ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 500, с. 23–25

МАТЕМАТИКА

УДК 517.583 + 512.742.72

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ УЛЬТРАДИСКРЕТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ

© 2021 г. Член-корреспондент РАН В. А. Быковский[1,*]

Поступило 06.07.2021 г.
После доработки 06.07.2021 г.
Принято к публикации 08.08.2021 г.

В работе построены три новых периодических ультрадискретных преобразования плоскости. Ранее были известны два таких преобразования.

Ключевые слова: нелинейные рекуррентные последовательности, тропические последовательности, нелинейные периодические преобразования

DOI: 10.31857/S2686954321050040

В работе [1] были построены два периодических преобразования плоскости $\mathbb{R}^2$

$$T_1(x,y) = (y,z) \quad \text{с} \quad z = \min\{-x,-x-y\},$$

$$T_2(x,y) = (y,z) \quad \text{с} \quad z = \min\{-x-y,-x-2y\},$$

периоды которых имеют длины 7 и 8 соответственно.

Процедура ультрадискретизации была введена в работах [2–4]. Ее смысл мы объясним на примере преобразования T_1. Для этого построим последовательность $u_1(n)$ $(n \in \mathbb{Z})$ с помощью рекуррентного соотношения

$$u_1(n+2)u_1(n+1)u_1(n) = \alpha u_1(n+1) + \beta.$$

Она однозначно определяется коэффициентами α, β и любыми двумя соседними элементами за исключением случаев, когда среди элементов последовательности встречается нуль. Поэтому удобно считать начальные значения $u_1(0) = x$, $u_1(1) = y$ и коэффициенты α, β формальными переменными. В этом случае элементы последовательности $u_1(n)$ – рациональные функции от переменных x, y, α, β. Пусть

$$u_1(n) = x^{p_1(n)}\frac{Q(n)}{R(n)},$$

где $p_1(n)$ – целые числа, а $Q(n)$ и $R(n)$ – полиномы, которые не делятся на переменную x. Из рекуррентного соотношения для $u_1(n)$ следует, что

$$p_1(n+2) + p_1(n+1) + p_1(n) = \min\{p_1(n+1),0\}$$

или

$$p_1(n+2) = \min\{-p_1(n),-p_1(n) - p_1(n+1)\}.$$

Последовательность $p_1(n)$ однозначно определяется начальными значениями $p_1(0) = 1$, $p_1(1) = 0$. Построим на плоскости последовательность точек

$$P_1(n) = (p_1(n), p_1(n+1)).$$

Она определяется начальной точкой $P_1(0) = (1,0)$ и рекуррентным соотношением

$$P_1(n) = T_1(P(n)).$$

Именно так в рассматриваемом случае выглядит процедура ультрадискретизации последовательности рациональных функций $u_1(n)$ и строится соответствующее ей преобразование плоскости T_1.

По аналогии с вышесказанным, рекуррентным соотношениям

$$u_2(n+2)u_2^2(n+1)u_2(n) = \alpha u_2(n+1) + \beta,$$
$$u_3(n+2)u_3(n) = \alpha u_3(n+1) + \beta,$$
$$u_4(n+2)u_4(n+1)u_4(n) = \alpha u_4^2(n+1) + \beta,$$
$$u_5(n+2)u_5^3(n+1)u_5(n) = \alpha u_5^2(n+1) + \beta,$$

после ультрадискретизации, сопоставляются следующие преобразования плоскости:

$$T_2(x,y) = (y,z) \ \text{с} \ z = \min\{-x-y,-x-2y\},$$

[1] *Институт прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук, Хабаровское отделение, Хабаровск, Россия*
[*] *E-mail: vab@iam.khv.ru*

$$T_3(x,y) = (y,z) \text{ с } z = \min\{-x,-x+y\},$$

$$T_4(x,y) = (y,z) \text{ с } z = \min\{-x-y,-x+y\},$$

$$T_5(x,y) = (y,z) \text{ с } z = \min\{-x-y,-x-3y\}.$$

Теорема 1. *Преобразования плоскости* T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 — *периодические с длинами периодов* 7, 8, 5, 9, 12 *соответственно*.

Доказательство. Для $0 \le t \le 1$ определим последовательность $P_k(t)\,(k \in \mathbb{Z})$ на плоскости с помощью рекуррентного соотношения

$$P_{k+1}(t) = T(P_k(t))$$

и начального значения

$$P_0(t) = (1-t,t).$$

Легко проверить, что она периодическая с периодом

$$(1-t,\,t),\ (t,-1),\ (-1,-t),\ (-t,1),$$
$$(1,-1+t),\ (-1+t,-1),\ (-1,1-t)$$

длины 7. При этом

$$\{P_k(t)\,|0 \le t < 1\}$$

суть прямолинейные полуинтервалы. Для $k = 0$, 1, 2, 3, 4 они не пересекаются и их объединение — выпуклый семиугольник с вершинами

$$(1,\,0),\ (0,-1),\ (-1,0),\ (0,1),\ (1,-1),\ (-1,-1),\ (-1,1).$$

Преобразование T_1 отображает этот семиугольник на себя и при этом каждая его сторона переходит в некоторую другую. Отсюда следует, для любой начальной точки P_0 на семиугольнике последовательность точек, определяемая рекуррентным соотношением $P_{k+1} = T_1(P_k)$ — периодическая с длиной периода 7. Так как для любого $r \ge 0$ последовательность $rp_1(n)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению для $p_1(n)$, и точка (0, 0) лежит внутри пятиугольника, то утверждение теоремы для преобразования T_1 справедливо при любом выборе начальной точки.

Доказательство теоремы в остальных случаях проходит по той же схеме как для T_1. Поэтому мы ограничимся выписыванием периодов.

Для преобразования T_2:

$$(1-t,\,t),\ (t,-1-t),\ (-1-t,1),\ (1,-1+t),$$
$$(-1+t,-t),\ (-t,1),\ (1,t-2),\ (t-2,1-t)$$

с длиной периода 8.

Для преобразования T_3:

$$(1-t,\,t),\ (t,-1+t),\ (-1+t,-1),\ (-1,-t),\ (-t,1-t)$$

с длиной периода 5.

Для преобразования T_4:

$$(1,-t),\ (-t,t-1),\ (t-1,1),\ (1,2-t),\ (2-t,1-t),$$
$$(1-t,-1),(-1,t),(t,1+t),(1+t,1)$$

с длиной периода 9.

Для преобразования T_5:

$$(1-t,\,t),\ (t,\,-1-2t),\ (-1-2t,\,1+t),$$
$$(1+t,-2-t),\ (-2-t,1),(1,-1+t),$$
$$(-1+t,-t),(-t,1),\ (1,\,t-3),\ (t-3,\,2-t),$$
$$(2-t,-3+2t),\ (-3+2t,1-t)$$

с длиной периода 12.

Более громоздкие по сравнению с предложенным в настоящей работе доказательства периодичности T_1 и T_2 приведены в работе [5].

Отметим также, что последовательности $u_1(n)$, $u_2(n)$ и $u_3(n)$ интегрируемы в том смысле, что величины

$$u_1(n) + u_1(n+1) + \frac{\alpha}{u_1(n)} + \frac{\alpha}{u_1(n+1)} + \frac{\beta}{u_1(n)u_1(n+1)},$$

$$u_2(n)u_2(n+1) + \frac{\alpha}{u_2(n)} + \frac{\alpha}{u_2(n+1)} + \frac{\beta}{u_2(n)u_2(n+1)},$$

$$u_3(n) + u_3(n+1) + \frac{\alpha^2+\beta}{u_3(n)} + \frac{\alpha^2+\beta}{u_3(n+1)} +$$
$$+\alpha\frac{u_3(n)}{u_3(n+1)} + \alpha\frac{u_3(n+1)}{u_3(n)} + \frac{\alpha\beta}{u_3(n)u_3(n+1)}$$

являются инвариантами, не зависящими от n (см. [6—8] соответственно).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nobe A.* Ultradiscrete QRT maps and tropical elliptic curves // J. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2008. V. 41. № 12. 125205, 12 p.
2. *Takahashi D., Satsuma J.* A Soliton Cellular Automaton // Journal of the Physical Society of Japan. 1990. V. 59. № 10. P. 3514–3519.
3. *Tokihiro T., Takahashi D., Matsukidaira J, Satsuma J.* A From Soliton Equations to Integrable Cellular Automata through a Limiting Procedure // Physical Review Letters. 1996. V. 76. 3247.
4. *Matsukidaira J., Satsuma J., Takahashi D., Tokihiro T., Torii M.* Toda-type cellular automaton and its N-soliton solution // Physics Letters A. 1997. V. 225. Iss. 4–6. P. 287–295.
5. *Nakata Y.* The solution to the initial value problem for the ultradiscrete Somos-4 and 5: arXiv:1701.04262. 2017.
6. *Fordy A.P., Hone A.* Symplectic Maps from Cluster Algebras // SIGMA. 2011. V. 7. 091. P. 1–12.
7. *Swart C., Hone A.* Integrality and the Laurent phenomenon for Somos 4 sequences: arXiv:math/0508094. 2006.
8. *Swart C., Hone A.* Efficient ECM factorization in parallel with the Lyness map: arXiv:2002.03811. 2020.

PERIODIC ULTRADISCRETE PLANE TRANSFORMATIONS

Corresponding Member of the RAS V. A. Bykovskii[a]

[a] *Institute of Applied Mathematics, Khabarovsk Division, Far Easern Branch of the Russian Academy of Sciences, Khabarovsk, Russian Federation*

In this paper we construct three new periodic ultradiscrete plane transformations. Two such transformations were previously known.

Keywords: nonlinear recurrent sequences, tropical sequences, nonlinear periodic transformations