

УДК 519.63

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ЗАРЕМБЫ

© 2021 г. С. Д. Алгазин<sup>1,\*</sup>

Представлено академиком РАН В.П. Масловым 26.03.2021 г.

Поступило 29.03.2021 г.

После доработки 28.04.2021 г.

Принято к публикации 10.08.2021 г.

Рассматривается задача на собственные значения для двумерного оператора Лапласа со смешанными краевыми условиями (задача Зарембы), которая (предположительно) имеет внутри области гладкое решение. Вычисления показывают, что у оператора  $-\Delta$  есть отрицательное собственное значение, т.е. он не положительно определен.

**Ключевые слова:** численные алгоритмы без насыщения, задача Зарембы, задачи на собственные значения со смешанными краевыми условиями

**DOI:** 10.31857/S2686954321050039

### ВВЕДЕНИЕ

Для решения рассматриваемой задачи используется метод без насыщения К.И. Бабенко [1], который автоматически настраивается на гладкость решения (его точность тем выше, чем большим условиям гладкости удовлетворяет решение). А priori гладкость решения может быть неизвестна. Подробнее с многочисленными примерами расчета собственных значений для оператора Лапласа с однородными краевыми условиями см. [2].

Задача Зарембы опубликована в 1910 г. [3]. Современные исследования этой задачи проводили Н. Гарханов, А.А. Шлапунов и др., см. [4–9]. В этих работах задача Зарембы рассматривается аналитически в круге. В настоящей работе задача Зарембы исследуется численно. Задача рассматривается в произвольной гладкой области, для которой известно конформное отображение этой области на круг (аналитическое или численное). В последнем случае достаточно знать параметрические уравнения границы.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В произвольной области  $G \in R^2$  с достаточно гладкой границей  $\partial G$  рассмотрим задачу (1)–(3):

$$\Delta u(z) + F(z) = 0, \quad z \in G, \quad (1)$$

$$u|_{\partial G_1} = 0, \quad (2)$$

$$Au + \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial G_2} = 0. \quad (3)$$

Здесь функция  $F(z)$  либо задана, либо  $F(z) = [Q(z) + \lambda P(z)]u(z)$ , где  $Q(z)$  и  $P(z)$  – заданные функции,  $\partial G = \partial G_1 \cup \partial G_2$ , и в этом случае имеем задачу на собственные значения для оператора Лапласа;  $A$  – заданная на границе  $\partial G_2$  гладкая функция;  $\mathbf{n}$  – единичный вектор внешней нормали к  $\partial G_2$ . В дальнейшем будем считать, что  $F$ ,  $Q$  и  $P$  – гладкие функции,  $P(z) \geq \delta > 0$ . Пусть  $z = \varphi(\zeta)$ ,  $|\zeta| \leq 1$  – конформное отображение единичного круга на область  $G$ , тогда в плоскости  $\zeta$  формально получаем те же соотношения (1)–(3), где, однако, вместо  $u(z)$  и  $F(z)$  следует писать  $u(\zeta) = u(z(\zeta))$  и  $|\varphi'(\zeta)|^2 F(z(\zeta))$ , а вместо  $A - \alpha(\theta) = A(z(e^{i\theta}))|\varphi'(e^{i\theta})|$ .

Обозначим через  $K(\zeta, \xi) = -\frac{1}{2\pi} \ln|1 - \zeta\bar{\xi}|/(\zeta - \xi)$  функцию Грина оператора Лапласа в круге с краевым условием Дирихле. Из (1)–(3) имеем

$$\Delta u(\zeta) + |\varphi'(\zeta)|^2 (q(\zeta) + \lambda p(\zeta))u(\zeta) = 0, \quad \zeta = r \cdot e^{i\theta}, \quad (4)$$
$$q(\zeta) = Q(z(\zeta)), \quad p(\zeta) = P(z(\zeta)),$$

$$u|_{r=1} = 0, \quad \theta \in g_1. \quad (5)$$

$$\alpha u + \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0, \quad \theta \in g_2. \quad (6)$$

Из (4)–(6) следует

$$u(\zeta) = - \int_{|\xi| \leq 1} K(\zeta, \xi) |\varphi'(\xi)|^2 [q(\xi) + \lambda p(\xi)] u(\xi) d\xi + \int_{\theta_1}^{\theta_2} K_0(\zeta, \theta) \psi(\theta) d\theta, \quad (7)$$

<sup>1</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, Москва, Россия

\*E-mail: algazinsd@mail.ru

где  $g_2 = [\theta_1, \theta_2]$ . Здесь  $\psi(\theta)$  – значение  $u$  на границе. Для задачи Дирихле  $\psi(\theta) = 0$ , а для задачи Зарембы должна быть выбрана с учетом краевого условия (6):

$$\begin{aligned} K_0(\zeta, \theta) &= \frac{1 - \rho^2}{2\pi(1 + \rho^2 - 2\rho\cos(\theta - \varphi))} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \rho^{|n|} e^{in(\theta - \varphi)}, \\ \zeta &= \rho e^{i\varphi}, \quad 0 \leq \rho < 1. \end{aligned}$$

Для интерполяции функции  $|\varphi'(x)|^2 [q(\xi) + \lambda p(\xi)] u(\xi)^1$  применяется глобальная интерполяционная формула К.И. Бабенко для функции двух переменных в круге, см. [10, формула 3.2.1]. Для погрешности этой формулы  $\rho_M(\cdot; f)$  справедлива

**Теорема (К. И. Бабенко).** *Рассмотрим класс функций  $H_\infty^M(K; D) \subset C(D)$ , удовлетворяющих в круге  $D$  условиям  $\left| \frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^l} \right| \leq K, k+l \leq \mu$ , тогда, если  $f \in H_\infty^M(K; D)$ , то*

$$|\rho_M(\cdot; f)|_\infty \leq c_\mu K M^{-\mu/2} \log^2 M, \quad (8)$$

где  $c_\mu$  – константа, зависящая от  $\mu$ .

Таким образом, из рассмотрения формулы (8) видно, что при одинаковом числе узлов интерполяции  $M$  скорость убывания погрешности интерполяционной формулы (8) возрастает с ростом  $\mu$ , т.е. с ростом гладкости интерполируемой функции  $f$ . Это означает, что полученная интерполяционная формула не имеет насыщения.

## 2. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ

В силу граничного условия (6) последний интеграл в (7) принимает вид

$$\tilde{H}_j^0(\zeta; \theta_1, \theta_2) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} K_0(\zeta, \theta) \psi(\theta) d\theta. \quad (8)$$

Здесь  $\psi(\theta)$  на части границы  $g_2 = [\theta_1, \theta_2]$  неизвестно и должно быть определено из граничного условия (6). Сделаем в интеграле (8) замену:

$$\theta = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} x + \frac{\theta_2 + \theta_1}{2}. \quad (9)$$

Тогда получаем  $\tilde{H}_j^0(\zeta; \theta_1, \theta_2) = \frac{2}{\theta_2 - \theta_1} \int_{-1}^{+1} K_0(\zeta, \theta) \psi(x) dx$ , где  $\theta$  определено в (9). Для функции  $\psi(x)$  применим интерполяционную формулу Лагранжа с узлами в нулях полинома Чебышева степени  $l$  [1]:

<sup>1</sup> Полученные интегралы вычисляются аналитически.

$$\begin{aligned} \psi(x) &\sim \sum_{i=1}^l \frac{T_l(x) \psi_i}{T_l'(x_i)(x - x_i)}, \\ x_i &= \cos \frac{(2i-1)\pi}{2l}, \quad T_l(x) = \cos(l \arccos(x)), \\ \psi(x) &= \sum_{k=0}^{l-1} a_k^{(l)} T(x)_k, \quad a_k^{(l)} = \sum_{j=1}^l \psi_j T_k(x_j), \\ x_j &= \cos \frac{(2j-1)\pi}{2l}, \quad T_l'(x_i) = l \frac{(-1)^{i-1}}{\sin \frac{(2i-1)\pi}{2l}}. \end{aligned}$$

Дело сводится к вычислению интегралов

$$h_k(\zeta; \theta_1, \theta_2) = \frac{2}{\theta_2 - \theta_1} \int_{-1}^{+1} K_0(\zeta, \theta) T_k(x) dx, \quad (10)$$

где  $\theta$  определено в (9),  $T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)$ . Отсюда следует

$$\begin{aligned} \tilde{H}_j^0(\zeta; \theta_1, \theta_2) &= \frac{2}{\theta_2 - \theta_1} \sum_{j=1}^l \left\{ \frac{2}{l} \sum_{k=0}^{l-1} T_k(x_j) h_k(\zeta; \theta_1, \theta_2) \right\} \psi_j, \\ \psi_j &= \psi(\theta_j) = \psi \left( \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} x_j + \frac{\theta_2 + \theta_1}{2} \right), \\ x_j &= \cos \frac{(2j-1)\pi}{2l}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$H_j^0(\zeta; \theta_1, \theta_2) = \frac{2}{\theta_2 - \theta_1} \frac{2}{l} \sum_{k=0}^{l-1} T_k(x_j) h_k(\zeta; \theta_1, \theta_2) \Rightarrow \quad (11)$$

$\tilde{H}_j^0(\zeta; \theta_1, \theta_2) = \sum_{j=1}^l H_j^0(\zeta; \theta_1, \theta_2) \psi_j$ . Далее, подставляя в (7), получаем:

$$u(\zeta) = \sum_i H_i(\zeta) f_i + \sum_{j=1}^l H_j^0(\zeta; \theta_1, \theta_2) \psi_j, \quad \zeta = \rho e^{i\varphi}. \quad (12)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \theta_i &= \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} x_i + \frac{\theta_2 + \theta_1}{2}, \\ x_i &= \cos \frac{(2i-1)\pi}{2l}, \quad i = 1, 2, \dots, l. \end{aligned} \quad (13)$$

Тогда из (12) следует

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^l B_{ij} \psi_j + \sum_p H_p'(\theta_i) f_p, \\ \text{где} \quad H_p'(\theta_i) = \left. \frac{\partial H_p(\rho e^{i\varphi})}{\partial \rho} \right|_{\substack{\rho=1 \\ \varphi=\theta_i}}, \end{aligned}$$

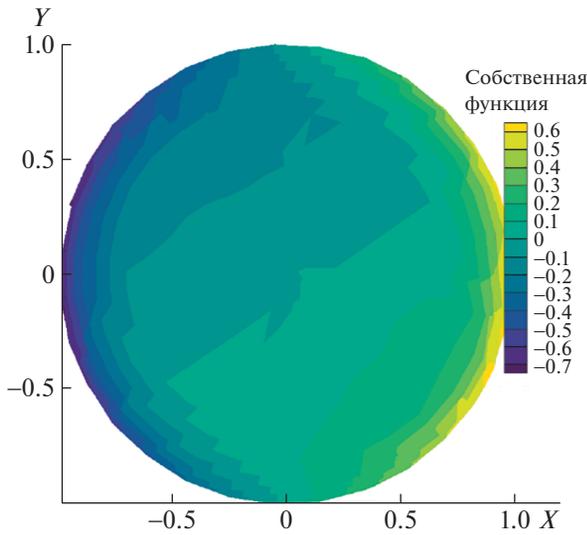


Рис. 1.  $\lambda_1 = -1.828$ .

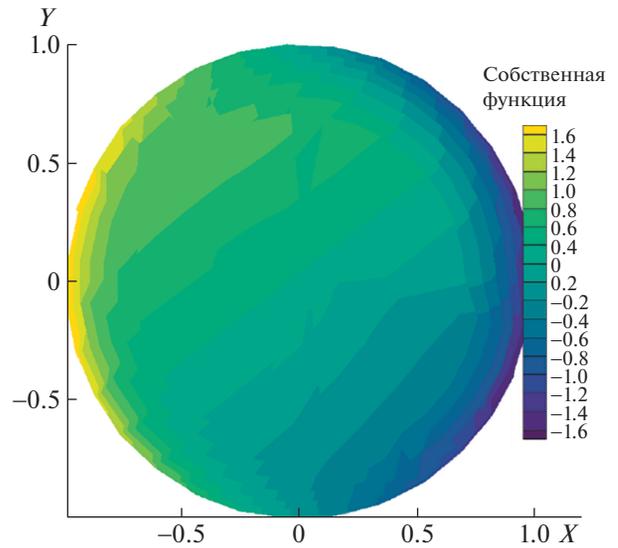


Рис. 2.  $\lambda_2 = 5.194$ .

$$B_{ij} = \alpha_i \delta_{ij} + H_j^{0'}(\theta_i; \theta_1, \theta_2), \quad \alpha_i = \alpha(\theta_i),$$

$$H_j^{0'}(\theta_i; \theta_1, \theta_2) = \left. \frac{\partial H_j^0(\rho e^{i\varphi}; \theta_1, \theta_2)}{\partial \rho} \right|_{\substack{\rho=1 \\ \varphi=\theta_i}}.$$

Пусть  $C = B^{-1} \Rightarrow \psi_j = -\sum_{i=1}^l C_{ji} \left( \sum_p H_p'(\theta_i) f_p \right)$ .

Подставляем в соотношение (12), тогда имеем

$$u(\zeta) = \sum_i H_i(\zeta) f_i + \sum_{j=1}^l H_j^0(\zeta; \theta_1, \theta_2) \sum_{i=1}^l C_{ji} \sum_p H_p'(\theta_i) f_p. \quad (14)$$

Пусть в (14)  $\zeta$  пробегает узлы интерполяции внутри круга, тогда имеем

$$u = (H - E)Z(Q + \lambda P)u,$$

$$E_{pq} = \sum_{j=1}^l H_j^0(\zeta_q; \theta_1, \theta_2) \sum_{i=1}^l C_{ji} \sum_p H_p'(\theta_i),$$

где  $\theta_i$  определено в (13).

### 3. РЕКУРРЕНТНАЯ ФОРМУЛА

Формулы для  $H_j^0(\zeta; \theta_1, \theta_2)$  (см. (11))  $\Rightarrow$  требуются формулы для  $h_k(\zeta; \theta_1, \theta_2)$  (см. (10)),  $K_0(\zeta, \theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-m}^{n+m} \rho^{|n|} e^{in(\theta-\varphi)}$ ,  $\zeta = \rho e^{i\varphi}$ . Следовательно, нужны

формулы для интегралов  $g_{ln} = \int_{-1}^{+1} e^{in\theta} T_l(x) dx$ , где  $\theta$  определено в (9). Обозначим:

$$e_n^{(1)} = e^{in\theta_1}, \quad e_n^{(2)} = e^{in\theta_2}, \quad c_n^{(1,2)} = \frac{2}{in(\theta_2 - \theta_1)},$$

$$f_n(\theta_1, \theta_2) = c_n^{(1,2)}(e_n^{(2)} - e_n^{(1)}),$$

- 1)  $g_{0n} = f_n(\theta_1, \theta_2), g_{00} = 2;$
- 2)  $g_{1n} = c_n^{(1,2)}(e_n^{(2)} + e_n^{(1)} - f_n(\theta_1, \theta_2)), g_{10} = 0;$
- 3)  $g_{2n} = c_n^{(1,2)}(e_n^{(2)} - e_n^{(1)} - 4g_{1n}), g_{20} = -2/3;$
- 4)  $g_{l+1, n} = \frac{1}{l-1} g_{l-1, n} - 2c_n^{(1,2)} g_{l, n} - \frac{2}{l-1} (e_n^{(1)} (-1)^l + e_n^{(2)}), l \geq 2.$

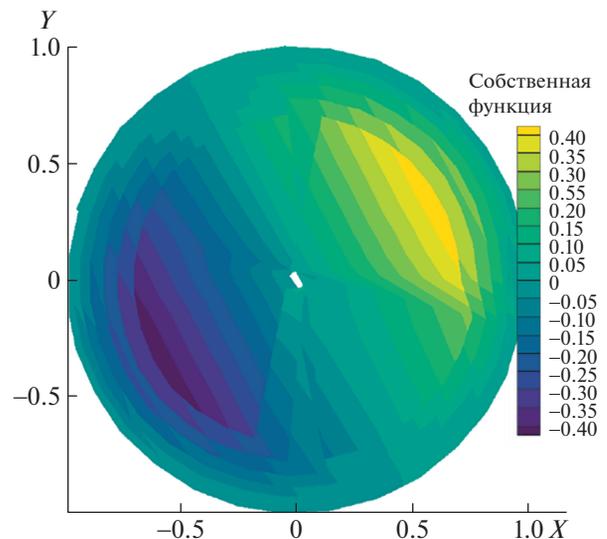


Рис. 3.  $\lambda_3 = 14.681970642$ .

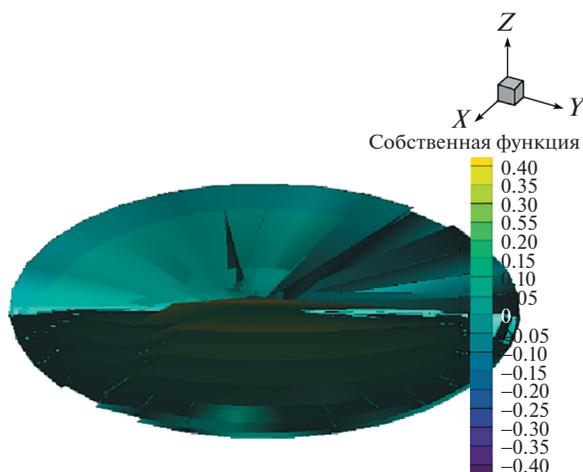
**Таблица 1.** Собственные значения задачи Зарембы для круга и эпитрохоиды,  $\lambda_i, i = 1, 2, 3, 4$ 

$i$	Круг		Эпитрохоида, $\varepsilon = 0.0625, n = 12$	
	/27,25,23,21,17,9,7,3,3/	15 × 31	/27,25,23,21,17,9,7,3,3/	15 × 31
1	-2.308	-1.828	-2.389	-1.423
2	5.072	5.194	5.313	5.463
3	14.681970642	14.681970642	14.650	14.648504095
4	25.820	22.465	20.705	17.674421255

#### 4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Расчеты проводились для круга единичного радиуса ( $A = 1, \theta_1 = 0, \theta_2 = \pi, Q \equiv 0, P \equiv 1$ ) и области, получающейся из круга конформным отображением:  $z = \zeta(1 + 0.0625 \cdot \zeta^{12})$  при тех же параметрах граничных условий ( $A = 1, \theta_1 = 0, \theta_2 = \pi$ ). Граница этой области имеет в 12 точках кривизну, равную  $-2710$ , т.е. порядка  $10^3$ . В круге выбиралась сетка из 9 окружностей с расположением точек по окружностям (начиная с первой, ближайшей к границе): /27,25,23,21,17,9,7,3,3/. Второй расчет проводится на сетке из 15 окружностей по 31 точке на каждой окружности (это максимальная допустимая методикой сетка).

Из рассмотрения табл. 1 видим, что у оператора  $-\Delta$  есть отрицательное собственное значение, т.е. он не положительно определен. Третье собственное значение в круге совпадает со всеми знаками на двух сетках. Видимо, это объясняется строением собственной формы (рис. 4). Собственные формы для трех первых собственных значений в круге приведены на рис. 1–3.

**Рис. 4.**  $\lambda_3 = 14.681970642$ .

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На доступных для описанной методики сетках с приемлемой точностью вычислены по четыре собственных значения задач Заремба в круге и в области, ограниченной эпитрохоидой (эпитрохоида кривая, которую описывает точка малого круга, катящегося по большому кругу, в данном случае по кругу радиуса 1; для этой области известно конформное отображение на эту область). Третье собственное значение для круга определено с 9-ю знаками после запятой, а для эпитрохоиды с 3-мя знаками после запятой. Погрешность определения остальных собственных значений легко найти из табл. 1. Из рассмотрения таблицы видим, что у оператора  $-\Delta$  есть отрицательное собственное значение, т.е. он не положительно определен.

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена по теме государственного задания. Проект № АААА-А20-120011690132-4.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабенко К.И.* Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. 744 с.; 2-е изд., испр. и доп. / Под ред. А.Д. Брюно. М.; Ижевск: РХД, 2002. 847 с.
2. *Бабенко К.И., Алгазин С.Д.* Об одном численном алгоритме решения задачи на собственные значения для линейных дифференциальных операторов. М., 1978 (препринт ИПМ АН СССР, № 46).
3. *Zaremba S.* Sur un problème mixte relatif à l'équation de Laplace // Bull. Acad. Sci. Cracovie. 1910. P. 314–344.
4. *Пейчева А.С.* О спектральных свойствах операторов, ассоциированных с некоэрцитивными смешанными задачами для эллиптических систем // 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ, Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Красноярск, 2018, 138 с.
5. *Laptev Ari, Peicheva A., Shlapunov A.* Finding Eigenvalues and Eigenfunctions of the Zaremba Problem for the Circle // Complex Anal. Oper. Theory. 2017. V. 11(4). P. 895–926.

6. *Shlapunov A., Tarkhanov N.* On completeness of root functions of Sturm–Liouville problems with discontinuous boundary operators // *J. Differential Equations*. 2013. V. 255. P. 3305–3337.
7. *Shlapunov A., Tarkhanov N.* Mixed Problems with Parameter // *Russian J. Math. Phys.* 2005. V. 12. No. 1. P. 97–119.
8. *Тарханов Н., Шлапунов А.А.* Задачи Штурма–Лиувилля в весовых пространствах в областях с негладкими ребрами. I // *Математические труды*. 2015. Т. 18. № 1. P. 118–189. DOI: 10.17377.
9. *Тарханов Н., Шлапунов А.А.* Задачи Штурма–Лиувилля в весовых пространствах в областях с негладкими ребрами. II // *Математические труды*. 2015. Т. 18. № 2. С. 133–204.
10. *Алгазин С.Д.* Численные алгоритмы классической математической физики. М.: Диалог-МИФИ, 2010. 240 с.

## NUMERICAL RESEARCH OF THE PROBLEM ZAREMBA

**S. D. Algazin<sup>a</sup>**

<sup>a</sup>*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.P. Maslov

In the present work we consider an eigenvalue problem for a two-dimensional Laplace operator with mixed boundary condition (the Zaremba problem) which (presumably) has a smooth solution inside the domain. Calculations show that the operator  $-\Delta$  has a negative eigenvalue, i.e., it is not positively defined.

*Keywords:* problem of Zaremba, Laplace’s equation, problem of eigen values