ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 500, с. 10–15

МАТЕМАТИКА

УДК 519.21

О ГАУССОВСКИХ ОПЕРАТОРАХ ПЕРЕХОДА

Г. А. Алексеев[1,2,*], К. А. Афонин[1,2], В. И. Богачев[1,2,3,4,*]

Представлено академиком РАН А.С. Холево 05.04.2021 г.
Поступило 09.04.2021 г.
После доработки 09.04.2021 г.
Принято к публикации 13.08.2021 г.

В работе получен ряд обобщений известной характеризации гауссовских операторов перехода.

Ключевые слова: гауссовская мера, феллеровский оператор
DOI: 10.31857/S2686954321050027

В теореме 1 работы А.С. Холево [1] (см. также [2]) установлено, что всякий феллеровский линейный оператор T в пространстве $M(\mathbb{R}^n)$ ограниченных борелевских мер на $\mathbb{R}^n$, переводящий гауссовские меры в гауссовские, представляет собой свертку фиксированной гауссовской меры с образом меры при линейном операторе, т. е. имеет вид

$$T\mu = \gamma_0 * (\mu \circ S^{-1}), \qquad (1)$$

где γ_0 – некоторая гауссовская мера, $\mu \circ S^{-1}$ – образ меры μ при некотором линейном операторе S, задаваемый на борелевских множествах формулой

$$(\mu \circ S^{-1})(B) = \mu(S^{-1}(B)).$$

В нашей работе теорема 1 работы [1] обобщена в нескольких направлениях: 1) показано, что достаточно иметь гауссовость образов при T лишь для гауссовских мер, сосредоточенных на аффинных прямых, 2) получен бесконечномерный аналог, 3) ослаблено условие феллеровости оператора T, в частности, достаточно его секвенциальной непрерывности в слабой топологии.

Сразу отметим, что оператор T указанного вида однозначно восстанавливается по образам дираковских мер δ_x, ибо $\gamma_0 = T\delta_0$ и Sx есть разность средних гауссовских мер $T\delta_x$ и $T\delta_0$. Поэтому можно было бы предположить, что достаточно гауссовости образов мер Дирака. Однако это неверно уже на прямой: в качестве $T\mu$ можно взять образ меры μ при гомеоморфизме $x \mapsto x^3$. Тем не менее гауссовости образов одномерных гауссовских мер оказывается достаточно. Ниже приведены простые примеры, показывающие, что нельзя отказаться и от условия феллеровости T, хотя удается его ослабить.

Для вполне регулярного топологического пространства X обозначим через $C_b(X)$ пространство ограниченных непрерывных функций на X и через $M(X)$ пространство всех ограниченных (возможно знакопеременных) радоновских мер на X, см. [3]. Пространство $M(X)$ можно наделить нормой $\|\mu\|$ полной вариации, а также слабой топологией, порожденной двойственностью с пространством $C_b(X)$, см. [3].

Отображение $T\colon M(X) \to M(X)$ называется феллеровским, если существует такое отображение $T^*\colon C_b(X) \to C_b(X)$, что

$$\int_X f(x)T\mu(dx) = \int_X T^*f(x)\mu(dx) \quad \forall f \in C_b(X), \quad \mu \in M(X)$$

Феллеровость равносильна линейности и непрерывности в слабой топологии. При этом оператор T автоматически оказывается ограниченным относительно нормы полной вариации (это следует из теоремы Банаха–Штейнгауза).

Гауссовской мерой на $\mathbb{R}$ называется образ стандартной гауссовской меры с плотностью $(2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2}$ при аффинной функции. В том числе гауссовской

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[2] *Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия*
[3] *Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия*
[4] *Православный Свято-Тихоновский гуманитарный университет, Москва, Россия*
**E-mail: nihilust.nlevi@yandex.ru*
**E-mail: vibogach@mail.ru*

считается дираковская мера δ_a в точке a. Гауссовской мерой (см. [4]) на локально выпуклом пространстве X с топологическим сопряженным X^* будем называть вероятностную радоновскую меру γ на X, для которой одномерные образы $\gamma \circ f^{-1}$ гауссовы. Такая мера обладает средним $a(\gamma)$, для которого $f(a(\gamma))$ есть интеграл от f по мере γ для всякого $f \in X^*$. Одномерной гауссовской мерой называется мера, сосредоточенная на одномерном аффинном подпространстве, т. е. образ стандартной гауссовской меры при аффинном отображении вида

$$L_{x,y} : \mathbb{R} \to X, \quad t \mapsto tx + y$$

с одномерным образом, где $x, y \in X$.

Т е о р е м а 1. *Представление* (1) *феллеровских операторов в $M(X)$ остается в силе и для локально выпуклого пространства X, причем гауссовость образов при T достаточно иметь лишь для одномерных гауссовских мер.*

Ввиду этого обобщения доказательство из работы [1] для $\mathbb{R}^n$ становится заметно короче (ниже приведено это рассуждение). На самом деле нами доказано более общее утверждение, причем и для $\mathbb{R}$ оно несколько отличается от результата работы [1] (хотя при этом применен метод из [1]).

Обозначим через $LG(X)$ линейную оболочку множества гауссовских радоновских мер на локально выпуклом пространстве X.

Т е о р е м а 2. *Пусть линейное отображение T: $LG(X) \to M(X)$ переводит все одномерные гауссовские меры в гауссовские, причем для всякого $f \in X^*$ есть такая функция g_f: $X \to \mathbb{C}$, ограниченная и непрерывная на каждой аффинной прямой, что для всех одномерных гауссовских мер ν имеем*

$$\int_X \exp(if)d(T\nu) = \int_X g_f d\nu.$$

Тогда найдутся гауссовская мера γ_0 и линейный оператор S: $X \to X$ такие, что (1) *верно для всех дираковских мер.*

Если же, кроме того, оператор T задан и линеен на всем пространстве $M(X)$ и непрерывен в слабой топологии, то оператор S непрерывен и T имеет вид (1) *для всех мер из $M(X)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $x, y \in X$ и $f \in X^*$ положим $g_{x,y,f}(t) = g_f(tx + y)$,

$$G_{x,y,f}\colon LG(\mathbb{R}) \to LG(\mathbb{R}),$$
$$G_{x,y,f}\nu = T(\nu \circ L_{x,y}^{-1}) \circ f^{-1}, \quad \nu \in LG(\mathbb{R}).$$

Тогда $G_{x,y,f}$ по условию отображает гауссовские меры на прямой в гауссовские. Кроме того, для каждого $s \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(ist)G_{x,y,f}\nu(dt) =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} g_{x,y,sf}(t)\nu(dt), \quad \nu \in LG(\mathbb{R}).$$

Это означает, что экспоненте $\exp(is(\cdot))$ можно сопоставить функцию

$$G_{x,y,f}^{*} \exp(is(\cdot)) = g_{x,y,sf} \in C_b(\mathbb{R}),$$

интеграл от которой по мере ν равен интегралу от $\exp(is(\cdot))$ по мере $G_{x,y,f}\nu$. Значит, согласно теореме 3 ниже, $G_{x,y,f}$ имеет представление (1), т.е.

$$G_{x,y,f}\nu = \sigma_{x,y,f} * \nu \circ S_{x,y,f}^{-1} \quad \forall \nu \in LG(\mathbb{R}), \tag{2}$$

где $\sigma_{x,y,f} = G_{x,y,f}\delta_0 = T(\delta_y) \circ f^{-1}$ и $S_{x,y,f}$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – линейная функция, $S_{x,y,f}(t) = s_{x,y,f}t, t \in \mathbb{R}$. Подставив в (2) меру Дирака $\nu = \delta_t, t \in \mathbb{R}$, получим

$$G_{x,y,f}\nu = T(\delta_{tx+y}) \circ f^{-1} = T(\delta_y) \circ f^{-1} * \delta_{S_{x,y,f}(t)}. \tag{3}$$

Из (3) следует равенство средних

$$f(a_{T(\delta_{tx+y})}) = f(a_{T(\delta_y)}) + s_{x,y,f}t. \tag{4}$$

Положим

$$Sx := a_{T\delta_x} - a_{\gamma_0}, \quad \gamma_0 = T\delta_0.$$

Докажем линейность S. В самом деле, равенство (4) принимает вид

$$f(S(tx + y)) = f(Sy) + s_{x,y,f}t. \tag{5}$$

Так как $S(0) = 0$, то при $y = 0$ получим в (5) для всех $t \in \mathbb{R}$ равенство

$$f(S(tx)) = s_{x,0,f}t = tf(Sx) = f(tSx).$$

В силу произвольности $f \in X^*$ заключаем, что

$$S(tx) = tS(x) \quad \forall x \in X, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Теперь запишем (5) в виде

$$\begin{aligned} f(S(tx + y)) - f(Sy) &= \\ = ts_{x,y,f} &= t(f(S(x + y)) - f(Sy)). \end{aligned} \tag{6}$$

Воспользовавшись однородностью S, имеем

$$f(S(x + y/t)) - f(Sy)/t = f(S(x + y)) - f(Sy). \tag{7}$$

Поменяв x, y в (6) местами, получим, что

$$\lim_{t\to 0} f(S(x+ty)) = f(Sx).$$

Тогда, переходя к пределу при $t \to \infty$ в (7), заключаем, что для всех $x, y \in X$ и $f \in X^*$ выполнено равенство

$$f(Sx) = f(S(x+y)) - f(Sy) = f(S(x+y) - Sy).$$

Поэтому S аддитивно. Линейность S доказана.

Теперь установим, что T имеет вид (1) для дираковских мер. Действительно, взяв в равенстве (3) вектор $y = 0$ и число $t = 1$ и учитывая, что

$$f(Sx) = s_{x,0,f} = S_{x,0,f}(1),$$

получим

$$T(\delta_x) \circ f^{-1} = \gamma_0 \circ f^{-1} * \delta_{f(Sx)} \quad \forall f \in X^*.$$

Значит, $T\delta_x = \gamma_0 * \delta_{Sx}$ для всех $x \in X$. Первое утверждение доказано. Перейдем к доказательству второго утверждения. Из непрерывности T следует, что для всякой направленности элементов $x_\alpha \in X$, сходящейся к нулю, имеет место слабая сходимость мер

$$T(\delta_{x_\alpha}) = \gamma_0 * \delta_{Sx_\alpha} \Rightarrow \gamma_0.$$

Выведем из этого непрерывность S. Предположим, что S разрывно в нуле. Тогда найдутся направленность элементов $x_\alpha \in X$ и непрерывная полунорма q такие, что $x_\alpha \to 0$, но $q(Sx_\alpha) > 1$ для всех α. Кроме того, существует $R > 0$ такое, что $\gamma(q < R) > 1/2$. Положим $V = \{q < R\}$. Тогда $S(2Rx_\alpha) \notin 2V$ для всех α. Поэтому $V \cap (V - S(2Rx_\alpha)) = \varnothing$, откуда

$$\gamma(V - S(2Rx_\alpha)) = \gamma * \delta_{S(2Rx_\alpha)}(V) < \frac{1}{2},$$

что противоречит слабой сходимости $\gamma * \delta_{S(2Rx_\alpha)}$ к мере γ. Так как $LG(X)$ плотно в $M(X)$ в слабой топологии, то T имеет вид (1) на $M(X)$.

Итак, теперь гауссовость образов достаточно проверять лишь для гауссовских мер на аффинных прямых. Осталось доказать теорему 2 для $\mathbb{R}$. Применим метод работы [1] с заметными упрощениями для $n = 1$. Гауссовскую меру на $\mathbb{R}$ со средним a и дисперсией σ обозначим через $\mu_{a,\sigma}$.

Т е о р е м а 3. *Пусть отображение* $T: LG(\mathbb{R}) \to LG(\mathbb{R})$ *переводит гауссовские меры в гауссовские, причем для каждого* $\lambda \in \mathbb{R}$ *есть такая функция* $g_\lambda \in C_b(\mathbb{R})$, *что*

$$\int \exp(i\lambda x) T\mu(dx) = \int g_\lambda(x)\mu(dx) \quad \forall \mu \in LG(\mathbb{R}).$$

Тогда T линейно и найдутся такие гауссовская мера γ_0 *и линейная функция* $S: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *что* (1) *верно для всех* $\mu \in LG(\mathbb{R})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отображение T линейно на $LG(\mathbb{R})$, ибо правая часть равенства выше линейна по μ и преобразование Фурье инъективно. Гауссовская мера $\mu_{x,t}$ с $t \geq 0$ отображается в гауссовскую меру $T\mu_{x,t} = \mu_{a(x,t),\sigma(x,t)}$. Функции $a(x,t)$ и $\sigma(x,t)$ непрерывны по совокупности переменных. Это следует из равносильности поточечной сходимости преобразований Фурье гауссовских мер и сходимости средних и дисперсий и того, что для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ имеем

$$F(\mu_{a(x,t),\sigma(x,t)})(\lambda) = \int \exp(i\lambda y) T\mu_{x,t}(dy) = \int g_\lambda(y)\mu_{x,t}(dy),$$

где через $F(\mu)$ обозначено преобразование Фурье меры μ. В частности,

$$F(\mu_{a(x,0),\sigma(x,0)})(\lambda) = \int g_\lambda(y)\mu_{x,0}(dy) = g_\lambda(x),$$

откуда получаем

$$F(\mu_{a(x,t),\sigma(x,t)})(\lambda) = \int F(\mu_{a(y,0),\sigma(y,0)})(\lambda)\mu_{x,t}(dy), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Рассмотрим задачу Коши для одномерного уравнения теплопроводности

$$\partial_t u = 2^{-1}\partial_x^2 u, \quad u(x,0) = g_\lambda(x). \tag{9}$$

Так как плотность меры $\mu_{x,t}$ является фундаментальным решением уравнения теплопроводности, то (8) означает, что функция

$$u_\lambda(x,t) = F(\mu_{a(x,t),\sigma(x,t)})(\lambda)$$

есть решение (9). Оно бесконечно дифференцируемо по (x,t) при $t > 0$, что дает гладкость функций $a(x,t)$ и $\sigma(x,t)$ в той же области. Подставляя

$$u_\lambda(x,t) = \exp(i\lambda a(x,t) - 2^{-1}\lambda^2\sigma(x,t))$$

в уравнение теплопроводности и дифференцируя, получаем

$$i8\lambda\partial_t a - 4\lambda^2\partial_t\sigma = i4\lambda\partial_x^2 a - 2\lambda^2\partial_x^2\sigma + (i2\lambda\partial_x a - \lambda^2\partial_x\sigma)^2.$$

Так как левая часть содержит члены не выше второго порядка по λ, то имеем $\partial_x\sigma = 0$. Учитывая это, приходим к двум уравнениям

$$2\partial_t a = \partial_x^2 a, \quad \partial_t\sigma = (\partial_x a)^2. \tag{10}$$

Поскольку σ не зависит от x, то второе уравнение в (10) дает равенство

$$a(x,t) = A_t x + a(0,t),$$

т.е. функция $a(x,t)$ линейна по x. Тогда с учетом первого уравнения в (10) получим, что $a(x,t)$ не зависит от t. Таким образом,

$$a(x,t) = a(x) = Ax + a(0,0),$$
$$a(0,0) = a_{T\mu_{0,0}} = a_{T\delta_0}.$$

Тогда снова из второго равенства в (10) видно, что функция $\sigma(x,t)$ линейна по t. Окончательно получаем

$$\sigma(x,t) = A^2 t + \sigma(0,0), \quad \sigma(0,0) = \sigma_{T\mu_{0,0}} = \sigma_{T\delta_0}.$$

Положим $S(x) = Ax$. Тогда для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнено равенство преобразований Фурье

$$\begin{aligned} u_\lambda(x,t) &= F(T\mu_{x,t})(\lambda) = \\ &= \exp(i\lambda a(x,t))\exp(-2^{-1}\lambda^2\sigma(x,t)) = \\ &= \exp(i\lambda(S(x) + a(0,0)))\times \\ &\times\exp(-2^{-1}\lambda^2(A^2t + \sigma(0,0))) = \\ &= F(T\delta_0)(\lambda)F(\mu_{x,t})(A\lambda) = \\ &= F(T\delta_0)(\lambda)F(\mu_{x,t}\circ S^{-1})(\lambda) = \\ &= F(T\delta_0 * \mu_{x,t}\circ S^{-1})(\lambda), \end{aligned}$$

поэтому $T\mu_{x,t} = T\delta_0 * (\mu_{x,t}\circ S^{-1})$.

З а м е ч а н и е 1. Хотя предыдущая теорема ослабляет условие феллеровости, полностью от него отказаться нельзя. Это ясно из того, что оператор вида (1) феллеров, причем легко указать примеры непрерывных операторов в $M(\mathbb{R})$, не являющихся феллеровскими, но переводящих гауссовские меры в гауссовские. Запишем $M(R)$ как прямую сумму трех замкнутых по норме подпространств: пространства M_a абсолютно непрерывных мер, пространства M_d мер, сосредоточенных на счетных множествах, и пространства M_s сингулярных мер без атомов. Оператор $\mu = \mu_a + \mu_d + \mu_s \mapsto \mu_a + \mu_d$ тождественен на гауссовских мер, но разрывен в слабой топологии, ибо равен нулю на плотном в слабой топологии множестве M_s. Оператор $\mu = \delta_1 * \mu_a + \gamma_1 * \mu_d$, где γ_1 – стандартная гауссовская мера, также переводит гауссовские меры в гауссовские, но не имеет вида (1) даже на гауссовских мерах.

Перейдем к аналогу теоремы 2 для секвенциально непрерывных операторов. В частности, мы увидим, что для метризуемого пространства X слабая непрерывность оператора в $M(X)$ равносильна секвенциальной непрерывности, хотя пространство $M(X)$ неметризуемо в слабой топологии. В общем локально выпуклом пространстве X секвенциально непрерывный оператор S задает отображение $LG(X)$ посредством (1), причем существуют секвенциально непрерывные разрывные операторы S.

Пусть X – вполне регулярное пространство, $M_S(X)$ – множество мер из $M(X)$, сосредоточенных на счетных объединениях метризуемых компактов (или, что равносильно, на суслинских множествах); $M_S(X)$ – линейное подпространство в $M(X)$. Если X – локально выпуклое пространство, то $LG(X) \subset M_S(X)$ (см. [4, теорема 3.4.1]) и $\mu * \nu \in M_S(X)$ при $\mu, \nu \in M_S(X)$. Пусть $SC_b(X)$ – линейное пространство ограниченных секвенциально непрерывных функций на X. Функции из $SC_b(X)$ измеримы относительно всех мер из $M_S(X)$, поэтому на $M_S(X)$ и $LG(X)$ можно ввести топологию τ_{SC}, порожденную двойственностью с $SC_b(X)$. Эта топология сильнее слабой, если на X есть разрывные секвенциально непрерывные функции (такое пространство не секвенциально, т.е. содержит незамкнутые секвенциально замкнутые множества).

Л е м м а 1. *Линейное отображение $T\colon M_S(X) \to M_S(X)$ непрерывно в топологии τ_{SC} в точности тогда, когда оно секвенциально непрерывно.*

Если X метризуемо (или секвенциально), то это же верно и для операторов из $M(X)$ в $M(X)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть T секвенциально непрерывно. Тогда оно ограничено как оператор на $M_S(X)$ с нормой полной вариации. Это следует из того, что T отображает сходящиеся по норме к нулю последовательности в ограниченные. Для $f \in SC_b(X)$ положим

$$T^*f(x) = \int_X f(y)T\delta_x(dy).$$

Тогда $T^*f \in SC_b(X)$, ибо при $x_n \to x$ в X имеем $\delta_{x_n} \to \delta_x$ в топологии τ_{SC}, поэтому $T\delta_{x_n} \to T\delta_x$ в топологии τ_{SC}. Кроме того, $\sup_{x\in X}|T^*f(x)| \le \|f\|\|T\|$.

Для меры μ, являющейся линейной комбинацией мер Дирака, имеем

$$\int f(x)T\mu(dx) = \int T^*f(x)\mu(dx), \quad f \in SC_b(X).$$

Равенство верно и для всякой меры μ из $M_S(X)$ с компактным метризуемым носителем K, так как она есть предел в слабой топологии последовательности мер μ_n с конечными носителями в K. При этом имеет место и сходимость в топологии τ_{SC}, ибо для всякой функции $f \in SC_b(X)$ ее сужение на K непрерывно в силу метризуемости K, что дает функцию $g \in C_b(X)$, совпадающую с f на K, но интегралы от f и g по мерам, сосредоточенным на K, равны. Теперь равенство распространяется на все меры $\mu \in M_S(X)$ с помощью приближения по вариации мерами с метризуемыми компактными носителями. Это влечет непрерывность T в топологии τ_{SC}.

Можно было использовать и то, что всякая мера μ из $M_S(X)$ есть предел последовательности линейных комбинаций мер Дирака в топологии τ_{SC}. В самом деле, μ сосредоточена на объединении Y возрастающих метризуемых компактов K_n. Вложим Y гомеоморфно в $\mathbb{R}^\infty$ и найдем меры ν_n с конечными носителями в K_n, слабо сходящиеся к μ на $\mathbb{R}^\infty$. Это даст сходимость в топологии τ_{SC} на $M(Y)$ ввиду равномерной плотности мер ν_n на Y.

Теорема 4. *Пусть линейный оператор* T: $M_S(X) \to M_S(X)$ *отображает одномерные гауссовские меры в гауссовские и непрерывен в топологии* τ_{SC}. *Тогда найдутся гауссовская мера* γ_0 *и линейный секвенциально непрерывный оператор* S: $X \to X$ *такие, что* (1) *верно для всех мер из* $M_S(X)$.

Доказательство. Непрерывность оператора в топологии τ_{SC} равносильна тому, что для каждой функции $g \in SC_b(X)$ функция T^*g также принадлежит $SC_b(X)$, причем равенство

$$\int g(x)T\mu(dx) = \int T^*g(x)\mu(dx)$$

выполнено для всех $\mu \in M_S(X)$. Тогда, взяв точки $x, y \in X$ и функционал $f \in X^*$, для всех $\nu \in LG(\mathbb{R})$ получим тождество

$$\int_X \exp(if(z))T(\nu \circ L_{x,y}^{-1})(dz) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} T^* \exp(if)(L_{x,y}(t))\nu(dt),$$

причем функция $T^*\exp(if) \circ L_{x,y}$ лежит в $C_b(\mathbb{R})$. Таким образом, в обозначениях теоремы 2 экспоненте $\exp(if)$ соответствует функция

$$g_{x,y,f} = T^* \exp(if) \circ L_{x,y}.$$

По первому утверждению теоремы 2 оператор T на мерах Дирака имеет вид (1) с некоторыми гауссовской мерой γ_0 и линейным оператором S: $X \to X$. Заметим, что S секвенциально непрерывен. Это видно из того же рассуждения, что и выше в случае непрерывности, а также следует из сходимости средних слабо сходящейся последовательности гауссовских мер (см. [3, предложение 2.7.19]). Так как S секвенциально непрерывно, то оно измеримо для каждой меры μ из $M_S(X)$. Поэтому корректно определен линейный оператор

$$R: M_S(X) \to M_S(X), \quad \mu \mapsto \gamma_0 * \mu \circ S^{-1}.$$

Отображение R непрерывно в топологии τ_{SC}. Действительно, для всякой функции $g \in SC_b(X)$ функция

$$R^*g(x) = \int g(Sx + y)\gamma_0(dy)$$

секвенциально непрерывна и ограничена и при $\mu \in M_S(X)$ имеем

$$\int R^*g(x)\mu(dx) = \int\Big(\int g(Sx + y)\mu(dx)\Big)\gamma_0(dy) =$$
$$= \int g(x)R\mu(dx).$$

Операторы T и R равны на линейной оболочке дираковских мер и непрерывны в топологии τ_{SC}. Значит, они равны на $M_S(X)$, ибо эта линейная оболочка плотна в $M_S(X)$ в топологии τ_{SC}.

Отметим, что для слабой топологии вместо τ_{SC} лемма неверна. Например, если X — компактификация Стоуна—Чеха множества натуральных чисел $\mathbb{N}$, то из слабой сходимости в $M(X)$ следует сходимость на всех борелевских множествах (см. [3, предложение 5.6.15]), поэтому функционал $\mu \mapsto \mu(B)$ секвенциально непрерывен, но разрывен в слабой топологии, если B — борелевское множество с разрывным индикатором (например, точка из $X\backslash\mathbb{N}$).

Заметим, что преобразования вида (1) сохраняют некоторые другие интересные классы мер (с γ_0 из соответствующего класса), в том числе логарифмически вогнутые (см. [3]) и устойчивые (см. [5]). Интересно изучить для них аналоги характеризации (1). В работе [6] показано, что диффузионные полугруппы, сохраняющие логарифмическую вогнутость, являются гауссовскими, их переходные операторы имеют вид (1).

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа поддержана грантом РНФ 17-11-01058 (выполняемым при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Холево А.С.* // Теория вероятн. и ее примен. 2016. Т. 61. № 4. С. 830–837.
2. *De Palma G., Mari A., Giovannetti V., Holevo A.S.* // J. Math. Phys. 2015. V. 56. № 5. 052202. 19pp.
3. *Bogachev V.I.* Weak convergence of measures. Amer. Math. Soc., R.I., Providence, 2017.
4. *Bogachev V.I.* Gaussian measures. Amer. Math. Soc., R.I., Providence, 1998.
5. *Золотарев В.М.* Одномерные устойчивые распределения. М.: Наука, 1983. 304 с.
6. *Kolesnikov A.V.* // J. Funct. Anal. 2001. V. 186. № 1. P. 196–205.

ON GAUSSIAN TRANSITION OPERATORS

G. A. Alekseev[a,b], **K. A. Afonin**[a,b], **and V. I. Bogachev**[a,b,c,d]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*
[b] *Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation*
[c] *National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russian Federation*
[d] *St.-Tikhon's Orthodox University, Moscow, Russian Federation*
Presented by Academician of the RAS A.S. Holevo

In this paper, a number of generalizations of the known characterization of Gaussian transition operators is obtained.

Keywords: Gaussian measure, Feller operator