ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 499, с. 13–16

МАТЕМАТИКА

УДК 517.957,517.984

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ РАЗМЕРНОСТИ АТТРАКТОРОВ ТРЕХМЕРНОЙ РЕГУЛЯРИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ ЭЙЛЕРА С ДИССИПАЦИЕЙ

 С. В. Зелик[2,3,*], А. А. Ильин[1,**], А. Г. Костянко[3,***]

Представлено академиком РАН Б. Н. Четверушкиным 13.05.2021 г.
Поступило 14.05.2021 г.
После доработки 04.06.2021 г.
Принято к публикации 04.06.2021 г.

Рассматриваются регуляризированная система Эйлера с трением в двумерной и трехмерной постановке. Доказано существование глобального аттрактора и получены явные оценки его фрактальной размерности. В случае периодических краевых условий как в двумерном, так и в трехмерном случае доказывается, что полученные оценки сверху точны в пределе $\alpha \to 0^+$, где α – параметр, описывающий сглаживание векторного поля в нелинейном члене.

Ключевые слова: невязкая модель Эйлера–Бардины, аттракторы, фрактальная размерность, потоки Колмогорова

DOI: 10.31857/S2686954321040160

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

В работе изучается асимптотическое поведение решений регуляризированной системы Эйлера [1]

$$\begin{gathered}\partial_t u + (\bar{u}, \nabla_x)\bar{u} + \gamma u + \nabla_x p = g,\\ \operatorname{div}\bar{u} = 0, \quad u(0) = u_0, \quad u = (1 - \alpha\Delta_x)\bar{u},\end{gathered} \tag{1}$$

с правой частью g и диссипацией, описывающейся однородным трением γu. Параметр $\alpha > 0$, имеющий размерность квадрата длины, является малым параметром, так что $\bar{u}$ – это сглаженное векторное поле с отфильтрованными высокими гармониками по пространству.

С точки зрения аттракторов система (1) представляет интерес и в двумерном случае, поскольку при $\alpha = 0$ в естественном энергетическом пространстве (2) решение существует, но его единственность неизвестна. Одна из возможных регуляризаций с помощью добавления в правую часть малой вязкой диссипации $\nu\Delta_x u$ была подробно рассмотрена в [2], где были получены точные оценки размерности аттрактора при $\nu \to 0^+$.

В размерности три система интересна прежде всего как подсеточная модель турбулентности и известна в литературе под названием невязкая модель Эйлера–Бардины [1]. Анализ асимптотического поведения решений и оценки числа степеней свободы для этой модели и очень близкой к ней системы Навье–Стокса–Войта содержится в работах [3, 4] (см. также цитированную там литературу).

В нашей работе система изучается в размерности $d = 2$ и $d = 3$. Каждый случай, в свою очередь, рассматривается для трех типов краевых условий.

1. Периодические краевые условия $x \in \mathbb{T}^d = [0, L]^d$. При этом налагается стандартное условие

$$\int_{\mathbb{T}^d} (u, \bar{u}, g)dx = 0.$$

2. Во всем пространстве $\mathbb{R}^d$.

3. В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Тогда $\bar{u}$ есть решение задачи Дирихле для оператора Стокса

$$\begin{gathered}(1 - \alpha\Delta_x)\bar{u} + \nabla_x q = u,\\ \operatorname{div}\bar{u} = 0, \quad \bar{u}\,|_{\partial\Omega} = 0.\end{gathered}$$

Фазовое пространство по $\bar{u}$ есть пространство Соболева $\mathbf{H}^1$ с условием бездивергентности, точнее

[1] *Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия*
[2] *Department of Mathematics, University of Surrey, Guildford, United Kingdom*
[3] *School of Mathematics and Statistics, Lanzhou University, Lanzhou, China*
**E-mail: s.zelik@surrey.ac.uk*
***E-mail: ilyin@keldysh.ru*
****E-mail: anna.kostianko@surrey.ac.uk*

$$\bar{u} \in \mathbf{H}^1 := \\ := \begin{cases} \dot{\mathbf{H}}^1(\mathbb{T}^d), & x \in \mathbb{T}^d, \quad \int\limits_{\mathbb{T}^d} \bar{u}(x)dx = 0, \\ \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^d), & x \in \mathbb{R}^d, \\ \mathbf{H}^1_0(\Omega), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{2} \\ \operatorname{div} \bar{u} = 0,$$

а по u, соответственно, $u \in \mathbf{H}^{-1} := (1 - \Delta_x)\mathbf{H}^1 = \mathbf{H}^{-1} \cap \{\operatorname{div} u = 0\}$.

Исключая давление, запишем систему (1) как эволюционное уравнение в $\mathbf{H}^1$:

$$\begin{gathered} \partial_t \bar{u} + B(\bar{u}, \bar{u}) + \gamma \bar{u} = \bar{g}, \\ \operatorname{div} \bar{u} = 0, \quad \bar{u}(0) = \bar{u}_0, \quad u = (1 - \alpha\Delta_x)\bar{u}, \end{gathered} \tag{3}$$

где

$$B(\bar{u}, \bar{v}) = (1 - \alpha\Pi\Delta_x)^{-1}((\bar{u}, \nabla_x)\bar{v}),$$
$$\bar{g} = (1 - \alpha\Pi\Delta_x)^{-1} g,$$

Π – ортогональный проектор Гельмгольца–Лере, а $\Pi\Delta_x$ – оператор Стокса. Из эллиптической регулярности оператора Стокса и теорем вложения Соболева следует, что билинейный оператор B является ограниченным (сглаживающим) оператором в $\mathbf{H}^1$:

$$B\colon \mathbf{H}^1 \times \mathbf{H}^1 \to \mathbf{H}^{2-\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0, \quad d = 2,$$
$$B\colon \mathbf{H}^1 \times \mathbf{H}^1 \to \mathbf{H}^{3/2}, \quad d = 3.$$

Таким образом, уравнение (3) является эволюционным уравнением с ограниченным нелинейным оператором в гильбертовом пространстве, поэтому существование локального по времени решения следует из принципа сжимающих отображений, а глобальное по времени решение существует в силу следующей диссипативной оценки:

$$\|\bar{u}(t)\|^2_\alpha \le \|\bar{u}(0)\|^2_\alpha e^{-\gamma t} + \frac{1}{\gamma^2}\|g\|^2_{L^2},$$

где

$$\|\bar{u}\|^2_\alpha := \|\bar{u}\|^2_{L^2} + \alpha\|\nabla_x \bar{u}\|^2_{L^2}.$$

Итак, уравнению (3) соответствует полугруппа разрешающих операторов $S(t)\colon \mathbf{H}^1 \to \mathbf{H}^1$, $S(t)\bar{u}_0 = \bar{u}(t)$, где $\bar{u}(t)$ – решение уравнения (3).

Определение 1. Пусть $S(t)$, $t \ge 0$, – полугруппа непрерывных операторов в банаховом пространстве H. Множество $\mathscr{A} \subset H$ называется глобальным аттрактором $S(t)$, если:

1) множество $\mathscr{A}$ компактно в H;

2) оно строго инвариантно: $S(t)\mathscr{A} = \mathscr{A}$;

3) $\mathscr{A}$ притягивает ограниченные множества в H при $t \to \infty$, т.е. для любого ограниченного $B \subset H$ и любой окрестности $\mathbb{O}(\mathscr{A})$ множества $\mathscr{A}$ в H существует $T = T(B, \mathbb{O})$, для которого при $t \ge T$

$$S(t)B \subseteq \mathbb{O}(\mathscr{A}).$$

При этом аттрактор A имеет следующую структуру:

$$\mathscr{A} = \mathscr{K}|_{t=0}, \tag{4}$$

где $\mathscr{K} \subset L^\infty(\mathbb{R}, H)$ есть семейство всех полных траекторий $u : \mathbb{R} \to H$ полугруппы $S(t)$, которые ограничены при всех $t \in \mathbb{R}$.

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Пусть $d = 2$. Для каждого из трех видов краевых условий система* (1) *обладает глобальным аттрактором $\mathscr{A}$, фрактальная размерность которого конечна и допускает следующую явную оценку сверху*:

$$\dim_F \mathscr{A} \le \frac{1}{8\pi} \times \\ \times \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha\gamma^4} \min\left(\|\operatorname{rot} g\|^2_{L^2}, \dfrac{\|g\|^2_{L^2}}{2\alpha} \right), & x \in \mathbb{T}^2, \quad x \in \mathbb{R}^2, \\ \dfrac{\|g\|^2_{L^2}}{2\alpha^2\gamma^4}, & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

В трехмерном случае $d = 3$ все три оценки формально выглядят одинаково:

$$\dim_F \mathscr{A} \le \frac{1}{12\pi} \frac{\|g\|^2_{L^2}}{\alpha^{5/2}\gamma^4}.$$

Наконец, для периодических краевых условий, как для $\mathbb{T}^2$, так и для $\mathbb{T}^3$, оценки сверху точны при $\alpha \to 0^+$.

Оценки сверху основаны на получении мажорант глобальных показателей Ляпунова [5, 6] в фазовом пространстве $\mathbf{H}^1$ со скалярным произведением (10). Получение их в явном виде возможно благодаря неравенствам из теоремы 3.

2. ОЦЕНКИ СНИЗУ

Оценки снизу размерности аттракторов основаны на анализе неустойчивости обобщенных потоков Колмогорова. Пусть

$$\begin{gathered} g_s(x_2) = (\gamma\lambda(s)\sin sx_2, 0)^T, \\ g_s(x_3) = (\gamma\lambda(s)\sin sx_3, 0, 0)^T \end{gathered} \tag{5}$$

правые части в системе (1) на $\mathbb{T}^2 = [0, 2\pi]^2$ и $\mathbb{T}^3 = [0, 2\pi]^3$ соответственно. Здесь $s \in \mathbb{N}$, $s \gg 1$, а λ – параметр, выбор которого указан ниже. Этим правым частям соответствуют стационарные решения

$$u_s(x_2) = (\lambda(s)\sin sx_2, 0)^T,$$
$$u_s(x_3) = (\lambda(s)\sin sx_3, 0, 0)^T. \tag{6}$$

Т е о р е м а 2. *При* $\lambda \geq \lambda(s)$, *где*

$$\lambda(s) = c_1\gamma\frac{(1+\alpha s^2)^2}{s}, \tag{7}$$

и где здесь и далее c_i *— абсолютные эффективно вычисляемые постоянные, стационарные решения* (6) *неустойчивы, и размерность неустойчивого многообразия* $\mathcal{M}^{\mathrm{un}}$ *около них не менее чем*

$$\dim \mathcal{M}^{\mathrm{un}}(u_s) \geq c_2 s^2, \quad d = 2;$$
$$\dim \mathcal{M}^{\mathrm{un}}(u_s) \geq c_3 s^3, \quad d = 3. \tag{8}$$

С л е д с т в и е 1. *Пусть правая часть в системе* (1) *задана в* (5), *и* $\lambda(s)$ *определена в* (7). *Тогда размерность соответствующего аттрактора* $\mathcal{A} = \mathcal{A}_s$ *допускает следующую оценку снизу:*

$$\dim_F \mathcal{A} \geq c_6 \begin{cases} \max\left(\dfrac{\|\mathrm{rot}\, g_s\|^2_{L^2}}{\alpha\gamma^4}, \dfrac{\|g_s\|^2_{L^2}}{\alpha^2\gamma^4}\right), & x \in \mathbb{T}^2, \\ \dfrac{\|g_s\|^2_{L^2}}{\alpha^{5/2}\gamma^4}, & x \in \mathbb{T}^3. \end{cases} \tag{9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку из представления глобального аттрактора (4) следует, что неустойчивое многообразие любого стационарного решения лежит в глобальном аттракторе [5, 6], то надо лишь выразить оценки (8) в терминах безразмерных чисел в правой части (9). Рассмотрим трехмерный случай. Система изучается при $\alpha \to 0^+$. Параметр s в нашем распоряжении, и мы полагаем

$$s = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}.$$

Тогда λ в (7) и $\|g_s\|^2_{L^2}$ в (5) становятся

$$\lambda = c_4\gamma\sqrt{\alpha}, \quad \|g_s\|^2_{L^2} = c_5\gamma^4\alpha,$$

и мы в результате получаем

$$\dim_F \mathcal{A} \geq c_3 s^3 = c_3\frac{1}{\alpha^{3/2}} = c_3\frac{\alpha\|g_s\|^2_{L^2}}{\alpha^{5/2}\|g_s\|^2_{L^2}} = c_3\frac{\alpha\|g_s\|^2_{L^2}}{\alpha^{5/2}c_5\alpha\gamma^4},$$

что и доказывает оценку (9) для $\mathbb{T}^3$.

Для двумерного тора заметим, что $\lambda \sim \gamma\sqrt{\alpha}$ и $\|\mathrm{rot}\, g_s\|^2_{L^2} \sim \gamma^4$ и, как и раньше, $\|g_s\|^2_{L^2} \sim \gamma^4\alpha$. Действуя аналогично, получаем (9) для $\mathbb{T}^2$.

3. НЕРАВЕНСТВА

Получение в явном виде оценок сверху размерности аттракторов основано на следующих неравенствах для бездивергентных вектор-функций с ортонормированными производными.

Т е о р е м а 3. *Пусть система* $\{\overline{\theta}_j\}_{j=1}^n \in \mathbf{H}^1$ *ортонормирована в смысле скалярного произведения*

$$(\overline{\theta}_i, \overline{\theta}_j)_{L^2} + \alpha(\nabla\overline{\theta}_i, \nabla\overline{\theta}_j)_{L^2} = \delta_{ij}. \tag{10}$$

Тогда функция

$$\rho(x) = \sum_{j=1}^n |\overline{\theta}_j(x)|^2$$

удовлетворяет неравенству

$$\|\rho\|_{L^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{n^{1/2}}{\alpha^{1/2}}, \quad d = 2,$$
$$\|\rho\|_{L^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{n^{1/2}}{\alpha^{3/4}}, \quad d = 3. \tag{11}$$

З а м е ч а н и е 1. Полученные оценки верны, разумеется, и для семейств скалярных функций $\{\overline{\theta}_i\}_{i=1}^n \in H^1$ с ортонормированными производными в смысле (10). А именно, функция $\rho(x) = \sum_{i=1}^n |\overline{\theta}_i(x)|$ удовлетворяет оценкам

$$\|\rho\|_{L^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{n^{1/2}}{\alpha^{1/2}}, \quad d = 2,$$
$$\|\rho\|_{L^2} \leq \frac{1}{\sqrt{8\pi}}\frac{n^{1/2}}{\alpha^{3/4}}, \quad d = 3, \tag{12}$$

которые выполняются для всех трех типов краевых условий $\Omega = \mathbb{T}^d$ (с условием нулевого среднего), $\Omega = \mathbb{R}^d$ и $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, где в последнем случае функции обращаются в ноль на границе области.

Неравенства (11) и (12) играют в оценке размерности аттракторов в задаче (1) ту же роль, что и неравенствами Либа–Тирринга [7] в теории аттракторов классических уравнений Навье–Стокса [5, 6].

Доказательство неравенств (11) состоит в обобщении метода и результатов работы [8] на бездивергентный векторный случай и (что более сложно технически) на случай тора $\mathbb{T}^d$. Для периодического случая основная техническая сложность заключается в получении точных оценок функции Грина оператора $(-\Delta_x + m^2)^2$ на $\mathbb{T}^2$ и $\mathbb{T}^3$. Соответствующие ряды по $\mathbb{Z}^2$ и $\mathbb{Z}^3$ при этом точно оцениваются чисто аналитически без привлечения вычислений, что часто приходится делать в аналогичных случаях, как, например, в [9].

Подробные доказательства изложенных здесь результатов в двумерном периодическом случае содержатся в [10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bardina J., Ferziger J., Reynolds W.* Improved subgrid scale models for large eddy simulation / Proc. 13th AIAA Conference on Fluid and Plasma Dynamics, 1980.
2. *Ilyin A.A., Miranville A., Titi E.S.* Small viscosity sharp estimates for the global attractor of the 2-D damped-driven Navier–Stokes equations // Commun. Math. Sci. 2004. V. 2. P. 403–426.
3. *Cao Y., Lunasin E.M., Titi E.S.* Global well-posedness of the three-dimensional viscous and inviscid simplified Bardina turbulence models // Commun. Math. Sci. 2006. V. 4. P. 823–848.
4. *Kalantarov V.K., Titi E.S.* Global attractors and determining modes for the 3D Navier–Stokes–Voight equations // Chin. Ann. Math. 2009. V. 30B. P. 697–714.
5. *Бабин А.В., Вишик М.И.* Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989. 296 с.
6. *Temam R.* Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, 2nd ed. N.Y.: Springer-Verlag, 1997.
7. *Lieb E., Thirring W.* Inequalities for the moments of the eigenvalues of the Schrödinger Hamiltonian and their relation to Sobolev inequalities / Studies in Mathematical Physics. Essays in honor of Valentine Bargmann. Princeton NJ: Princeton University Press, 1976. P. 269–303.
8. *Lieb E.H.* An L^p bound for the Riesz and Bessel potentials of orthonormal functions // J. Func. Anal. 1983. V. 51. P. 159–165.
9. *Ильин А.А., Лаптев А.А.* Магнитное неравенство Либа–Тирринга для периодических функций // УМН. 2020. Т. 75. Вып. 4. С. 89–90.
10. *Ilyin A.A., Zelik S.V.* Sharp dimension estimates of the attractor of the damped 2D Euler-Bardina equations / Partial Differential Equations, Spectral Theory, and Mathematical Physics. Berlin: EMS Press, 2021. P. 209–229.

SHARP DIMENSION ESTIMATES FOR THE ATTRACTORS OF THE REGULARIZED DAMPED EULER SYSTEM

S. V. Zelik[b,c], A. A. Ilyin[a], and A. G. Kostianko[c]

[a] *Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

[b] *Department of Mathematics, University of Surrey, Guildford, UK*

[c] *School of Mathematics and Statistics, Lanzhou University, Lanzhou, P.R. China*

Presented by Academician of the RAS B.N. Chetverishkin

A regularized damped Euler system in two-dimensional and three-dimensional setting is considered. The existence of a global attractor is proved and explicit estimates of its fractal dimension are given. In the case of periodic boundary conditions both in two-dimensional and three-dimensional cases, it is proved that the obtained upper bounds are sharp in the limit $\alpha \to 0$, where α is the parameter describing smoothing of the vector field in the nonlinear term.

Keywords: inviscid Euler–Bardina model, attractors, fractal dimension, Kolmogorov flows