*ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 500, с. 102–106*



*УДК 531.911.5, 531.37*

# ПРИТЯЖЕНИЕ ДЛЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ТРЕНИЕМ

 **И. А. Финогенко[1,*]**

Представлено академиком РАН С.Н. Васильевым 23.06.2021 г.
Поступило 02.07.2021 г.
После доработки 02.07.2021 г.
Принято к публикации 22.07.2021 г.

Исследуются вопросы притяжения для систем с кулоновым трением, представленных уравнениями Лагранжа 2-го рода. Методы исследований опираются на прямой метод Ляпунова и метод предельных уравнений, восходящих к работам G.R. Sell (1967) и Z. Artstein (1977, 1978) по топологической динамике неавтономных систем. Полученные результаты обобщают принцип инвариантности Ла-Салля.

*Ключевые слова:* функция Ляпунова, метод предельных уравнений, предельные дифференциальные включения, принцип инвариантности, притяжение, сухое трение, уравнения Лагранжа 2-го рода

**DOI:** 10.31857/S2686954321050052

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исследуется асимптотическое поведение механических систем с сухим трением, представленных уравнениями

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_a}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T_a}{\partial q^i} = Q_i^A + Q_i^T, \quad i = 1,\ldots,k, \tag{1}$$

описание которых опирается на [1]. Здесь $T_a$ – кинетическая энергия системы, $Q_i^T$ – разрывные относительно обобщенных скоростей кулоновы силы трения, $Q_i^A$ – активные силы системы. Детально изучается случай, когда активные силы представляют собой сумму потенциальных и диссипативных (отличных от сил трения) сил. Мы делаем предположение о том, что коэффициенты трения зависят от переменной $t$ (времени). Такая зависимость может возникать по разным причинам, таким, как изменение температуры или иных характеристик трущихся тел.

Если использовать известные подходы теории разрывных систем [2], то уравнения (1) следует рассматривать, как дифференциальные включения. В своих исследованиях мы используем принцип инвариантности для неавтономных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью, развитый в [3], с использованием функций Ляпунова со знакопостоянными производными. Отметим, что функции Ляпунова со знакопостоянными производными характерны для механических систем, если в качестве функции Ляпунова выступает полная энергия системы.

Теоремы прямого метода Ляпунова для систем автономных обыкновенных дифференциальных уравнений со знакопостоянными производными функций Ляпунова получены в известных работах Е.А. Барбашина и Н.Н. Красовского (см. [4]). В них асимптотическая устойчивость была установлена при дополнительном предположении об отсутствии целых траекторий системы в окрестности начала координат (положения равновесия). Если избавиться от этого предположения, можно утверждать лишь то, что ω-предельные множества решений лежат во множестве нулей производной функции Ляпунова. Эти выводы в дальнейшем получили развитие в работах Ла-Салля и в настоящее время известны как принцип инвариантности (см. [5, гл. 7 ]).

Проблемы, которые на этом пути возникают при рассмотрении неавтономных систем, состоят в следующем.

1. ω-Предельные множества решений неавтономных дифференциальных уравнений не обладают свойствами типа инвариантности, на которые существенно опирается принцип инвариантности Ла-Салля.

2. Становится неясным, как интерпретировать множество нулей производной функции Ляпунова, так как эта производная зависит также и от переменной $t$.

Попытки, направленные на преодоление этих трудностей, восходят к статьям [6–8] и в настоя-

[1]*Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова Сибирского отделения Российской академии наук, Иркутск, Россия*
**E-mail: fin@icc.ru*

щее время привели к методу исследования вопросов притяжения и асимптотической устойчивости, который известен как метод предельных уравнений (см. [9, 10]).

Для дифференциальных включений и дифференциальных уравнений с разрывной правой частью наряду с указанными выше проблемами возникает еще принципиальный вопрос о построении предельных дифференциальных соотношений, поскольку для этого нет подходящих теорем математического анализа о сходимости последовательностей многозначных функций. Впервые эта проблема была решена в работах [11, 3] с использованием методов многозначного анализа.

Для детального описания и преобразования механической системы (1) примем следующие обозначения: $q = (q_1,\dots,q_k)'$, $q = (\dot q^1,\dots,\dot q^k)'$, $q = (\ddot q^1,\dots,\ddot q^k)'$, $Q^A = (Q_1^A,\dots,Q_k^A)'$ – векторы-столбцы обобщенных координат, скоростей, ускорений и активных сил.

Кинетическая энергия $T_a$ системы представляет собой сумму $T_a = T + T_1 + T_0$ положительно определенной квадратичной формы

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} a_{ij}(q)\dot q^i \dot q^j$$

обобщенных скоростей с симметричной матрицей $A(q) = [a_{ij}(q)]_1^k$, линейной формы обобщенных скоростей $T_1 = \sum_{i=1}^{k} a_i(q)\dot q^i$ и функции $T_0(q)$.

Обобщенные силы трения скольжения при условии $\dot q^i \neq 0$ имеют вид

$$Q_i^T(q,\dot q) = -f_i(t,q,\dot q)|N_i(q,\dot q)|\operatorname{sgn}\dot q^i. \qquad (2)$$

Здесь $|N_i(q,\dot q)|$ – модули нормальных реакций в точках соприкосновения трущихся тел, $f_i(t,q,\dot q) > 0$ – коэффициенты трения, $1 \le i \le k_*, k_* \le k$. Для $i = k_* + 1,\dots,k$ считаем $f_i = 0$. Отметим, что если активные силы, действующие на систему, известны, то реакции связей с трением неизвестны и подлежат определению (см. [1]). Эти вопросы в данной статье не затрагиваются. Всюду в дальнейшем мы предполагаем, что функции $N_i$ определены и непрерывны, функции $a_{ij}$, $a_i$, $T_0$ непрерывно дифференцируемы, функции $f_i$ и $Q_i^A$ непрерывны по своим аргументам.

Уравнения (1) с силами трения (2) могут в достаточно общем виде описывать системы с одностепенными кинематическими парами с трением (например, механизмы, состоящие из шатунов и ползунов, маятниковые системы с трением в шарнирах и опорах).

Обозначим через $\dfrac{\partial T_a}{\partial q}$ и $\dfrac{\partial T_a}{\partial \dot q}$ векторы-столбцы частных производных функции $T_a(q,\dot q)$ по переменным $q_i$ и $\dot q_i$, соответственно, и запишем уравнения (1) в векторной форме

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_a}{\partial \dot q} - \frac{\partial T_a}{\partial q} = Q^A + Q^T. \qquad (3)$$

Функция $T_1$ в выражении кинетической энергии $T_a$ после дифференцирования задает гироскопические силы $\Gamma_i(q,\dot q) = \sum_{j=1}^{k}\gamma_{ji}\dot q^j$ с коэффициентами

$$\gamma_{ij} = \left(\frac{\partial a_i(q)}{\partial q^j} - \frac{\partial a_j(q)}{\partial q^i}\right) = -\gamma_{ji}.$$

Функции $Q_i^e = \dfrac{\partial T_0(q)}{\partial q^i}$ представляют переносные силы инерции.

Применяя к силам трения в точках разрыва простейшее выпуклое доопределение [2, с. 40], получим общее выражение сил трения в виде

$$Q_i^T(t,q,\dot q) = \begin{cases} -f_i|N_i|\operatorname{sgn}\dot q, & \text{если} \quad \dot q^i \neq 0,\\ [-f_i|N_i|, f_i|N_i|], & \text{если} \quad \dot q^i = 0\end{cases}$$

для каждого $i = 1, \dots, k^*$.

Введем в рассмотрение векторную функцию $g = (g_1,\dots,g_k)'$, определенную равенствами

$$g_i(q,\dot q) = \sum_{j=1}^{k}\gamma_{ji}\dot q^j + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial a_{\nu j}}{\partial q^i}\dot q^\nu \dot q^j - \\ - \sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{k}\frac{\partial a_{ij}}{\partial q^\nu}\dot q^\nu \dot q^j + \frac{\partial T_0}{\partial q^i}.$$

Тогда уравнение (3) запишется в виде дифференциального включения

$$A(q)\ddot q \in g(q,\dot q) + Q^A(q,\dot q) + Q^T(t,q,\dot q). \qquad (4)$$

Обозначим

$$x = (x_1,\dots,x_{2k})', \quad \dot x = (\dot x_1,\dots,\dot x_{2k})',$$
$$x_i = q^i, \quad x_{k+i} = \dot q^i, \quad i = 1,\dots,k,$$
$$X(t,x) = \cup\{(x_{1+k},\dots,x_{2k},z_1,\dots,z_k)' : \\ (z_1,\dots,z_k)' \in A^{-1}(x)(g(x) + Q^A + Q^T(t,x))$$

и запишем включение (4) в виде дифференциального включения первого порядка

$$\dot x \in X(t,x). \qquad (5)$$

Такое преобразование позволяет использовать в исследовании уравнений (1) определения и факты теории дифференциальных включений и дифференциальных уравнений с разрывной правой частью, в частности, ссылаться на теоремы из статей [11, 3].

## 2. ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ И ПРИТЯЖЕНИЕ

Под решением, определенным на промежутке $[t_0, t_1)$, уравнения (3) понимается решение $x(t) = (q(t), \dot{q}(t))$ дифференциального включения (4) или, эквивалентно, дифференциального включения (5).

Опишем ряд общих свойств для решений уравнения (3), вытекающие из [1, гл. 1, 3], которые в дальнейшем учитываются без оговорок.

У т в е р ж д е н и е. 1. *Для любых начальных данных включение* (4) *имеет решение и любое решение этого включения может быть продолжено на правый максимальный промежуток существования* $[t_0, \omega)$.

2. *Любое ограниченное непродолжимое решение включения* (4) *определено на промежутке* $[t_0, +\infty)$.

3. *При условии непрерывной дифференцируемости всех функций* (*кроме сигнатур*), *фигурирующих в описании системы* (1)*, любое решение включения* (4) *является правосторонним с правой производной* $D^+\dot{q}(t)$, *непрерывной справа и удовлетворяющей включению* (4) *в каждой точке t из промежутка существования этого решения. Кроме этого, имеет место правосторонняя единственность решений, т.е. с увеличением t решения могут сливаться, но не могут разветвляться.*

Правосторонние решения несут в себе определенный физический смысл, а именно: ускорения в классической механике понимаются как правые производные скорости. С математической точки зрения это более узкий класс решений, который позволяет уточнять поведение движений системы в окрестности множества положений равновесия.

Для каждого $x = (q, \dot{q})$ и $i = 1, \ldots, k^*$ положим

$$a_i(x) = \underline{\lim}_{t \to +\infty} f_i(t, x), b_i(x) = \overline{\lim}_{t \to +\infty} f_i(t, x)$$

и определим многозначную функцию со значениями $Q^*(x) = Q_1^*(x) \times \ldots \times Q_k^*(x)$, где

$$Q_i^*(x) = \begin{cases} [a_i|N_i|, b_i|N_i|], & \text{если} \quad \dot{q}^i < 0, \\ [-b_i|N_i|, -a_i|N_i|], & \text{если} \quad \dot{q}^i > 0, \\ [-b_i|N_i|, b_i|N_i|], & \text{если} \quad \dot{q}^i = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Дифференциальное включение

$$A(q)\ddot{q} \in g(q, \dot{q}) + Q^A(q, \dot{q}) + Q^*(q, \dot{q}) \tag{7}$$

будем называть предельным для дифференциального включения (4).

Будем говорить, что множество $D \subset R^{2k}$ полуинвариантно, если для любой точки $y_0 = (q_0, \dot{q}_0) \in D$ существует решение $y(t) = (q(t), \dot{q}(t))$ включения (7), такое, что $y(0) = y_0$ и $y(t) \in D$ для всех $t \geq 0$.

Для траекторий решений $x(t) = (q(t), \dot{q}(t))$ через $\Lambda^+(x)$ будем обозначать ω-предельные множества, которые понимаются в обычном смысле. Они (как и траектории любой ограниченной кривой) обладают свойствами компактности, связности и $d(x(t), \Lambda^+(x)) \to 0$ при $t \to +\infty$, где $d$ – расстояние от точки до множества. Последнее свойство служит основой для изучения вопросов притяжения. Особо отметим, что множества $\Lambda^+(x)$ полуинвариантны [11].

Для каждой точки $x = (q, \dot{q})$ верхняя производная непрерывно дифференцируемой функции Ляпунова $V(x)$ в силу включения (5) в точке $(t, x)$ определяется равенством

$$\dot{V}^+(t, x) = \sup_{y \in X(t,x)} \langle \nabla_x V, y \rangle, \tag{8}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – знак скалярного произведения, $\nabla_x V$ – градиент функции $V$ по переменной $x$.

Отметим, что в точках непрерывности сил трения (т.е. при условии $\dot{q}^i \neq 0$ для всех $i = 1, \ldots, k^*$) формула (8) приобретает вид

$$\dot{V}^+(t, q, \dot{q}) = \langle \nabla V_q, \dot{q} \rangle + \langle \nabla V_{\dot{q}}, A^{-1}(g + Q^A + Q^T) \rangle. \tag{9}$$

Верхняя производная $\dot{V}^*(q, \dot{q})$ функции $V(q, \dot{q})$ в силу предельного включения (7) записывается в виде

$$\begin{aligned} &\dot{V}^*(q, \dot{q}) = \langle \nabla_q V, \dot{q} \rangle + \sup\{\langle \nabla_{\dot{q}} V, y \rangle : \\ &A(q)y \in g(q, \dot{q}) + Q^A(q, \dot{q}) + Q^*(q, \dot{q})\}. \end{aligned} \tag{10}$$

Т е о р е м а 1. *Пусть для каждого компактного множества* $K \subset R^{2k}$ *существует константа M, такая, что для всех* $(t, x) \in R^1 \times K$, $x = (q, \dot{q})$, *выполняется*

$$\|f(t, x)\| \leq M, \tag{11}$$

*где* $f(t, x)$ – *вектор коэффициентов трения* $f_i(t, x)$, $i = 1, \ldots, k^*$. *Предположим, что все функции* $f_i(t, x)$ *в каждой точке* $(t, x)$ *непрерывны по x равномерно относительно t и в точках непрерывности сил трения* $Q^T$ *выполняется неравенство* $\dot{V}^+(t, x) \leq 0$. *Тогда*:

1. *Для любого ограниченного решения уравнения* (1) *и для любой точки* $z = (q, \dot{q}) \in \Lambda^+(x)$ *существует решение* $z(t) = (q(t), \dot{q}(t))$ *включения* (7) *с начальным условием* $z(0) = z$, *такое, что* $\dot{V}^*(z(t)) = 0$ *для всех* $t \geq 0$.

2. *Множество* $\Lambda^+(x)$ *принадлежит наибольшему полуинвариантному подмножеству множества* $E^* = \{(q, \dot{q}) \colon \dot{V}^*(q, \dot{q}) = 0\}$.

Теорема 1 решает упомянутые выше проблемы исследования неавтономных систем методом предельных уравнений и является аналогом принципа инвариантности для системы (1).

Пусть $Q_i^A = D_i(q,\dot q) + K_i(q)$, где $K_i(q) = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q^i}$, $\Pi(q)$ – потенциальная энергия системы, $D_i(q,\dot q)$ – диссипативные силы с условиями $D_i(q,0) = 0$, $\sum_{i=1}^{k} D_i(q,\dot q)\dot i \le 0$, которые представляют вязкое трение или силы сопротивления среды. Тогда уравнение (3) приобретет вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_a}{\partial \dot q} - \frac{\partial T_a}{\partial q} = D(q,\dot q) + K(q) + Q_i^T(t,q,\dot q). \quad (12)$$

Для функции Ляпунова $V = T + \Pi - T_0$ формулы (9) и (10) запишутся в виде

$$\begin{gathered} \dot V^{+} = -\sum_{i=1}^{k_*} f_i |N_i| |\dot q^i| + \sum_{i=1}^{k} D_i \dot q^i, \\ \dot V^{*} = \sum_{i=1}^{k} D_i(q,\dot q)\dot q^i - \sum_{i=1}^{k^*} a_i(x)|N_i(x)||\dot q^i|. \end{gathered} \quad (13)$$

Далее рассматриваем систему (12) с предельным дифференциальным включением

$$A(x)\ddot q \in g(q,\dot q) + D(q,\dot q) + K(q,\dot q) + Q^*(q,\dot q). \quad (14)$$

Т е о р е м а 2. *Пусть для любого компактного множества $K \subset R^{2k}$ выполняется неравенство* (11) *и коэффициенты трения $f_i(t,x)$, $i = 1,\dots,k^*$, в каждой точке $(t,x)$ непрерывны по $x$ равномерно относительно $t$. Тогда*:

*1. Для любого ограниченного решения уравнения* (12) *и для любой точки $z = (q,\dot q)) \in \Lambda^+(x)$ существует решение $z(t) = (q(t),\dot q(t))$ включения* (14) *с начальным условием $z(0) = z$, такое, что $\dot V^*(z(t)) = 0$ для всех $t \ge 0$, где функция $\dot V^*$ определена во втором равенстве* (13).

*2. Множество $\Lambda^+(x)$ принадлежит наибольшему полуинвариантному подмножеству множества*

$$E^* = \left\{ (q,\dot q) : \sum_{i=1}^{k} D_i(q,\dot q)\dot q^i - \sum_{i=1}^{k^*} a_i(q)|N_i(q,\dot q)||\dot q^i| = 0 \right\}. \quad (15)$$

Для каждой точки $(q,\dot q)$ обозначим:

$I(q,\dot q)$ – множество индексов $i \in \{1,\dots,k\}$, таких, что выполняется хотя бы одно из условий $a_i(q)|N_i(q,\dot q^i)| \ne 0$ или $D_i(q,\dot q) \ne 0$.

$J(q,\dot q)$ – множество индексов $i \in \{1,\dots,k^*\}$, таких, что $a_i(q) \ne 0$, функция $N_i(q,\dot q)$ непрерывно дифференцируема и выполняется условие $\dot N_i^*(q,\dot q) \ne 0$, где $\dot N_i^*(q,\dot q)$ – верхняя производная функции $N_i(q,\dot q)$ в силу предельного включения (14).

В приводимых ниже следствиях предполагаем, что выполняются все условия теоремы 2 и $x(t)$ – ограниченное решение уравнения (12).

С л е д с т в и е 1. *Для любой точки $(q,\dot q) \in \Lambda^+(x)$ и индекса $i \in I(q,\dot q) \cup J(q,\dot q)$ выполняется $\dot q^i = 0$.*

С л е д с т в и е 2. *Если $I(q,\dot q) \cup J(q,\dot q) = \{1,\dots,k\}$, то $\Lambda^+(x)$ принадлежит множеству $M = \{(q,\ 0)$: $|K_i(q)| \le b_i(q,0), i = 1,\dots,k^*\}$ положений равновесия предельного дифференциального включения* (14).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В [1] вопросы притяжения и асимптотической устойчивости различных систем (в том числе и механических) изучались на основе модификаций теорем Ляпунова с использованием нескольких функций Ляпунова, выбор которых неоднозначен.

Для этих же целей может быть использован универсальный метод импликации свойств связанных математических моделей [12], если исходную и предельную системы рассматривать как структурно близкие. Но при этом вопрос выбора вспомогательной системы тоже остается открытым.

В рамках предложенного в данной статье метода притяжение и асимптотическое поведение движений механических систем с трением так или иначе сводится к анализу множества $E^*$ нулей функции Ляпунова в силу предельного дифференциального включения. В теореме 2 его описание достаточно конструктивно для класса механических систем с трением (12), но в общем случае оно может иметь сложную структуру даже для автономных систем.

В следствии 2 получены условия, при которых любое ограниченное решение уравнения (12) стремится к множеству $M$ положений равновесия предельного дифференциального включения (14). Для неограниченных решений можно утверждать лишь то, что они слабо стремятся к этому множеству, т.е. существует последовательность точек $t_n \to +\infty$, такая, что $d(x(t_n), M) \to 0$. Это свойство в сочетании со свойством устойчивости дает асимптотическую устойчивость множества $M$ и близко к свойству “инвариантности с посещением” для решений уравнения из статьи [12, Пример 2 ].

Вопрос о том, стремится ли ограниченное решение исходной системы к какому-либо конкретному положению равновесия, требует дополнительного исследования. Для этого могут использоваться любые подходящие средства и факты, такие, как свойства ω-предельных множеств и структура исходных и предельных дифференциальных включений. В общем виде такие исследования вряд ли целесообразны.

Проиллюстрируем сказанное выше на примере движения маятника с массой и длиной, равными единице:

$$\ddot{\phi} = -k^2 \sin\phi + M^T, \quad M^T = -f|N|\mathrm{sgn}\dot{\phi}, \qquad (16)$$

где $\phi$ — угол поворота маятника, отсчитанный от нижнего положения, $N = \dot{\phi}^2 + k^2\cos\phi$ — нормальная реакция, $f = f(t)$ — коэффициент трения, $a = \underline{\lim}_{t\to+\infty} f(t), b = \overline{\lim}_{t\to+\infty} f(t)$. Функция Ляпунова

$$V = T + \Pi = \dot{\phi}^2/2 + k^2(1 - \cos\phi).$$

Вывод, который позволяют сделать теорема 2 и ее следствия, следующий: если $a > 0$, то любое ограниченное решение уравнения (16) стремится к множеству $M = \{(\phi, \dot{\phi}): \dot{\phi} = 0, |\mathrm{tg}(\phi)| \le b\}$ положений равновесия предельного дифференциального включения. Но учитывая, что множества уровня функции Ляпунова $V$ при условии $\dot{\phi} = 0$ состоят из множества изолированных точек, удовлетворяющих уравнению $\cos\phi = \mathrm{const}$, а $\omega$-предельное множество связно, заключаем, что любое ограниченное решение уравнения (16) стремится к какой-либо конкретной точке из множества $M$. В [1, с. 227–229] для коэффициента трения $f \equiv \mathrm{const}$ этот вывод сделан с применением вспомогательных функций Ляпунова.

## ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки России по проекту “Теория и методы исследований эволюционных уравнений и управляемых систем с их приложениями” (№ гос. регистрации: 1210401300060-4).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Матросов В.М.* Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М.: Физматлит, 2001.
2. *Филиппов А.Ф* Дифференциальные уравнения с разрывными правыми частями. М.: Наука, 1985.
3. *Финогенко И.А.* Принцип инвариантности для неавтономных дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями // Сибирский математический журнал. 2016. Т. 57. № 4. С. 913–927.
4. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970.
5. *Руш Н., Абетс М., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980.
6. *Sell G.R.* Nonautonomous differential equations and topological dynamics. 1, 2 // Trans. Amer. Vath. Soc. 1967. V. 22. P. 241–283.
7. *Artstein Z.* Topological dynamics of an ordinary differential equation // J. Differ. Equations. 1977. V. 23. P. 216–243.
8. *Artstein Z.* Uniform asymptotic stability via limiting equations // J. Differ. Equations. 1978. V. 27. P. 172–189.
9. *Мартынюк А.А., Като Д., Шестаков А.А.* Устойчивость движения: метод предельных уравнений. Киев: Наукова думка, 1990.
10. *Андреев А.С.* Устойчивость неавтономных функционально-дифференциальных уравнений. Ульяновск: УлГУ, 2005.
11. *Финогенко И.А.* Предельные дифференциальные включения и принцип инвариантности неавтономных систем // Сибирский математический журнал. 2014. Т. 55. № 2. С. 454–471.
12. *Vassilyev S.N.* On the Implication of Properties of Related Systems: a Method for Obtaining Implication Conditions and Application Examples // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2020. V. 59(4). P. 479–493.

# ATTRACTION FOR MECHANICAL SYSTEMS WITH FRICTION

**I. A. Finogenko**[a]

[a] *Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS S.N. Vassilyev

In article the asymptotic behavior of systems with Coulomb’s friction represented as Lagrange’s equations of second kind is investigated. Lyapunov’s direct method in a combination to the method of the limiting equations which is going back to works G.R. Sell (1967) and Z. Artstein (1977, 1978) on topological dynamics of nonautonomous systems is used. Results generalize LaSalle’s principle of invariance.

*Keywords:* Lyapunov’s functions, method of the limiting equations, invariance principle, limiting differential inclusion, attraction, dry friction, equation of Lagrange of 2nd kind