

О ПОКРЫТИИ ПЛОСКИХ МНОЖЕСТВ

© 2021 г. А. Д. Толмачев^{1,*}, Д. С. Протасов^{1,**}

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 30.03.2021 г.

Поступило 22.04.2021 г.

После доработки 22.04.2021 г.

Принято к публикации 02.05.2021 г.

В статье предлагаются методы улучшения верхних и нижних оценок для различных покрытий множеств на плоскости. Приведены новые оценки для различного количества частей разбиения, а также предложения по обобщению представленных методов.

Ключевые слова: проблема Борсука, диаметр множества, покрытия плоских множеств, универсальные покрывающие системы, хроматическое число

DOI: 10.31857/S2686954321040147

1. ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть F — произвольное ограниченное множество на плоскости, $n \in \mathbb{N}$. Определим следующую величину:

$$d_n(F) = \inf\{x \in \mathbb{R}^+ : \exists F_1, \dots, F_n : F \subseteq F_1 \cup \dots \cup F_n, \\ \forall i \text{ diam}(F_i) \leq x\}.$$

Другими словами, среди всех покрытий множества F некоторыми n множествами $F_1, \dots, F_n$ мы хотим выбрать покрытия, состоящие из множеств как можно меньшего диаметра.

Заметим, что величина $d_n(F)$ не изменится, если потребовать, чтобы все множества покрытия были выпуклыми и замкнутыми. Это следует из того, что диаметр замыкания выпуклой оболочки произвольного множества F совпадает с диаметром F .

Заметим, что для произвольного F последовательность $d_n(F)$ является невозрастающей, поскольку в классе всех покрытий $n+1$ множествами существует подкласс, для которого $F_{n+1} = \emptyset$, совпадающий с классом всех покрытий n множествами.

Определим величину $d_n = \sup d_n(F)$, где супремум берется по всем множествам F единичного диаметра на плоскости. Из сделанного выше за-

мечания ясно, что последовательность d_n не возрастает.

Исследование величин d_n глубоко мотивировано классической проблемой Борсука о разбиении множеств на части меньшего диаметра (см. [1–4]). В разные годы Х. Ленц (см. [5]), М. Дембински и М. Лассак (см. [6]), В. Филимонов (см. [7]), Д. Белов и Н. Александров (см. [8]), В. Коваль (см. [9]) оценивали величину d_n для различных значений n . Нам удалось существенно усилить многие из предшествующих результатов. Новые результаты мы приведем в разделе 2, а ниже дадим еще несколько определений, важных для формулировок и их доказательств.

Определение 1. Множество $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ называется универсальной покрывкой, если любое плоское множество F единичного диаметра может быть полностью накрыто Ω (т.е. на плоскости существует множество Ω_0 , конгруэнтное Ω , такое что $F \subset \Omega_0$).

В 1920 г. Й. Пал доказал [10], что правильный шестиугольник со стороной $\frac{1}{\sqrt{3}}$ является универсальной покрывкой. Введем для него обозначение Ω_6 . Приведем еще одно определение.

Определение 2. Система множеств $S = \{\Omega_\alpha\}_{\alpha \in I}$ называется универсальной покрывающей системой, если любое плоское множество F единичного диаметра может быть полностью накрыто одним из множеств Ω_α . Здесь I — некоторый (возможно, бесконечный) набор индексов.

Рассмотрим произвольное множество F единичного диаметра. Накроем его множеством Ω_6 и

¹ Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия

*E-mail: tolmatchev.ad@phystech.edu

**E-mail: dmitry.protasov@gmail.com

проведем все шесть прямых, которые перпендикулярны отрезкам, соединяющим центр шестиугольника со всеми его вершинами, и отстоят от центра на расстояние $\frac{1}{2}$. Эти прямые отсекают от

Ω_6 шесть треугольников. Очевидно, для каждой пары треугольников, содержащих противоположные вершины, хотя бы один из них не содержит внутренних точек F (поскольку расстояние между этими треугольниками равно единице). Назовем такой треугольник отсеченным. Далее покрывшку с тремя подряд такими отсеченными уголками обозначим $\Omega_{6,2}$, а покрывшку с тремя отсеченными через один уголками обозначим $\Omega_{6,1}$. Несложно видеть, что $\{\Omega_{6,1}, \Omega_{6,2}\}$ – универсальная покрывающая система.

Заметим, что правильный шестиугольник со стороной $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (т.е. покрывшка Ω_6) с двумя отсеченными указанным выше способом уголками при вершинах, идущих через одну, тоже является универсальной покрывшкой, потому что им можно накрыть и $\Omega_{6,1}$, и $\Omega_{6,2}$. Обозначим такую универсальную покрывшку Ω_2 .

Кроме того, будем рассматривать величину

$$d'_n(F) = \inf\{x \in \mathbb{R}^+ : \exists F_1, \dots, F_n : F \subseteq F_1 \cup \dots \cup F_n, \\ \forall i \forall X, Y \in F_i : |XY| \neq x\},$$

где F – произвольное ограниченное множество на плоскости, $n \in \mathbb{N}$. Другими словами, $d'_n(F)$ – инфимум по всем таким x , что F можно правильно покрасить в n цветов, если x считать за величину запрещенного расстояния. Таким образом, величина $d'_n(F)$ мотивирована классической проблемой Нелсона–Хадвиера о раскраске плоскости (см. [11–17]).

Далее определим величину $d'_n = \sup d'_n(F)$, где супремум берется по всем множествам F единичного диаметра на плоскости. Ясно, что последовательность d'_n невозрастающая. Более того, $d'_n = 0$ при всех натуральных $n \geq 7$ как следствие известной оценки $\chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$ для хроматического числа плоскости (см. [11]).

В следующем разделе мы приведем формулировки новых результатов и их сопоставление с ранее известными, а также вкратце обсудим идеи доказательств.

2. УЛУЧШЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

2.1. Формулировки

Приведем таблицу улучшенных результатов для элементов последовательности d'_n при $1 \leq n \leq 30$ (табл. 1). В столбце “комментарий” указано, на

сколько процентов уменьшился “зазор” между верхней и нижней оценкой в результате предложенных в данной работе улучшений. В последнем столбце указан список фигур, рассматриваемых в качестве универсальной покрывающей системы для доказательства оценки сверху.

На рис. 1 изображены все покрывающие множества, используемые для получения верхних оценок. Разбиения для доказательства верхних оценок приведены в [18]. В доказательствах нижних оценок величин d'_{10} , d'_{11} и d'_{54} в качестве множества диаметра 1 был рассмотрен круг единичного диаметра.

Все константы приведены с четырьмя верными знаками после запятой. Кроме улучшений, показанных в таблице, доказаны оценки $\frac{1}{\sqrt{52}} \leq d'_{54}$ и $d'_6 \leq 0.5$.

2.2. Идеи доказательств

Для доказательства того, что $d'_n \leq \rho$, где ρ – некоторое фиксированное число, рассмотрим некоторую универсальную покрывающую систему S и разобьем каждое из множеств, входящих в нее, на n частей, диаметр каждой из которых не превосходит ρ . В табл. 1 в столбце “используемая УПС” приведена универсальная покрывающая система, используемая в доказательстве указанной верхней оценки величины d'_n для соответствующего значения n .

Разбиения элементов универсальной покрывающей системы на n частей диаметра ρ для всех улучшенных оценок мы не будем подробно описывать в данной работе, однако рассмотрим одно из наиболее красивых разбиений, которое значительно улучшает верхнюю оценку величины d'_{18} .

Положим $\rho = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{3}} \approx 0.2989$ и будем доказывать, что $d'_{18} \leq \rho$. Рассмотрим универсальную покрывающую систему S , состоящую из одного множества – универсальной покрывшки Ω_6 .

На рис. 2 правильный шестиугольник $ABCDEF$ со стороной $\frac{1}{\sqrt{3}}$ соответствует покрывшке Ω_6 . Окружность ω вписана в этот шестиугольник. Отрезок AO пересекает окружность ω в точке N , а перпендикуляр к прямой AO , проходящий через точку N , пересекает отрезки AB и AF в точках A_1 и A_2 соответственно. Аналогично получим точки $B_1, B_2, \dots, F_1, F_2$. Можно показать, что двенадцатиугольник $F_1F_2\dots B_1B_2A_1A_2$ является правильным. Тогда разобьем исходный шестиугольник на 6 равных четырехугольников OA_2AB_2 , OB_2BC_2 , $\dots$, OF_2FA_2 . Рассмотрим один из этих четырехугольников и покажем, как его разбить на три части диаметра в

Таблица 1. Полученные результаты

<i>n</i>	Новая оценка снизу	Старая оценка снизу	Старая оценка сверху	Новая оценка сверху	Коммен- тарий	Используемая УПС
1	—	1.0000	1.0000	—	точная	—
2	—	1.0000	1.0000	—	точная	—
3	—	0.8660	0.8660	—	точная	—
4	—	0.7071	0.7071	—	точная	—
5	—	0.5877	0.6020	0.5953	47%	$\Omega_{6,2}, \Omega_{6,1.1}, \Omega_{6,1.2.1}, \Omega_{6,1.2.2}, \Omega_{6,1.2.3}$
6	—	0.5051	0.5344	—	—	—
7	—	0.5000	0.5000	—	точная	—
8	—	0.4338	0.4456	—	—	—
9	—	0.3826	0.4047	—	—	—
10	0.3667	0.3420	0.4012	—	41%	—
11	0.3420 ¹⁾	0.3333	0.3970	0.3942	19%	Ω_2
12	—	0.3333	0.3660	—	—	—
13	—	0.3333	0.3660	0.3550	33%	Ω_2
14	—	0.3090	0.3324	—	—	—
15	—	0.2928	0.3324	0.3226	24%	Ω_2
16	—	0.2817	0.3324	0.3191	26%	Ω_6
17	—	0.2701	0.3324	0.3010	48%	Ω_2
18	—	0.2588	0.3324	0.2989 ²⁾	46%	Ω_6
19	—	0.2500	0.2857	—	—	—
20	—	0.2500	0.2857	—	—	—
21	—	0.2393	0.2857	0.2723	29%	Ω_2
22	—	0.2323	0.2857	0.2650	39%	Ω_2
23	—	0.2225	0.2857	0.2650	33%	Ω_2
24	—	0.2167	0.2849	0.2610	35%	$\Omega_{6,1}, \Omega_{6,2}$
25	—	0.2079	0.2776	0.2610	24%	$\Omega_{6,1}, \Omega_{6,2}$
26	—	0.2030	0.2709	0.2610	15%	$\Omega_{6,1}, \Omega_{6,2}$
27	—	0.2000	0.2646	0.2610	5%	$\Omega_{6,1}, \Omega_{6,2}$
28	—	0.2000	0.2587	0.2500	15%	Ω_2
29	—	0.1950	0.2531	0.2500	5%	Ω_2
30	—	0.1939	0.2479	—	—	—

¹⁾ Точное значение полученной нижней оценки для d_{11} равно $\sin(\pi/9)$.

²⁾ Точное значение полученной верхней оценки для d_{18} равно $\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{3}}$.

точности, ρ , откуда будет следовать, что исходный шестиугольник можно разбить на 18 частей диаметра ρ . Без ограничения общности будем рассматривать четырехугольник OD_2DE_2 , который является вписанным, так как $\angle E_2OD_2 = 60^\circ$ и $\angle E_2DD_2 = 120^\circ$. Пусть γ — описанная около OD_2DE_2 окружность, а S — центр γ . Можно пока-

зать, что радиус окружности γ равен в точности $\rho = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{3}}$. Окружность радиуса ρ с центром в точке D_1 пересекает отрезки OE_2 и OD_2 в точках U и V соответственно. Тогда четырехугольник OD_2DE_2 разбивается на два четырехугольника $OUSV$, USD_1E_2 и один пятиугольник DD_1SVD_2 , диаметр

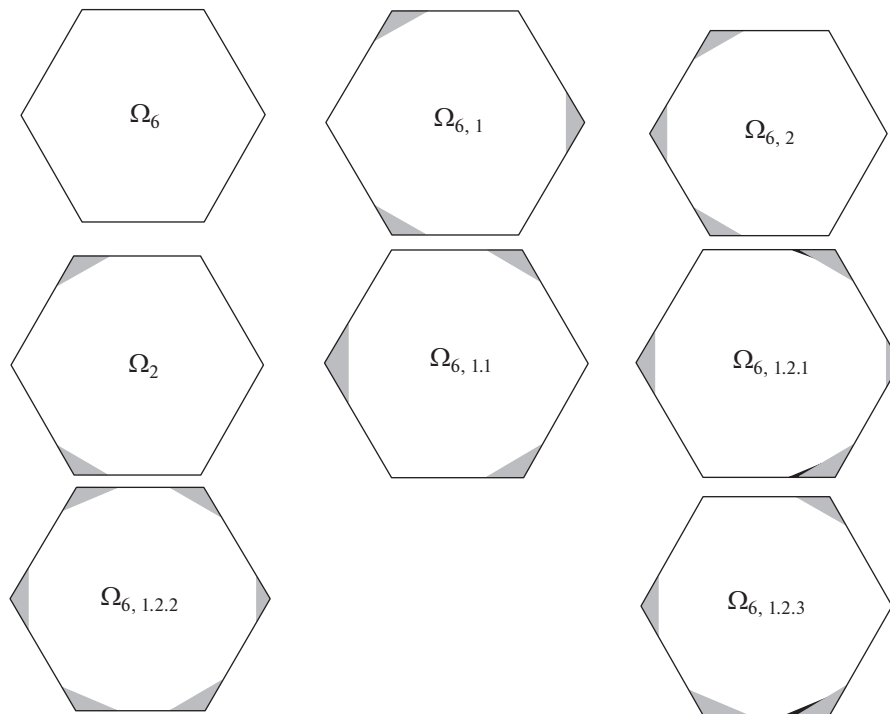
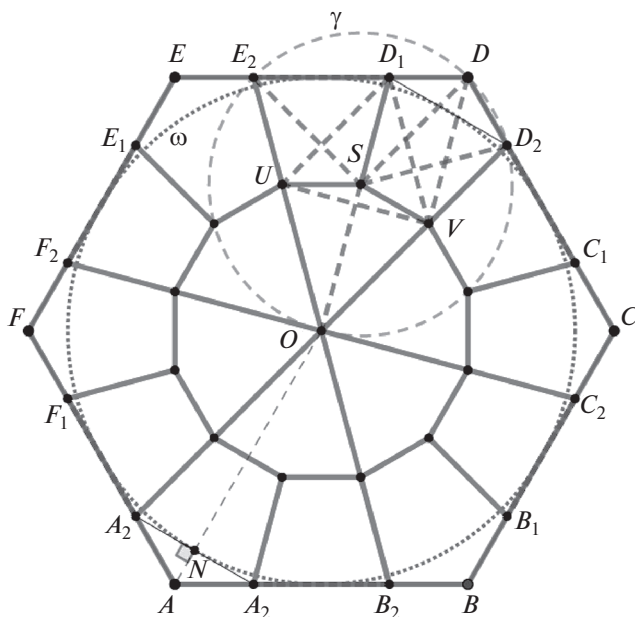


Рис. 1. Фигуры, используемые в УПС.

каждого из которых равен ρ . На рис. 2 длины отрезков, выделенных жирным пунктиром, равны ρ . Тем самым показано, что шестиугольник $ABCDEF$ можно разбить на 18 частей, диаметр каждой из которых равен ρ . На рис. 2 выделены части данного разбиения.

Рис. 2. Разбиение Ω_6 на 18 частей.

Выше мы показали, как получается верхняя оценка на примере оценки величины d_{18} . Также важно отметить, что эта оценка — единственная, которую удалось точно выразить в радикалах среди всех полученных в данном исследовании оценок.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают искреннюю благодарность своему научному руководителю А.М. Райгородскому за координацию работы над данной темой, а также В.П. Филимонову и В.А. Воронову за консультации по различным вопросам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Borsuk K. Drei Sätze über die n -dimensionale euklidische Sphäre // Fundamenta Math. 1933. V. 20. P. 177–190.
2. Raigorodskii A.M. Coloring Distance Graphs and Graphs of Diameters // Thirty Essays on Geometric Graph Theory. J. Pach ed. Springer. 2013. P. 429–460.
3. Райгородский А.М. О разбиении множеств на части меньшего диаметра // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 495. С. 74–77.
4. Berdnikov A.V., Raigorodskii A.M. Bounds for Borsuk's numbers using special distance graphs // submitted to Information Transmission Problems.
5. Lenz H. Zerlegung ebener Bereiche in konvexe Zellen von möglichst kleinem Durchmesser // Jber. Deutsch. Math. Verein. 1956. V. 58. P. 87–97.

6. *Dembiński M., Lassak M.* Covering plane sets with sets of three times less diameter // *Demonstratio Math.* 1985. V. 18. № 2. P. 517–526.
7. *Филимонов В.П.* О покрытии плоских множеств // *Матем. сборник.* 2010. Т. 201. № 8. С. 127–160.
8. *Белов Д., Александров Н.* О разбиении плоских множеств на шесть частей малого диаметра // *Труды МФТИ.* 2012. Т. 4. № 1. С. 11–13.
9. *Коваль В.О.* О разбиении плоских множеств на 6 частей малого диаметра // *Зап. научн. сем. ПОМИ.* 2020. Т. 497. С. 100–123.
10. *Pal J.* Uber ein elementares Variationsproblem // *Danske Videnskab. Selskab. Math.-Fys. Meddel.* 1920. V. 3. № 2.
11. *Райгородский А.М.* Проблема Борсука и хроматические числа метрических пространств // *Успехи матем. наук.* 2001. Т. 56. № 1. С. 107–146.
12. *Просанов Р.И.* Контрпримеры к гипотезе Борсука, имеющие большой обхват // *Матем. заметки.* 2019. Т. 105. № 6. С. 890–898.
13. *Боголюбский Л.И., Райгородский А.М.* Замечание о нижних оценках хроматических чисел пространств малой размерности с метриками l_1 и l_2 // *Матем. заметки.* 2019. Т. 105. № 2. С. 187–213.
14. *Raigorodskii A.M., Koshelev M.M.* New bounds on clique-chromatic numbers of Johnson graphs // *Discrete and Applied Math.* 2020. V. 283. P. 724–729.
15. *Райгородский А.М., Кошелев М.М.* Новые оценки клико-хроматических чисел графов Джонсона // *Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления.* 2020. Т. 490. С. 78–80.
16. *Prosanov R.* A new proof of the Larman–Rogers upper bound for the chromatic number of the Euclidean space // *Discrete Applied Mathematics.* 2020. №. 276. P. 115–120.
17. *Кунавский А.Б., Саздеев А.А.* Теория Рамсея в пространстве с чебышевской метрикой // *Успехи матем. наук.* 2020. Т. 75. № 5. С. 191–192.
18. Разбиения для верхних оценок.
<https://github.com/Vosatorp/Partitions>

COVERING PLANAR SETS

A. D. Tolmachev^a and D. S. Protasov^a

^a*Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University),
Dolgoprudny, Moscow Region, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

Problems connected with the classical Borsuk problem on partitioning a set in Euclidean space into subsets of smaller diameter. The article proposes methods for improving the upper and lower bounds for various coverings of planar sets. The obtained bounds are better than any known before. The article contains suggestions for the generalization of presented methods.

Keywords: Borsuk problem, diameter of a set, coverings of planar sets, universal covering sets and systems, chromatic number