ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 499, с. 49–53

МАТЕМАТИКА

УДК 517.977.58

МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ВОРОНКИ ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

 Член-корреспондент РАН В. Н. Ушаков[1,*], А. А. Ершов[1,]**

Поступило 16.04.2021 г.
После доработки 11.05.2021 г.
Принято к публикации 13.05.2021 г.

Рассматривается зависящая от параметра управляемая система в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Исследуется зависимость от параметра множеств достижимости и интегральных воронок дифференциального включения, соответствующего системе. Получены оценки, характеризующие эту зависимость.

Ключевые слова: управляемая система, дифференциальное включение, множество достижимости, интегральная воронка, хаусдорфово расстояние, аппроксимация

DOI: 10.31857/S2686954321040159

Рассматривается на конечном промежутке времени управляемая система в пространстве $\mathbb{R}^n$, зависящая от параметра. Изучается зависимость от параметра множеств достижимости и интегральных воронок соответствующего системе дифференциального включения.

При исследовании множеств достижимости, их конструировании и оценивании применяются различные теоретические подходы и методы [1–7], сопровождаемые, как правило, разработкой вычислительных алгоритмов и программ. В многочисленных задачах теории динамических систем, и в том числе — теории управления динамическими системами, множества достижимости и интегральные воронки играют ключевую роль, являя собой базу для построения разрешающих управлений и стратегий [8–14]. Так, в задачах оптимального управления и дифференциальных играх множества разрешимости можно трактовать и конструировать как интегральные воронки управляемых систем, соответствующих исходным системам [1–5, 12, 13]. Кроме того, многие из задач теории управляемости динамических систем органически связаны с понятиями множеств достижимости и интегральных воронок [15].

В настоящей работе при определенных условиях на управляемую систему выводятся оценки, характеризующие зависимость от параметра множеств достижимости и интегральных воронок соответствующего дифференциального включения.

1. УПРАВЛЯЕМАЯ СИСТЕМА И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

На промежутке времени $[t_0, \vartheta]$, $t_0 < \vartheta < \infty$, задана управляемая система

$$\frac{dx}{dt} = f_\alpha(t, x, u); \tag{1}$$

здесь t — время; $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор системы (1); $u \in P \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^p)$ — управляющее воздействие; $\alpha \in \mathscr{L}$ — параметр, $\mathscr{L}$ — компакт в метрическом пространстве $\mathbb{E}$ с метрикой $r(\alpha, \beta)$, α и β из $\mathbb{E}$; $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^k)$ — пространство компактов в $\mathbb{R}^k$ с хаусдорфовой метрикой $d(X_*, X^*) = \max(h(X_*, X^*), h(X^*, X_*))$, $h(X_*, X^*) = \max\limits_{x_* \in X_*} \rho(x_*, X^*)$ — хаусдорфово отклонение X_* от X^*, где $\rho(x_*, X^*) = \min\limits_{x^* \in X^*} \|x_* - x^*\|$.

Предполагается, что система (1) удовлетворяет условиям:

A. Функция $f_\alpha(t, x, u)$ определена на $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times P \times \mathscr{L}$ и для любой ограниченной и замкнутой области $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ найдутся такие функция $\omega^*(\xi)$, $\xi \in (0, \infty)$ $(\omega^*(\xi) \downarrow 0,\ \xi \downarrow 0)$ и непрерывная функция $L(t) \in (0, \infty)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, что

[1] *Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург, Россия*
**E-mail: ushak@imm.uran.ru*
***E-mail: ale10919@yandex.ru*

$$\|f_\alpha(t,x,u) - f_\beta(\tau,x,u)\| \le \omega^*\,(|t-\tau| + r(\alpha,\beta)),$$

$$(t,x) \text{ и } (\tau,x) \text{ из } D, \quad \alpha \text{ и } \beta \text{ из } \mathcal{L}, \quad u \in P;$$

$$\|f_\alpha(t,x,u) - f_\alpha(t,y,u)\| \le L(t)\|x-y\|,$$

$$(t,x) \text{ и } (t,y) \text{ из } D, \quad \alpha \in \mathcal{L}, \quad u \in P.$$

Б. Найдется такое $\gamma \in (0,\infty)$, что

$$\|f_\alpha(t,x,u)\| \le \gamma \cdot (1 + \|x\|),$$
$$(t,x,u,\alpha) \in [t_0,\vartheta] \times \mathbb{R}^n \times P \times \mathcal{L}.$$

Введем многозначное отображение на $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$

$$(t,x) \mapsto F_\alpha(t,x) = \mathrm{co}\mathcal{F}_\alpha(t,x),$$
$$\mathcal{F}_\alpha(t,x) = \{f_\alpha(t,x,u) : u \in P\}, \quad \alpha \in \mathcal{L}.$$

Отображение $(t,x) \mapsto F_\alpha(t,x) \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям, индуцируемым условиями А, Б.

А*. Для любой ограниченной и замкнутой области $D \subset [t_0,\vartheta] \times \mathbb{R}^n$ и функций $\omega^*(r)$ и $L(t)$ выполняются соотношения

$$d(F_\alpha(t,x), F_\beta(\tau,x)) \le \omega^*\,(|t-\tau| + r(\alpha,\beta)),$$
$$(t,x) \text{ и } (\tau,x) \text{ из } D, \quad \alpha \text{ и } \beta \text{ из } \mathcal{L}; \tag{2}$$

$$d(F_\alpha(t,x), F_\alpha(t,y)) \le L(t)\|x-y\|,$$
$$(t,x) \text{ и } (t,y) \text{ из } D, \quad \alpha \in \mathcal{L}. \tag{3}$$

Б*. Справедливо неравенство

$$h(F_\alpha(t,x), \{0\}) \le \gamma \cdot (1 + \|x\|),$$
$$(t,x,\alpha) \in [t_0,\vartheta] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}.$$

Введем дифференциальное включение (д.в.)

$$\frac{dx}{dt} \in F_\alpha(t,x), \quad (t,x) \in [t_0,\vartheta] \times \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathcal{L}. \tag{4}$$

Пусть t_* и t^* из $[t_0,\vartheta]$ $(t_0 \le t_* < t^* \le \vartheta)$, $x_* \in \mathbb{R}^n$, $X_* \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in \mathcal{L}$. Полагаем

$X_\alpha(t^*, t_*, x_*)$ – множество достижимости д.в. (4) в момент t^* с начальной точкой $x(t_*) = x_*$,

$X_\alpha(t^*, t_*, X_*)$ – множество достижимости д.в. (4) в момент t^* с начальным множеством X_*.

Известно, что $X_\alpha(t^*, t_*, X_*) \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$, отображение $(t^*, t_*, X_*) \mapsto X_\alpha(t^*, t_*, X_*)$ непрерывно по t^* на $[t_*, \vartheta]$ при фиксированных (t_*, X_*) и непрерывно зависит от X_* при фиксированных t_*, t^*. Также отображение $\alpha \mapsto X_\alpha(t^*, t_*, X_*)$ непрерывно на $\mathcal{L}$.

2. О ЗАВИСИМОСТИ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ ВОРОНОК ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ОТ ПАРАМЕТРА

Уточним зависимость $X_\alpha(t^*, t_*, X_*)$ от α: оценим сверху величину

$$d(X_\alpha(t^*, t_*, X_*), X_\beta(t^*\, t_*, X_*)), \quad \alpha \text{ и } \beta \text{ из } \mathcal{L}, \tag{5}$$

как функцию от $r(\alpha,\beta)$.

Для этого введем разбиение $\Gamma = \{\tau_0 = t_*, \tau_1, \ldots, \tau_i, \ \ldots, \ \tau_N = t^*\}$ промежутка $[t_*, t^*]$ $(\tau_{i+1} - \tau_i = \Delta_i = \Delta = \Delta(\Gamma) = N^{-1}(t^* - t_*))$ и систему множеств $\{\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$, отвечающую этому разбиению:

$$\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_0) = X_*, \quad \tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_{i+1}) = \tilde{X}_\alpha(\tau_{i+1}, \tau_i, \tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_i)),$$
$$i = 0, 1, \ldots, N-1,$$

где обозначено $\tilde{X}_\alpha(\tau^*, \tau_*, Y_*) = \{x^* \in \mathbb{R}^n : x^* = y_* + (\tau^* - \tau_*) f_*, \ y_* \in Y_*, \ f_* \in F_\alpha(\tau_*, y_*)\}$, $t_* \le \tau_* < \tau^* \le t^*$, $Y_* \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$.

Множества $X_\alpha(t^*, t_*, X_*)$ и $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(t^*) = \tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_N)$ при условиях A^*, B^* стеснены равенством

$$X_\alpha(t^*, t_*, X_*) = \lim_{\Delta = \Delta(\Gamma) \downarrow 0} \tilde{X}_\alpha^\Gamma(t^*); \tag{6}$$

здесь имеется в виду сходимость множеств в хаусдорфовой метрике.

Равенством (6) воспользуемся при выводе оценки величины (5). Учитывая условия, наложенные на систему (1), можем указать ограниченную и замкнутую область D в $[t_0,\vartheta] \times \mathbb{R}^n$, которая заключает в себе все множества, участвующие в последующих выкладках. Считаем, что в этих выкладках задействованы функции $\omega^*(r)$, $r \in (0,\infty)$ и $L(t)$, $t \in [t_0,\vartheta]$, отвечающие этой области.

Вывод оценки величины (5) сначала проведем для одноточечного множества $X_* = \{x_*\}$, $(t_*, x_*) \in D$. При этом практикуем пошаговую схему рассуждений, продвигаясь в выводе оценки последовательно по шагам $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ разбиения Γ.

На начальном шаге рассмотрим промежуток $[\tau_0, \tau_1]$. Оценим сверху хаусдорфово отклонение $h(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_1), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_1))$, α и β из $\mathcal{L}$; здесь $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_1) = \tilde{X}_\alpha(\tau_1, \tau_0, x_*)$, $\tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_1) = \tilde{X}_\beta(\tau_1, \tau_0, x_*)$.

В $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_1)$ выберем точку $x(\tau_1)$, где $\rho(x(\tau_1), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_1)) = h(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_1), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_1))$. Точка $x(\tau_1)$ представима в виде $x(\tau_1) = x_* + \Delta f_\alpha(\tau_0)$, $f_\alpha(\tau_0) \in F_\alpha(\tau_0, x_*)$.

Вектор $f_\beta(\tau_0)$, ближайший к $f_\alpha(\tau_0)$ в $F_\beta(\tau_0, x_*)$, удовлетворяет неравенству $\|f_\alpha(\tau_0) - f_\beta(\tau_0)\| \le$ $\le h(F_\alpha(\tau_0, x_*), F_\beta(\tau_0, x_*)) \le \omega^*(r(\alpha,\beta))$.

Точка $y(\tau_1) = x_* + \Delta f_\beta(\tau_0) \in \tilde{X}^\Gamma_\beta(\tau_1)$ удовлетворяет неравенству $\|x(\tau_1) - y(\tau_1)\| \le \Delta\omega^*(r(\alpha,\beta))$. Из определения точки $x(\tau_1)$ и включения $y(\tau_1) \in \tilde{X}^\Gamma_\beta(\tau_1)$ следует

$$h(\tau_1) = h(\tilde{X}^\Gamma_\alpha(\tau_1), \tilde{X}^\Gamma_\beta(\tau_1)) \le \Delta\omega^*(r(\alpha,\beta)). \tag{7}$$

Обратимся теперь к промежутку $[\tau_1, \tau_2]$ разбиения Γ и множествам $\tilde{X}^\Gamma_\alpha(\tau_2) = \tilde{X}_\alpha(\tau_2, \tau_1, \tilde{X}^\Gamma_\alpha(\tau_1))$, $\tilde{X}^\Gamma_\beta(\tau_2) = \tilde{X}_\beta(\tau_2, \tau_1, \tilde{X}^\Gamma_\beta(\tau_1))$.

В $\tilde{X}^\Gamma_\alpha(\tau_2)$ выберем точку $x(\tau_2)$, где

$$\rho(x(\tau_2), \tilde{X}^\Gamma_\beta(\tau_2)) = h(\tilde{X}^\Gamma_\alpha(\tau_2), \tilde{X}^\Gamma_\beta(\tau_2)). \tag{8}$$

Справедливо представление для $x(\tau_2)$: $x(\tau_2) =$ $= x_*(\tau_1) + \Delta f_\alpha(\tau_1)$, $x_*(\tau_1) \in \tilde{X}^\Gamma_\alpha(\tau_1)$, $f_\alpha(\tau_1) \in F_\alpha(\tau_1, x_*(\tau_1))$.

В $\tilde{X}^\Gamma_\beta(\tau_1)$ выберем точку $y_*(\tau_1)$, ближайшую к $x_*(\tau_1)$: $\|x_*(\tau_1) - y_*(\tau_1)\| = \rho(x_*(\tau_1), \tilde{X}^\Gamma_\beta(\tau_1))$. Справедлива оценка

$$\|x_*(\tau_1) - y_*(\tau_1)\| \le h(\tau_1). \tag{9}$$

В $F_\beta(\tau_1, y_*(\tau_1))$ выберем вектор $f_\beta(\tau_1)$, ближайший к $f_\alpha(\tau_1)$. Справедливо неравенство $\|f_\alpha(\tau_1) -$ $- f_\beta(\tau_1)\| \le h(F_\alpha(\tau_1, x_*(\tau_1)), F_\beta(\tau_1, y_*(\tau_1))) \le \omega^*(r(\alpha,$ $\beta)) + L(\tau_1)h(\tau_1)$, согласно (2) и (3).

Введем точку $y(\tau_2) = y_*(\tau_1) + \Delta f_\beta(\tau_1)$, $y_*(\tau_1) \in$ $\in \tilde{X}^\Gamma_\beta(\tau_1)$, $f_\beta(\tau_1) \in F_\beta(\tau_1, y_*(\tau_1))$.

Точки $x(\tau_2)$ и $y(\tau_2)$ стеснены неравенством

$$\begin{gathered}\|x(\tau_2) - y(\tau_2)\| \le \|x_*(\tau_1) - y_*(\tau_1)\| + \\ + \Delta\|f_\alpha(\tau_1) - f_\beta(\tau_1)\| \le h(\tau_1) + \Delta(\omega^*(r(\alpha,\beta)) + \\ + L(\tau_1)h(\tau_1)) \le \Delta\omega^*(r(\alpha,\beta)) + e^{L(\tau_1)\Delta_1} \cdot h(\tau_1).\end{gathered} \tag{10}$$

Принимая во внимание (8) и включение $y(\tau_2) \in \tilde{X}^\Gamma_\beta(\tau_2)$, получаем

$$h(\tilde{X}^\Gamma_\alpha(\tau_2), \tilde{X}^\Gamma_\beta(\tau_2)) \le \|x(\tau_2) - y(\tau_2)\|. \tag{11}$$

Из (10), (11) следует

$$h(\tilde{X}^\Gamma_\alpha(\tau_2), \tilde{X}^\Gamma_\beta(\tau_2)) \le \Delta\omega^*(r(\alpha,\beta)) + e^{L(\tau_1)\Delta_1}h(\tau_1). \tag{12}$$

Рассмотрим следующий промежуток $[\tau_2, \tau_3]$ разбиения Γ и множества $\tilde{X}^\Gamma_\alpha(\tau_3) = \tilde{X}_\alpha(\tau_3, \tau_2, \tilde{X}^\Gamma_\alpha(\tau_2))$, $\tilde{X}^\Gamma_\beta(\tau_3) = \tilde{X}_\beta(\tau_3, \tau_2, \tilde{X}^\Gamma_\beta(\tau_2))$.

Оценим сверху $h(\tilde{X}^\Gamma_\alpha \tau_3), \tilde{X}^\Gamma_\beta(\tau_3))$. Для этого выберем точку $x(\tau_3)$ в $\tilde{X}^\Gamma_\alpha(\tau_3)$:

$$\rho(x(\tau_3), \tilde{X}^\Gamma_\beta(\tau_3)) = h(\tilde{X}^\Gamma_\alpha(\tau_3), \tilde{X}^\Gamma_\beta(\tau_3)). \tag{13}$$

Точка $x(\tau_3)$ представима в виде

$$\begin{gathered}x(\tau_3) = x_*(\tau_2) + \Delta f_\alpha(\tau_2), \quad x_*(\tau_2) \in \tilde{X}^\Gamma_\alpha(\tau_2), \\ f_\alpha(\tau_2) \in F_\alpha(\tau_2, x_*(\tau_2)).\end{gathered}$$

Выберем в $\tilde{X}^\Gamma_\beta(\tau_2)$ точку $y_*(\tau_2)$, ближайшую к $x_*(\tau_2)$:

$$\|x_*(\tau_2) - y_*(\tau_2)\| = \rho(x_*(\tau_2), \tilde{X}^\Gamma_\beta(\tau_2)).$$

Выполняется $\|x_*(\tau_2) - y_*(\tau_2)\| \le h(\tilde{X}^\Gamma_\alpha(\tau_2), \tilde{X}^\Gamma_\beta(\tau_2))$.

Выберем в $F_\beta(\tau_2, y_*(\tau_2))$ вектор $f_\beta(\tau_2)$, ближайший к $f_\alpha(\tau_2)$, и получаем оценку

$$\begin{gathered}\|f_\alpha(\tau_2) - f_\beta(\tau_2)\| \le h(F_\alpha(\tau_2, x_*(\tau_2)), F_\beta(\tau_2, y_*(\tau_2))) \le \\ \le \omega^*(r(\alpha,\beta)) + L(\tau_2) \cdot \|x_*(\tau_2) - y_*(\tau_2)\|.\end{gathered}$$

Рассмотрим точку $y(\tau_3) = y_*(\tau_2) + \Delta f_\beta(\tau_2) \in$ $\in \tilde{X}^\Gamma_\beta(\tau_3)$.

Точки $x(\tau_3)$ и $y(\tau_3)$ удовлетворяют неравенству

$$\begin{gathered}\|x(\tau_3) - y(\tau_3)\| \le \|x_*(\tau_2) - y_*(\tau_2)\| + \\ + \Delta(\omega^*(r(\alpha,\beta)) + L(\tau_2)\|x_*(\tau_2) - y_*(\tau_2)\|) \le \\ \le \Delta \cdot \omega^*(\|\alpha - \beta\|) + \\ + e^{L(\tau_2)\Delta_2}(\Delta\omega^*(r(\alpha,\beta)) + e^{L(\tau_1)\Delta_1}h(\tau_1)).\end{gathered} \tag{14}$$

Учитывая (13) и $y(\tau_3) \in \tilde{X}^\Gamma_\beta(\tau_3)$, имеем

$$h(\tilde{X}^\Gamma_\alpha(\tau_3), \tilde{X}^\Gamma_\beta(\tau_3)) \le \|x(\tau_3) - y(\tau_3)\|. \tag{15}$$

Из оценок (7), (14), (15) получаем

$$\begin{gathered}h(\tilde{X}^\Gamma_\alpha(\tau_3), \tilde{X}^\Gamma_\beta(\tau_3)) \le \\ \le (1 + e^{L(\tau_2)\Delta_2} + e^{L(\tau_1)\Delta_1 + L(\tau_2)\Delta_2}) \cdot \Delta\omega^*(r(\alpha,\beta)).\end{gathered} \tag{16}$$

Анализируя оценки (12), (16), заключаем, что величина $h(\tilde{X}^\Gamma_\alpha(\tau_{i+1}), \tilde{X}^\Gamma_\beta(\tau_{i+1}))$ стеснена неравенством

$$\begin{gathered}h(\tilde{X}^\Gamma_\alpha(\tau_{i+1}), \tilde{X}^\Gamma_\beta(\tau_{i+1})) \le \left(1 + e^{\sum\limits_{k=i}^{i} L(\tau_k)\Delta_k} + e^{\sum\limits_{k=i-1}^{i} L(\tau_k)\Delta_k} + \right. \\ \left. + e^{\sum\limits_{k=i-2}^{i} L(\tau_k)\Delta_k} + \ldots + e^{\sum\limits_{k=1}^{i} L(\tau_k)\Delta_k}\right)\Delta\omega^*(r(\alpha,\beta)), \\ i = 0, 1, \ldots, N-1.\end{gathered} \tag{17}$$

Оценка (17) обосновывается с помощью метода математической индукции.

Очевидно, что оценка сверху величины $h(\tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\tau_{i+1}), \tilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(\tau_{i+1}))$, $i = 0,1,\dots,N-1$ аналогична оценке (17). Учитывая это, сформулируем утверждение.

Л е м м а 1. *Пусть* $[t_*, t^*] \subset [t_0, \vartheta]$, $X_* \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$, $\Gamma = \{\tau_0 = t_*, \tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N = t^*\}$ $(\tau_{i+1} - \tau_i = \Delta_i = \Delta$, $i = 0,1,\dots,N-1)$ *и* $\{\tilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$ — *система множеств* (5), *аппроксимирующая множество достижимости* $X_\alpha(t^*, t_*, X_*)$, $\alpha \in L$ *д.в.* (4). *Справедлива оценка*

$$d(\tilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(\tau_{i+1}), \tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\tau_{i+1})) \le \le \left(1 + \sum_{s=0}^{i-1} e^{\sum_{k=i-s}^{i-1} L(\tau_k)\Delta_k}\right) \cdot \Delta\omega^*(r(\alpha,\beta)), \tag{18}$$

α *и* β *из* $\mathcal{L}$, $i = 0,1,\dots,N-1$.

Представим некоторые загрубления этой оценки, более простые по форме.

Заменив в (18) единицу и экспоненты $e^{\sum_{k=r}^{i} L(\tau_k)\Delta_k}$, $r = 1,2,\dots,i$, большей экспонентой $e^{\sum_{k=0}^{i} L(\tau_k)\Delta_k}$, получаем оценку

$$d(\tilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(\tau_{i+1}), \tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(\tau_{i+1})) \le \le e^{\sum_{k=0}^{i} L(\tau_k)\Delta_k} \cdot (\tau_{i+1} - \tau_0)\omega^*(r(\alpha,\beta)). \tag{19}$$

В частности, справедлива оценка

$$d(\tilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(t^*), \tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(t^*)) \le \le e^{\sum_{k=0}^{N-1} L(\tau_k)\Delta_k} \cdot (t^* - t_*)\omega^*(r(\alpha,\beta)). \tag{20}$$

Заменив в оценке (20) числа $L(\tau_k)$, $k = 0,\dots,N-1$, каким-либо L, удовлетворяющим неравенству $\max\limits_{t\in[t_0,\vartheta]} L(t) \le L < \infty$, получаем более грубую оценку

$$d(\tilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(t^*), \tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(t^*)) \le e^{L\cdot(t^* - t_*)} \cdot (t^* - t_*)\omega^*(r(\alpha,\beta)). \tag{21}$$

Мы изучили случай, когда $X_* = \{x_*\}$, $(t_*, x_*) \in D$, и для него получили оценки (18)–(21). Эти оценки справедливы и в общем случае $X_* \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$, $(t_*, X_*) \subset D$.

В общем случае выделим из (18)–(21) для последующих выкладок оценку (20). Наряду с множествами $\tilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(t^*)$ и $\tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(t^*)$, входящими в (20), рассмотрим множества достижимости $X_\alpha(t^*) = X_\alpha(t^*, t_*, X_*)$ и $X_\beta(t^*) = X_\beta(t^*, t_*, X_*)$ д.в. (4).

Можно показать, что справедливы оценки

$$\begin{gathered} d(X_\alpha(t^*), \tilde{X}^{\Gamma}_{\alpha}(t^*)) \le \\ \le e^{L\cdot(t^* - t_*)}(t^* - t_*)(\omega^*(\Delta) + LK\Delta), \\ d(X_\beta(t^*), \tilde{X}^{\Gamma}_{\beta}(t^*)) \le \\ \le e^{L\cdot(t^* - t_*)}(t^* - t_*)(\omega^*(\Delta) + LK\Delta); \end{gathered} \tag{22}$$

здесь $K = \max(\|f_\alpha(t,x,u)\| : (t,x,u,\alpha) \in D \times P \times \mathcal{L}) < \infty$, $\Delta = \Delta(\Gamma)$.

Принимая во внимание (21), (22), получаем

$$\begin{gathered} d(X_\alpha(t^*), X_\beta(t^*)) \le \\ \le e^{\sum_{k=1}^{N-1} L(\tau_k)\Delta_k} \cdot (t^* - t_*)\omega^*(r(\alpha,\beta)) + \\ + 2e^{L\cdot(t^* - t_*)} \cdot (\omega^*(\Delta) + LK\Delta). \end{gathered}$$

Так как эта оценка имеет место при любых разбиениях Γ промежутка $[t_0, \vartheta]$, то устремив $\Delta = \Delta(\Gamma)$ к нулю, получаем

$$d(X_\alpha(t^*), X_\beta(t^*)) \le e^{\int_{t_*}^{t^*} L(t)dt}(t^* - t_*)\omega^*(r(\alpha,\beta)); \tag{23}$$

здесь $\int_{t_*}^{t^*} L(t)dt$ — интеграл Римана функции $L(t)$ на отрезке $[t_*, t^*]$.

В результате справедливо следующее утверждение.

Л е м м а 2. *Пусть* $[t_*, t^*] \subset [t_0, \vartheta]$, $X_* \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ *и* $L(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$ — *функция, удовлетворяющая условию A. Тогда множество* $X_\alpha(t^*) = X_\alpha(t^*, t_*, X_*)$ *и* $X_\beta(t^*) = X_\beta(t^*, t_*, X_*)$, α *и* β *из* $\mathcal{L}$ *стеснены оценкой* (23).

Обратимся теперь к промежутку $[t_0, \vartheta]$, на котором изначально рассматриваем систему (1) и д.в. (4). Полагая в предыдущих выкладках $t_* = t_0$, $t^* = t \in [t_0, \vartheta]$, $X_* = X^{(0)} \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$, $(t_0, X^{(0)}) \subset D$, получаем для множества достижимости $X_\alpha(t) = X_\alpha(t, t_0, X^{(0)})$ и $X_\beta(t) = X_\beta(t, t_0, X^{(0)})$ оценку

$$d(X_\alpha(t), X_\beta(t)) \le e^{\int_{t_0}^{t} L(\tau)d\tau} \cdot (t - t_0)\omega^*(r(\alpha,\beta)), \tag{24}$$

$t \in [t_0, \vartheta]$, α и β из $\mathcal{L}$.

Наряду с множествами достижимости $X_\alpha(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, $\alpha \in \mathcal{L}$ рассмотрим интегральные воронки $X_\alpha(t_0, X^{(0)}) = \bigcup\limits_{t\in[t_0,\vartheta]} (t, X_\alpha(t))$, $\alpha \in \mathcal{L}$ д.в. (4).

Из определения интегральных воронок и оценки (24) следует

$$d(X_\alpha(t_0, X^{(0)}), X_\beta(t_0, X^{(0)})) \leq \\ \leq e^{\int_{t_0}^{\vartheta} L(t)dt} \cdot (\vartheta - t_0)\omega^*(r(\alpha,\beta)), \quad \alpha \text{ и } \beta \text{ из } \mathscr{L}. \tag{25}$$

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2021-1383).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kurjanski A., Valyi I.* Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Systems & Control: Foundations & Applications. Boston, Basel, B.: Birkhäuser Basel and IIASA, 1997. 321 p.
2. *Куржанский А.Б.* Избранные труды. М.: Изд-во МГУ, 2009. 756 с.
3. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем: Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988. 319 с.
4. *Черноусько Ф.Л., Меликян А.А.* Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978. 270 с.
5. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Физматлит, 1974. 456 с.
6. *Lempio F., Veliov V.M.* Discrete approximation of differential inclusions // Bayr. Math. Schriften. 1998. V. 54. P. 149–232.
7. *Никольский М.С.* Об аппроксимации множества достижимости дифференциального включения // Вест. Москов. ун-та. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. 1987. № 4. С. 31–34.
8. *Вдовин С.А., Тарасьев А.М., Ушаков В.Н.* Построение множества достижимости интегратора Брокитта // Прикл. математика и механика. 2004. Т. 68. Вып. 5. С. 707–794. https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2004.09.001
9. *Ананьевский И.М.* Синтез управления линейными системами с помощью методов теории устойчивости движения // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 1. С. 3–11. https://doi.org/10.1023/A:1025170521270
10. *Гусев М.И.* Оценки множеств достижимости многомерных управляемых систем с нелинейными перекрестными связями // Тр. ИММ УрО РАН. 2009. Т. 15. № 4. С. 82–94. https://doi.org/10.1134/S008154381006012X
11. *Филиппова Т.Ф.* Построение многозначных оценок множеств достижимости некоторых нелинейных динамических систем с импульсным управлением // Тр. ИММ УрО РАН. 2009. Т. 15. № 4. С. 262–269. https://doi.org/10.1134/S008154381006009X
12. *Ушаков В.Н., Матвийчук А.Р., Ушаков А.В.* Аппроксимация множеств достижимости и интегральных воронок дифференциальных включений // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2011. Вып. 4. С. 23–39.
13. *Ершов А.А., Ушаков В.Н.* О сближении управляемой системы, содержащей неопределенный параметр // Матем. сб. 2017. Т. 208. № 9. С. 56–99. https://doi.org/10.1070/SM8761
14. *Безнос А.В., Гришин А.А., Ленский А.В., Охоцимский Д.Е., Формальский А.М.* Управление маятником при помощи маховика / Под ред. В.В. Александрова. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2009. С. 170–195.
15. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014. 560 с.

REACHABLE SETSA AND INTEGRAL FUNNELS OF DIFFERENTIAL INCLUSIONS DEPENDING ON THE PARAMETER

Corresponding Member of the RAS V. N. Ushakov[a] and A. A. Ershov[a]

[a] *N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation*

A parameter-dependent control system is considered in the Euclidean space $\mathbb{R}^n$. The dependence on the parameter of the reachable sets and integral funnels of the differential inclusion corresponding to the system is investigated. Estimates are obtained that characterize this dependence.

Keywords: control system, differential inclusion, reachable set, integral funnel, Hausdorff distance, approximation