, 10, 12]. Для добавленного потенциала сил отталкивания с параметром α при поверке условий соответствующих лемм используются полученные нами выше оценочные неравенства.

Перечислим основные моменты доказательства. Существует отрицательная нижняя граница функционала энергии. Тогда существующая минимизирующая последовательность ограничена в $L^{1+1/k}$. Значит, существует слабо сходящаяся подпоследовательность, и ее слабый предел – это кандидат в минимизатор f_0. Тогда нам нужно перейти к пределу во всех трех частях функционала энергии. Для кинетической энергии это сделать легко, используя выпуклость Φ и лемму Мазура. Основная трудность в потенциальной энергии, для которой нужно доказать, что индуцированные силовые поля сильно сходятся в L^2. А так как они не зависят напрямую от f, а только от индуцированной пространственной плотности ρ_f, то есть необходимость перейти к редуцированному потенциалу, который определяется на подходящем наборе пространственных плотностей. Поэтому вопрос о существовании минимизатора переносится в приведенную вариационную задачу в терминах пространственных плотностей. Такой подход описан в работах [5, 12, 13]. Потенциальная энергия ограничена для состояний на ограниченном множестве, где убирается зависимость от скоростей. Чтобы доказать, что силовые поля, индуцированные минимизирующими последовательностями, сильно сходятся, т.е. выполняется свойство компактности, нужно, чтобы последовательности ρ_j были сконцентрированы. Это проверяется при оценках поведения системы при изменении масштаба. Далее доказывается, что минимизирующие последовательности не исчезают и что не исчезающие слабо сходящиеся минимизирующие последовательности остаются сконцентрированными. Следовательно, силовые поля сильно сходятся, и существование минимизатора доказано. Теоремы о том, что минимизаторы являются равновесными решениями, и об их динамической устойчивости приведены в [5].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе доказано существование устойчивых по Ляпунову равновесных решений уравнения Власова, описывающего эволюцию функции фазовой плотности системы взаимно гравитирующих частиц с возможными столкновениями. Вместо анализа устойчивости какого-то конкретного равновесного состояния исследуется функционал функции фазовой плотности – достигнет ли этот функционал минимума на подходящем наборе состояний f. Такой минимизатор, если он существует, является критической точкой функционала энергии, а его свойство минимизации приводит к утверждению устойчивости.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарит Герхарда Рейна за полезное обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Власов А.А.* Статистические функции распределения. М.: Наука, 1966. 356 с.
2. *Веденяпин В.В.* Кинетические уравнения Больцмана и Власова. М.: Физматлит, 2001.
3. *Козлов В.В.* Обобщенное кинетическое уравнение Власова // УМН. 2008. Т. 63. № 4 С. 93–130.
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика Т. 10. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979.
5. *Rein G.* Collisionless Kinetic Equations from Astrophysics : The Vlasov-Poisson System Dafermos, Constantine M.; Feireisl, E. (Hrsg.): Handbook of Differential Equations : Evolutionary Equations. V. 3 Amsterdam: Elsevier, 2007. P. 383–476.
6. *Сальникова Т.В., Кугушев Е.И., Степанов С.Я.* Устойчивость по Якоби системы многих тел с модифицированным потенциалом // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 491. С. 90–91.
7. *Arnold V.I.* Conditions for nonlinear stability of the stationary plane curvilinear flows of an ideal fluid // Doklady Mat. Nauk. 1969a. V. 162. № 5. P. 773–777.
8. *Arnold V.I.* Variational principle for three dimensional steady-state flows of an ideal fluid // J. AppI. Math. Mech. 1965b. V. 29. P. 1002–1008.
9. *Holm D. D., Marsden J. E., RatiuT., A. Weinstein A.* Nonlinear stability of fluid and plasma equilibria // Physics Reports. 1985. V. 123. Nos. 1 and 2. P. 1–116.
10. *Guo Y., Rein G.* Isotropic steady states in galactic dynamics // Comm. Math. Phys. 2001. V. 219. P. 607–629.
11. *Guo Y., Rein G.* Stable models of elliptical galaxies // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2003. V. 344. P. 1396–1406.
12. *Rein G.* Reduction and a concentration-compactness principle for energy- Casimir functionals // SIAM J. Math. Anal. 2002. V. 33. P. 896–912.
13. *Firt R., Rein G.* Stability of disk-like galaxies: Part I: Stability via reduction in Analysis. 2007. V. 26. Iss. 4. P. 507–525
14. *Mouhot C.* Stabilité orbitale pour le système de Vlasov–Poisson gravitationnel. arXiv:1201.2275v2 math.AP.
15. *Marcinkiewicz J.* Sur l'interpolation d'opérations // C. R. Acad. Sc. Paris. T. 208. 1939. P. 1272–1273. | JFM 65.0506.03 | Zbl 0021.01601

EXISTENCE AND STABILITY OF EQUILIBRIUM SOLUTIONS OF THE VLASOV EQUATION WITH A MODIFIED GRAVITATIONAL POTENTIAL

T. V. Salnikova[a]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

We consider a system of mutually gravitating particles with possible collisions, which we simulate by adding to the gravitational potential the potential of repulsive forces similarly such as Lennard-Jones intermolecular forces. For an infinite number of particles, the probability density function is determined by the Vlasov kinetic equation with a modified gravitational potential. Using the energy-Casimir method, the existence of a large class of nonlinearly stable equilibrium solutions of this equation is proved.

Keywords: energy-Casimir method, nonlinear stability, Lennard-Jones type potential