

О НЕКОТОРЫХ МОДИФИКАЦИЯХ ОТОБРАЖЕНИЯ “КОТ АРНОЛЬДА”

© 2021 г. С. Д. Глызин^{1,*}, А. Ю. Колесов^{1,**}

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 14.05.2021 г.

Поступило 24.07.2021 г.

После доработки 24.07.2021 г.

Принято к публикации 08.08.2021 г.

Предлагается эффективный способ построения конкретных примеров диффеоморфизмов Аносова на торе $\mathbb{T}^2$, отличных от линейных гиперболических автоморфизмов. А именно, вводится в рассмотрение специальный класс диффеоморфизмов, представляющих собой суперпозиции известного линейного отображения “кот Арнольда” с некоторыми диффеоморфизмами, гомотопными тождественным. Для указанного класса отображений устанавливаются конструктивно проверяемые достаточные условия гиперболичности.

Ключевые слова: отображение “кот Арнольда”, гиперболичность, тор, диффеоморфизм Аносова

DOI: 10.31857/S2686954321050064

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

История развития гиперболической теории и основные ее достижения подробно описаны в обзоре [1] и монографиях [2, 3]. Одним из аспектов этой теории является вопрос об отыскании конкретных примеров гиперболических динамических систем и связанный с ним вопрос о способах проверки условий гиперболичности. Общепринятым инструментом указанной проверки считается известный критерий конусов [1–3]. Однако к настоящему времени разработан и альтернативный способ обнаружения гиперболического поведения, суть которого состоит в следующем [4, 5].

Пусть M – гладкое риманово многообразие, $A \subset M$ – непустое компактное подмножество, инвариантное относительно диффеоморфизма f , т.е. $f(A) = A$. Как и в случае критерия конусов, для проверки факта гиперболичности множества A мы предполагаем существование некоторого стартового разложения касательного пространства $T_x M$, $x \in A$ в прямую сумму подпространств $E_1(x)$, $E_2(x)$, $\dim E_j(x) > 0$, $j = 1, 2$. Однако вместо связанных с подпространствами $E_1(x)$, $E_2(x)$ полей конусов в нашем случае строятся непо-

средственно сами неустойчивое и устойчивое распределения E_x^u , E_x^s , фигурирующие в гиперболическом разложении

$$T_x M = E_x^u \oplus E_x^s, \quad x \in A.$$

Как оказывается, искомые подпространства E_x^u , E_x^s могут быть представлены в параметрической форме

$$E_x^u = \{\xi = u_1 + u_2 \in T_x M: u_2 = a(x)u_1, u_1 \in E_1(x)\}, \quad (1)$$

$$E_x^s = \{\xi = u_1 + u_2 \in T_x M: u_1 = b(x)u_2, u_2 \in E_2(x)\}, \quad (2)$$

где $u_1 \in E_1(x)$ и $u_2 \in E_2(x)$ – векторные параметры на E_x^u и E_x^s соответственно, а линейные операторы $a(x): E_1(x) \rightarrow E_2(x)$, $b(x): E_2(x) \rightarrow E_1(x)$, ограниченные по $x \in A$ в равномерной операторной топологии, подлежат определению. Далее, опираясь на факт Df -инвариантности подпространств (1), (2), для отыскания $a(x)$, $b(x)$ приходим к некоторым нелинейным функциональным уравнениям, к которым, в свою очередь, при определенных дополнительных ограничениях удается применить принцип сжимающих отображений. В результате устанавливаем существование подпространств E_x^u , E_x^s при $x \in A$ и получаем для них явные параметрические представления (1), (2). После этого, опираясь на указанные представления, отдельно проверяем факты экспоненциаль-

¹ Центр интегрируемых систем, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия

*E-mail: glyzin.s@gmail.com

**E-mail: andkolesov@mail.ru

ного стремления к нулю при $n \rightarrow +\infty$ векторов $D(f^n(x))\xi$ и $D(f^{-n}(x))\xi$, $n \in \mathbb{N}$, при $\xi \in E_x^s$ и $\xi \in E_x^u$ соответственно.

Опишем теперь интересующий нас класс диффеоморфизмов. Для этого обозначим через $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / 2\pi\mathbb{Z}^2$ тор

$$\mathbb{T}^2 = \{\varphi = \text{colon}(x, y): 0 \leq x \leq 2\pi(\text{mod } 2\pi), \quad 0 \leq y \leq 2\pi(\text{mod } 2\pi)\}. \quad (3)$$

Иными словами, $\mathbb{T}^2 = p(\mathbb{R}^2)$, где p — так называемая естественная проекция. Если отождествить точки тора (3) с точками фундаментальной области

$\mathcal{U} = \{\varphi = \text{colon}(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x < 2\pi, 0 \leq y < 2\pi\}$, то для p получаем явную формулу

$$p(\varphi) = \text{colon}\left(x - 2\pi \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor, y - 2\pi \left\lfloor \frac{y}{2\pi} \right\rfloor\right). \quad (4)$$

Далее, рассмотрим отображение $G: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, имеющее вид

$$\varphi \mapsto G(\varphi) = \Lambda\varphi + g(\varphi)(\text{mod } 2\pi). \quad (5)$$

Здесь Λ — невырожденная квадратная матрица размера 2×2 с целочисленными элементами, спектр которой не пересекается с единичной окружностью, а вектор-функция $g(\varphi)$ принадлежит классу $C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$. Предполагаем также, что она является 2π -периодической по $\varphi \in \mathbb{R}^2$, т.е. $g(\varphi + 2\pi l) \equiv g(\varphi)$ для любого $l \in \mathbb{Z}^2$. Что же касается элемента $\Lambda\varphi + g(\varphi)(\text{mod } 2\pi)$ из $\mathbb{T}^2$, то он задается по правилу:

$$\forall \varphi \in \mathbb{T}^2$$

$$\Lambda\varphi + g(\varphi)(\text{mod } 2\pi) = p[\Lambda p^{-1}(\varphi) + g(p^{-1}(\varphi))],$$

где p — проекция (4), а через $p^{-1}(\varphi) \in \mathbb{R}^2$ обозначен произвольный прообраз точки $\varphi \in \mathbb{T}^2$ (поскольку разность любых двух таких прообразов есть величина вида $2\pi l$, где $l \in \mathbb{Z}^2$, то приведенная формула не зависит от конкретного выбора $p^{-1}(\varphi)$). И наконец, предполагаем, что (5) — диффеоморфизм тора (3), т.е.

$$|\det \Lambda| = 1, \quad \det(\Lambda + g'(\varphi)) \neq 0 \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}^2. \quad (6)$$

Определим затем понятие гиперболичности применительно к рассматриваемому отображению (5). Для этого нам потребуется линейный оператор $DG(\varphi): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (дифференциал), задающийся равенством $DG(\varphi) = \Lambda + g'(p^{-1}(\varphi)) \quad \forall \varphi \in \mathbb{T}^2$, а так-

же операторы $D(G^n(\varphi))$, $D(G^{-n}(\varphi))$, $n \geq 1$, определяющиеся соотношениями

$$\begin{aligned} D(G^n(\varphi)) &= DG(\varphi_{n-1}) \circ DG(\varphi_{n-2}) \circ \dots \circ DG(\varphi_0), \\ D(G^{-n}(\varphi)) &= [DG(\varphi_{-n})]^{-1} \circ [DG(\varphi_{-(n-1)})]^{-1} \circ \dots \circ [DG(\varphi_{-1})]^{-1}, \end{aligned}$$

где $\varphi_j = G^j(\varphi)$, $j \in \mathbb{Z}$.

О п р е д е л е н и е (У). Будем говорить, что диффеоморфизм (5) гиперболический или является диффеоморфизмом Аносова, если для каждого $\varphi \in \mathbb{T}^2$ пространство $T_\varphi \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2$ допускает представление в виде прямой суммы $\mathbb{R}^2 = E_\varphi^u \oplus E_\varphi^s$ одномерных линейных подпространств E_φ^u , E_φ^s и выполняются следующие требования:

- а) для $\forall \varphi \in \mathbb{T}^2$ имеем $DG(\varphi)E_\varphi^u = E_{G(\varphi)}^u$, $DG(\varphi)E_\varphi^s = E_{G(\varphi)}^s$ (это свойство называется инвариантностью);
- б) существуют такие постоянные $\mu_1, \mu_2 \in (0, 1)$, $c_1, c_2 > 0$, что

$$\|D(G^{-n}(\varphi))\xi\| \leq c_1 \mu_1^n \|\xi\| \quad \forall \varphi \in \mathbb{T}^\infty,$$

$$\forall \xi \in E_\varphi^u, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$\|D(G^n(\varphi))\xi\| \leq c_2 \mu_2^n \|\xi\| \quad \forall \varphi \in \mathbb{T}^\infty,$$

$$\forall \xi \in E_\varphi^s, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(здесь $\|\cdot\|$ — произвольно фиксированная норма в $\mathbb{R}^2$).

Данное определение представляет собой классическое определение Д.В. Аносова из [6]. Следует также напомнить, что в работе [6] гиперболические диффеоморфизмы назывались У-диффеоморфизмами или У-системами. Именно по этой причине мы поместили определение гиперболичности буквой У.

Для описания достаточных условий гиперболичности, которые будут использоваться в данной статье, обозначим через $\lambda_1, |\lambda_1| > 1$ и $\lambda_2, |\lambda_2| < 1$ собственные значения матрицы Λ , а через e_1 и e_2 — отвечающие им собственные векторы. Кроме этого, рассмотрим векторы $g_s, s = 1, 2$, удовлетворяющие соотношениям

$$\Lambda^* g_s = \lambda_s g_s, \quad (e_j, g_s) = \delta_{js}, \quad j, s = 1, 2, \quad (7)$$

где Λ^* — сопряженная матрица, $(\cdot, \cdot)$ — евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$, δ_{js} — символ Кронекера. Далее, положим

$$\begin{aligned} \beta_{j,s}(\varphi) &= (g'(\varphi) e_j, g_s), \\ \beta_{j,s}^0 &= \max_{\varphi \in \mathbb{R}^2} |\beta_{j,s}(\varphi)|, \quad j, s = 1, 2, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\alpha_1(\varphi) = \lambda_1 + \beta_{1,1}(\varphi), \quad \alpha_2(\varphi) = \lambda_2 + \beta_{2,2}(\varphi), \quad (9)$$

$$\alpha_1^0 = \max_{\varphi \in \mathbb{R}^2} \frac{1}{|\alpha_1(\varphi)|}, \quad \alpha_2^0 = \max_{\varphi \in \mathbb{R}^2} |\alpha_2(\varphi)|. \quad (10)$$

Имеет место следующая

Т е о р е м а 1. *При выполнении неравенств*

$$\alpha_1(\varphi) \neq 0 \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha_1^0 < 1, \quad \alpha_2^0 < 1, \quad \beta_{1,2}\beta_{2,1}^0 < \frac{(1-\alpha_1^0)(1-\alpha_2^0)}{\alpha_1^0} \quad (11)$$

диффеоморфизм (5) обладает свойством гиперболичности.

Доказательство теоремы 1, содержащееся в [4], базируется на описанном выше альтернативном подходе к проверке гиперболичности. А именно, в формулах (1), (2) (в которых теперь $x \in A$ заменено на $\varphi \in \mathbb{T}^2$), мы полагаем $E_j(\varphi) = E_j, j = 1, 2$, где $E_j = \{te_j; t \in \mathbb{R}\}, j = 1, 2$, а e_1, e_2 — векторы из (7). Один из вариантов достаточных условий гиперболичности, которые удастся получить на этом пути, имеет вид (11). Именно он и взят за основу при анализе рассматриваемого ниже класса диффеоморфизмов тора $\mathbb{T}^2$.

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Обратимся сначала к известному линейному отображению “кот Арнольда”, которое в координатах x, y из (3) имеет вид

$$x \mapsto 2x + y \pmod{2\pi}, \quad y \mapsto x + y \pmod{2\pi}. \quad (12)$$

Далее, введем в рассмотрение отображение

$$\begin{aligned} \varphi &\mapsto \varphi + \Delta(\varphi) \pmod{2\pi}, \\ \Delta(\varphi) &= \text{colon}(\Delta_1(x), \Delta_2(y)), \end{aligned} \quad (13)$$

где $\Delta_j(z) \in C^1(\mathbb{R})$, $\Delta_j(z + 2\pi) \equiv \Delta_j(z), j = 1, 2$, и выполняются неравенства

$$\Delta_j'(z) + 1 > 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2. \quad (14)$$

Заметим, что условия (14) влекут справедливость второго требования из (6), а значит, обеспечивают взаимную однозначность отображения (13) на торе $\mathbb{T}^2$. И наконец, следуя идеям работ [7, 8], рассмотрим суперпозицию диффеоморфизмов (12), (13), т.е. отображение

$$\begin{aligned} x &\mapsto 2x + y + \Delta_1(2x + y) \pmod{2\pi}, \\ y &\mapsto x + y + \Delta_2(x + y) \pmod{2\pi}. \end{aligned} \quad (15)$$

Для формулировки достаточных условий гиперболичности диффеоморфизма (15) нам потребуются некоторые обозначения. А именно, положим

$$L_{\max} = \max_{z \in \mathbb{R}} \Delta_1'(z), \quad L_{\min} = \min_{z \in \mathbb{R}} \Delta_1'(z), \quad (16)$$

$$R_{\max} = \max_{z \in \mathbb{R}} \Delta_2'(z), \quad R_{\min} = \min_{z \in \mathbb{R}} \Delta_2'(z),$$

$$\kappa_1 = \frac{5 + \sqrt{5}}{2} + (2 + \sqrt{5})L_{\min} + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}R_{\min}, \quad (17)$$

$$\kappa_2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} + (2 - \sqrt{5})L_{\max} + \frac{1 - \sqrt{5}}{2}R_{\max}, \quad (18)$$

$$\kappa_3 = \max[(R_{\max} - L_{\min})^2, (L_{\max} - R_{\min})^2]. \quad (19)$$

Как оказывается, интересующие нас условия гиперболичности выписываются в терминах постоянных (16)–(19). А именно, справедливо следующее утверждение, являющееся основным результатом данной статьи.

Т е о р е м а 2. *Пусть выполнены неравенства*

$$\kappa_1 > 0, \quad \kappa_2 > 0, \quad \kappa_3 < \kappa_1\kappa_2. \quad (20)$$

Тогда отображение (15) представляет собой диффеоморфизм Аносова на торе $\mathbb{T}^2$.

Для доказательства заметим, что в случае отображения (15) имеем

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} > 1, \quad \lambda_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \in (0, 1),$$

а векторы $e_s, g_s, s = 1, 2$ из [7] задаются равенствами

$$e_s = g_s = \frac{1}{\sqrt{1 + (\lambda_s - 1)^2}} \text{colon}(\lambda_s - 1, 1), \quad s = 1, 2. \quad (21)$$

В свою очередь, объединяя соотношения (21) с формулами

$$\begin{aligned} g(\varphi) &= \text{colon}(\Delta_1(z_1), \Delta_2(z_2)), \\ g'(\varphi) &= \begin{pmatrix} 2\Delta_1'(z_1) & \Delta_1'(z_1) \\ \Delta_2'(z_2) & \Delta_2'(z_2) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $z_1 = 2x + y, z_2 = x + y$, приходим к выводу, что в данной ситуации

$$\begin{aligned} \alpha_1(\varphi) &= \frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5}}(\Delta_1'(z_1) + 1) + \\ &+ \frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}}(\Delta_2'(z_2) + 1) > 0 \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}^2, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \alpha_2(\varphi) &= \frac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{5}}(\Delta_1'(z_1) + 1) + \\ &+ \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}}(\Delta_2'(z_2) + 1) > 0 \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}^2, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\beta_{1,2}(\varphi) = \frac{\lambda_1}{\sqrt{1 + \lambda_1}\sqrt{1 + \lambda_2}}(\Delta_2'(z_2) - \Delta_1'(z_1)), \quad (24)$$

$$\beta_{2,1}(\varphi) = \frac{\lambda_2}{\sqrt{1 + \lambda_1}\sqrt{1 + \lambda_2}}(\Delta_2'(z_2) - \Delta_1'(z_1)). \quad (25)$$

Опираясь на базовые соотношения (22)–(25), убеждаемся в том, что здесь

$$\frac{1}{\alpha_1^0} - 1 = \frac{\kappa_1}{\sqrt{5}}, \quad 1 - \alpha_2^0 = \frac{\kappa_2}{\sqrt{5}}, \quad \beta_{1,2}^0 \beta_{2,1}^0 = \frac{\kappa_3}{5},$$

а значит, условия (20) влекут выполнение требований (11). Остается воспользоваться теоремой 1 и заключить, что в предположениях (20) интересующий нас диффеоморфизм (15) действительно является гиперболическим.

В качестве конкретного примера рассмотрим отображение (15) с функциями

$$\Delta_j(z) = \delta_j \cos(z + v_j), \quad \delta_j \in [0, 1), \quad v_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2. \quad (26)$$

Фигурирующие в (26) ограничения на параметры δ_1, δ_2 гарантируют выполнение в данном случае условий (14). Что же касается требований (20), то они эквивалентны оценкам

$$\begin{aligned} (2\sqrt{5} + 4)\delta_1 + (\sqrt{5} + 1)\delta_2 &< 5 + \sqrt{5}, \\ (2\sqrt{5} - 4)\delta_1 + (\sqrt{5} - 1)\delta_2 &< 5 - \sqrt{5}, \\ 3\sqrt{5}\delta_1 + 2\sqrt{5}\delta_2 - \delta_1\delta_2 &< 5. \end{aligned}$$

Заметим еще, что эти условия заведомо справедливы, например, в случае, когда $\delta_1 = 0$, $\delta_2 \in [0, 1)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обсудим сначала вопрос о возможных обобщениях полученных нами результатов. Ясно, что при построении класса отображений (15) вместо диффеоморфизма (12) можно взять произвольный линейный гиперболический автоморфизм тора $\mathbb{T}^2$. Каждому такому автоморфизму будет соответствовать своя версия теоремы 2. Кроме того, даже в первоначальном случае (12), (13) условия указанной теоремы можно несколько ослабить, если для проверки гиперболичности воспользоваться усиленным вариантом теоремы 1.

Для получения более слабых, чем (11) достаточных условий гиперболичности, сначала в формулах (8)–(10) переопределим величины $\beta_{1,2}^0, \beta_{2,1}^0$. А именно, положим

$$\beta_{1,2}^0 = \max_{\varphi \in \mathbb{R}^2} |\beta_{1,2}(\varphi)|, \quad \beta_{2,1}^0 = \max_{\varphi \in \mathbb{R}^2} \left| \frac{\beta_{2,1}(\varphi)}{\alpha_1(\varphi)} \right|. \quad (27)$$

Кроме того, введем еще две постоянные

$$\gamma_{1,2}^0 = \max_{\varphi \in \mathbb{R}^2} \left| \frac{\beta_{1,2}(\varphi)}{\alpha_1(\varphi)} \right|, \quad \gamma_{2,1}^0 = \max_{\varphi \in \mathbb{R}^2} |\beta_{2,1}(\varphi)|. \quad (28)$$

Из результатов статьи [5] вытекает следующая

Т е о р е м а 3. Пусть выполнены условия

$$\begin{aligned} \alpha_1(\varphi) &\neq 0 \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha_1^0 < 1, \quad \alpha_2^0 < 1, \\ \min(\beta_{1,2}^0 \beta_{2,1}^0, \gamma_{1,2}^0 \gamma_{2,1}^0) &< (1 - \alpha_1^0)(1 - \alpha_2^0), \end{aligned} \quad (29)$$

где постоянные α_1^0, α_2^0 задаются прежними равенствами (10), а $\beta_{1,2}^0, \beta_{2,1}^0, \gamma_{1,2}^0, \gamma_{2,1}^0$ — величины (27), (28). Тогда диффеоморфизм (5) является гиперболическим.

Обратим внимание, что в силу очевидной оценки

$$\min(\beta_{1,2}^0 \beta_{2,1}^0, \gamma_{1,2}^0 \gamma_{2,1}^0) \leq \alpha_1^0 \max_{\varphi \in \mathbb{R}^2} |\beta_{1,2}(\varphi)| \cdot \max_{\varphi \in \mathbb{R}^2} |\beta_{2,1}(\varphi)|$$

условия (29) действительно слабее ограничений (11). Однако с использованием теоремы 3 для отображения (15) в общем случае выходят более громоздкие, чем (20) достаточные условия гиперболичности. Именно по этой причине мы изначально остановили свой выбор на теореме 1.

В заключение проиллюстрируем применимость теоремы 3 на конкретном примере, заимствованном из работ [7, 8]. Как и в указанных статьях, рассмотрим диффеоморфизм (15) с функциями

$$\Delta_1(z) = M(z, \varepsilon), \quad \Delta_2(z) = 0, \quad (30)$$

где $M(z, \varepsilon)$ — так называемая функция Мебиуса. Данная функция является 2π -периодической по z и на отрезке $0 \leq z \leq 2\pi$ задается формулой

$$M(z, \varepsilon) = \begin{cases} \Omega(z, \varepsilon) - z & \text{при } 0 \leq z < z_1, \\ \Omega(z, \varepsilon) + \pi - z & \text{при } z_1 < z < z_2, \\ \Omega(z, \varepsilon) + 2\pi - z & \text{при } z_2 < z \leq 2\pi, \end{cases}$$

где $\varepsilon = \text{const} \in (0, 1)$,

$$\begin{aligned} \Omega(z, \varepsilon) &= \arctg \left(\frac{(1 - \varepsilon^2) \sin z}{2\varepsilon + (1 + \varepsilon^2) \cos z} \right), \\ z_1 &= \arccos \left(-\frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} \right), \\ z_2 &= 2\pi - \arccos \left(-\frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} \right). \end{aligned}$$

Что же касается точек $z = z_j$, $j = 1, 2$, то в них она доопределяется по непрерывности.

Несложный подсчет показывает, что в нашем случае

$$\begin{aligned} M'_z(z, \varepsilon) + 1 &= \frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos z} > 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}, \\ M''_{zz}(z, \varepsilon) &= \frac{2\varepsilon(1 - \varepsilon^2) \sin z}{(1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos z)^2} > 0 \\ &\text{при } 0 < z < \pi, \end{aligned}$$

а значит,

$$\min_{z \in \mathbb{R}} M'_z(z, \varepsilon) = -\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}, \quad \max_{z \in \mathbb{R}} M'_z(z, \varepsilon) = \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon},$$

$$\frac{1}{\alpha_1^0} - 1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2} - (2+\sqrt{5}) \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} \right),$$

$$1 - \alpha_2^0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2} + (2-\sqrt{5}) \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon} \right),$$

$$\beta_{1,2}^0 \beta_{2,1}^0 = \gamma_{1,2}^0 \gamma_{2,1}^0 = \frac{4\varepsilon^2 \alpha_1^0}{5(1-\varepsilon^2)}.$$

Далее, принимая во внимание приведенные формулы, убеждаемся в том, что в рассматриваемой ситуации условия (29) эквивалентны требованию

$$\varepsilon < \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.4472.$$

Вопрос же о гиперболичности отображения (15), (30) при $\varepsilon \in [1/\sqrt{5}, 1)$ остается открытым.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 21-71-30011).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Динамические системы — 9. Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления. Т. 66. М.: ВИНТИ, 1991.
2. Каток А. Б., Хасселблат Б. Введение в теорию динамических систем с обзором последних достижений. М.: МЦНМО, 2005.
3. Каток А. Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. М.: Факториал, 1999.
4. Колесов А.Ю., Розов Н.Х., Садовничий В.А. // Матем. заметки. 2019. Т. 105. Вып. 2. С. 251–268.
5. Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. // Тр. МИАН. 2020. Т. 308. С. 116–134.
6. Аносов Д.В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны. Тр. МИАН СССР. Т. 90. Ред. И. Г. Петровский, 1967.
7. Chigarev V., Kazakov A.O., Pikovsky A.S. // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2020. V. 30. № 7. P. 073114-1–073114-10.
8. Гонченко С.В., Кайнов М.Н., Казаков А.О., Тураев Д.В. // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29. № 1. С. 160–185.

ON SOME MODIFICATIONS OF ARNOLD'S CAT MAP

S. D. Glyzin^a and A. Yu. Kolesov^a

^a P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

An effective method is proposed for constructing specific examples of Anosov diffeomorphisms on the torus $\mathbb{T}^2$, which are different from linear hyperbolic automorphisms. A special class of diffeomorphisms is introduced, which are superpositions of the well-known linear Arnold's cat map with some diffeomorphisms homotopic to the identity. Sufficient hyperbolicity conditions that are constructively verified are established for this class of mappings.

Keywords: Arnold's cat map, hyperbolicity, torus, Anosov diffeomorphism