ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 499, с. 40–43

УДК 519.1

ОЦЕНКА ЧИСЛА РЕБЕР В ПОДГРАФАХ ГРАФА ДЖОНСОНА

© 2021 г. Ф. А. Пушняков[1], А. М. Райгородский[1,2,3,4,*]

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 01.11.2019 г.
Поступило 01.11.2019 г.
После доработки 09.05.2021 г.
Принято к публикации 16.05.2021 г.

Получены новые оценки минимального числа ребер в подграфах графа Джонсона.

Ключевые слова: граф Джонсона, дистанционные графы, теорема Турана
DOI: 10.31857/S2686954321040135

Пусть $n > r > s$. Рассмотрим следующее семейство графов:

$$G(n,r,s) = (V,E), \quad V = \binom{[n]}{r},$$
$$E = \{(A,B)\colon |A \cap B| = s\},$$

т.е. вершины графа – это всевозможные r-элементные подмножества $[n] := \{1,\ldots,n\}$, а ребрами мы соединяем пары множеств, пересекающихся ровно по s элементам. Эти графы называются графами Джонсона и играют важную роль в задачах теории кодирования (см. [1]), теории Рамсея (см. [2–4]), комбинаторной геометрии (см. [5–11]), теории гиперграфов (см. [12–19]).

Напомним, что независимое множество вершин графа – это любое такое множество его вершин, в котором нет ни одного его ребра, а число независимости графа G – это величина $\alpha(G)$, равная мощности любого из максимальных по числу вершин независимых множеств в G. Классическая проблематика теории графов, восходящая к Турану, состоит в отыскании величины $r_G(l)$, равной минимальному количеству ребер графа G, попадающих внутрь его множества вершин мощности l. Конечно, если $l \le \alpha(G)$, то $r_G(l) = 0$. Поэтому интересны лишь случаи $l > \alpha(G)$.

Классическая теорема Турана утверждает, что на множестве всех графов следующая оценка неулучшаема:

$$r_G(l) \ge l \cdot \left[\frac{l}{\alpha(G)}\right] - \alpha(G) \cdot \frac{\left[\frac{l}{\alpha(G)}\right] \cdot \left(\left[\frac{l}{\alpha(G)}\right] + 1\right)}{2}. \quad (1)$$

В частности, если G_n – последовательность графов с растущими к бесконечности числами вершин, а $l = l(n) \to \infty$, $\alpha = \alpha(G_n)$ и $\alpha = o(l)$, то

$$r_{G_n}(l) \ge (1 + o(1))\frac{l^2}{2\alpha},$$
$$\min_{\{G_n\}} r_{G_n}(l) \sim \frac{l^2}{2\alpha}. \quad (2)$$

Однако для графов $G(n,r,s)$ картина меняется, и именно она интересует нас в этой работе. Во-первых, в серии статей первого автора (см. [6]) подробно исследованы графы $G_n = G(n,3,1)$, для которых, среди прочего, доказано, что в обозначениях и условиях оценки (2)

$$(1 + o(1))\frac{3l^2}{2\alpha} \le r_{G_n}(l) \le (1 + o(1))\frac{9l^2}{2\alpha}. \quad (3)$$

Иными словами, нижняя оценка в (3) втрое больше оценки (2), которая неулучшаема в общем случае.

Для произвольных графов $G(n,r,s)$ оценок ранее не было. Однако это дистанционные графы, т.е. их вершины можно считать точками в $\mathbb{R}^n$ (это n-мерные векторы с r единицами и $n - r$ нулями), а ребра тогда – это пары точек на расстоянии $\sqrt{2(r - s)}$. Для графов такого типа в работе [20] доказана следующая оценка. Пусть условия те же, что в неравенстве (2), и, более того, $\alpha n = o(l)$. Тогда

[1] *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия*
[2] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[3] *Кавказский математический центр Адыгейского государственного университета, Майкоп, Россия*
[4] *Бурятский государственный университет, Институт математики и информатики, Улан-Удэ, Россия*
**E-mail: mraigor@yandex.ru*

$$r_{G_n}(l) \geq (1 + o(1))\frac{l^2}{\alpha}. \qquad (4)$$

Таким образом, оценка (4) вдвое сильнее оценки (2).

Прежде всего мы докажем следующую несложную теорему.

Т е о р е м а 1. *Пусть даны числа r, s. Пусть $G_n = G(n, r, s)$. Пусть $l = l(n) \to \infty$. Тогда*

$$r_{G_n}(l) \leq (1 + o(1)) \cdot \frac{l^2}{n^s} \cdot \frac{C_r^s \cdot r!}{2 \cdot (r - s)!}.$$

Чтобы сравнить теорему 1 с оценками (1)–(4), надо напомнить, как ведут себя числа независимости графов $G(n, r, s)$. В работе [21] доказана

Т е о р е м а 2. *Пусть даны числа r, s. Тогда*

1. *Если $r > 2s + 1$, то при достаточно больших n*

$$\alpha(G(n, r, s)) = C_{n-s-1}^{r-s-1} \sim \frac{n^{r-s-1}}{(r - s - 1)!};$$

2. *Если $r \leq 2s + 1$ и $r - s$ — степень простого числа, то*

$$\alpha(G(n, r, s)) \sim n^s \cdot \frac{(2r - 2s - 1)!}{r! \cdot (r - s - 1)!};$$

3. *Для любых r, s существуют $c(r, s)$ и $d(r, s)$, с которыми*

$$c(r, s) \cdot \max\{n^s, n^{r-s-1}\} \leq \alpha(G(n, r, s)) \leq$$
$$\leq d(r, s) \cdot \max\{n^s, n^{r-s-1}\}.$$

Из теоремы 2 сразу следует, что новая теорема 1 дает лучшую из ранее известных верхних оценок для случая параметров n, 3, 1 — оценку (3). Более того, при $r \leq 2s + 1$ получаем, что порядок новой верхней оценки из теоремы 1 совпадает с порядком классических нижних оценок, ведь у них в знаменателе стоит число независимости, которое в данном режиме имеет порядок n^s. И только при $r > 2s + 1$ имеется серьезный зазор по порядку. Особенно любопытно выглядит случай с $s = 0$. Это случай так называемых кнезеровских графов (см. [2]). Получается, что в его рамках новая верхняя оценка из теоремы 1 тривиальна, ибо асимптотически равна $\frac{l^2}{2}$, а это асимптотика числа ребер полного графа на l вершинах! Как ни странно, это не свидетельство слабости новой оценки. Имеет место

Т е о р е м а 3. *Пусть $G_n = G(n, r, 0)$. Пусть $l > \alpha(G(n, r, 0)) = C_{n-1}^{r-1}$. Тогда*

$$r_{G_n}(l) \geq \frac{l(l - (C_n^r - C_{n-r}^r))}{2}.$$

Видно, что если l сильно больше числа независимости, т.е. $n^{r-1} = o(l)$, то оценка в теореме 3 асимптотически равна $\frac{l^2}{2}$. Действительно, разность $C_n^r - C_{n-r}^r$ имеет порядок n^{r-1}.

Есть, наконец, интересный режим, в котором теорема 3 не работает. Это режим, когда $l \sim C_{n-1}^{r-1}$. В таком случае оценка теоремы 3 становится отрицательной. Здесь удается доказать следующую теорему.

Т е о р е м а 4. *Пусть $G_n = G(n, r, 0)$. Пусть $l > \alpha(G(n, r, 0)) = C_{n-1}^{r-1}$. Тогда*

$$r_{G_n}(l) \geq \min_{\beta \leq C_{n-1}^{r-1}} \max\left\{ l \cdot \left[\frac{l}{\beta}\right] - \beta \cdot \frac{\left[\frac{l}{\beta}\right] \cdot \left(\left[\frac{l}{\beta}\right] + 1\right)}{2}, (l - \beta)(\beta - r^2 C_{n-2}^{r-2}) \right\}.$$

Например, если $l = \alpha(G(n, r, 0)) + 1$, то все классические оценки принимают значение 1. Однако здесь мы имеем значительное усиление. В самом деле, если $\beta \leq 2r^2 C_{n-2}^{r-2}$, то первая величина из двух под знаком максимума имеет порядок не ниже n^r. При больших β уже вторая величина имеет порядок, как минимум, n^{r-2}. Можно и аккуратнее оценить, но суть ясна и так.

В следующем разделе мы приведем схемы доказательств теорем 1, 3, 4.

СХЕМЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

1. Схема доказательства теоремы 1

Рассмотрим множество всех индуцированных подграфов графа $G(n, r, s)$, имеющих l вершин. Для каждого графа H из этого множества и каждого ребра графа $G(n, r, s)$ рассмотрим индикатор вхождения этого ребра в H. Просуммируем индикаторы по всем ребрам и по всем графам двумя способами. С одной стороны, получится произведение числа ребер и числа графов, содержащих данное ребро:

$$A = \left(\frac{1}{2} \cdot C_n^r \cdot C_{n-r}^{r-s} \cdot C_r^s\right) \cdot \left(C_{C_n^r - 2}^{l-2}\right).$$

С другой стороны, получится сумма по H чисел ребер в H. Таким образом, минимальное число ребер не меньше, чем

$$\frac{A}{C_{C_n^r}^l} \sim \frac{1}{2} \cdot C_n^r \cdot C_n^{r-s} \cdot C_r^s \cdot \frac{l^2}{(C_n^r)^2} \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{l^2}{n^s} \cdot C_r^s \cdot \frac{r!}{(r-s)!}.$$

Теорема доказана.

2. Схема доказательства теоремы 3

Пусть W — некоторое множество вершин графа $G(n,r,0)$, имеющее мощность l. Тогда для любой вершины $v \in W$ имеем

$$\left|\{w \in W\colon w \sim v\}\right| =$$
$$= l - \left|\{w \in W\colon w \nsim v\}\right| l - \left|\{w\colon w \nsim v\}\right| =$$
$$= l - (C_n^r - \left|\{w \in W\colon w \sim v\}\right|) = l - (C_n^r - C_{n-r}^r).$$

Суммирование по всем вершинам завершает доказательство.

3. Схема доказательства теоремы 4

Пусть H — подграф графа $G(n,r,0)$, имеющий l вершин. Пусть β — максимальная мощность независимого множества вершин в H. Очевидно, $\beta \le \alpha(G(n,r,0)) = C_{n-1}^{r-1}$. Пусть B — любое независимое множество вершин H мощности β. С одной стороны, имеет место рассуждение, которое восходит к Турану и дает оценку (1) с заменой α на β. Именно она и стоит первой под знаком максимума. С другой стороны, как и в начале турановского рассуждения, отметим, что каждая вершина H, не принадлежащая B, отправляет хотя бы одно ребро в B. Если на этом остановиться, то получится оценка $l - \beta$, которая намного слабее турановской, ибо входит лишь как одно из слагаемых в турановское неравенство. Однако вид второй величины под знаком максимума в теореме 4 подсказывает, что можно значимо усилить утверждение о хотя бы одном ребре, идущем в B. Действительно, покажем, что таких ребер не меньше, чем $\beta - r^2 C_{n-2}^{r-2}$. Пусть $v \notin B$, а w — ее гарантированный сосед из B. Пусть $z \in B$ и $z \nsim v$. Разумеется, $z \nsim w$, ведь B — независимое множество. Получается, что r-элементные подмножества R, S множества $[n]$, отвечающие вершинам v, w, не пересекаются (вершины образуют ребро), а r-элементное подмножество T, отвечающее z, пересекает и R и S. Таких множеств T не больше, чем $r^2 C_{n-2}^{r-2}$. Следовательно, не более $r^2 C_{n-2}^{r-2}$ вершин из B не соединены с v, откуда число вершин в B, являющихся соседками с v, не меньше $\beta - r^2 C_{n-2}^{r-2}$. Теорема доказана.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Настоящая работа выполнена за счет гранта РФФИ (проект № 18-01-00355) и гранта президента НШ-6760.2018.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *MacWilliams F.J., Sloane N.J.A.* The theory of error-correcting codes. North-Holland, Amsterdam. 1977.
2. *Raigorodskii A.M., Koshelev M.M.* New bounds on clique-chromatic numbers of Johnson graphs // Discrete and Applied Math. 2020. V. 283. P. 724–729.
3. *Купавский А.Б., Сагдеев А.А.* Теория Рамсея в пространстве с чебышевской метрикой // УМН. 2020. Т. 75. № 5 (455). С. 191–192.
4. *Sagdeev A.A.* On the Chromatic Numbers Corresponding to Exponentially Ramsey Sets // J. Math. Sciences. 2020. V. 247. № 3. P. 488–497.
5. *Райгородский А.М.* О разбиении множеств на части меньшего диаметра // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 495. С. 74–77.
6. *Пушняков Ф.А., Райгородский А.М.* Оценка числа ребер в особых подграфах некоторого дистанционного графа // Матем. заметки. 2020. Т. 107. № 2. С. 286–298.
7. *Шишунов Е.Д., Райгородский А.М.* О числах независимости некоторых дистанционных графов с вершинами в $\{-1, 0, 1\}^n$ // ДАН. 2019. Т. 485. № 3.
8. *Prosanov R.* A new proof of the Larman–Rogers upper bound for the chromatic number of the Euclidean space // Discrete Applied Mathematics. 2020. V. 276. P. 115–120.
9. *Просанов Р.И.* Контрпримеры к гипотезе Борсука, имеющие большой обхват // Матем. заметки. 2019. Т. 105. № 6. С. 890–898.
10. *Сагдеев А.А.* Об одной теореме Франкла–Уилсона // Пробл. передачи информ. 2019. Т. 55. № 4. С. 86–106.
11. *Бердников А.В., Райгородский А.М.* Оценки чисел Борсука по дистанционным графам специального вида // Проблемы передачи информации. 2021. Т. 57. № 2. С. 44–50.
12. *Frankl P., Kupavskii A.* Almost intersecting families // Electron. J. Comb. 2021. V. 28. № 2. Research Paper P2.7. 16 p.
13. *Frankl P., Kupavskii A.* Simple juntas for shifted families // Discrete Anal. 2020. Paper No. 14. 18 p.
14. *Shabanov D.A., Krokhmal N.E., Kravtsov D.A.* Panchromatic 3-colorings of random hypergraphs // Europ. J. Combinatorics. 2019. V. 78. P. 28–43.
15. *Cherkashin D., Petrov F.* Regular behavior of the maximal hypergraph chromatic number // SIAM J. Discrete Mathematics. 2020. V. 34. № 2. P. 1326–1333.

16. *Райгородский А.М., Черкашин Д.Д.* Экстремальные задачи в раскрасках гиперграфов // Успехи матем. наук. 2020. Т. 75. № 1. С. 95–154.

17. *Шабанов Д.А., Шайхеева Т.М.* О предписанном хроматическом числе полных многодольных гиперграфов и кратных покрытиях независимыми множествами // Матем. заметки. 2020. Т. 107. № 3. С. 454–465.

18. *Semenov A., Shabanov D.* On the weak chromatic number of random hypergraphs // Discrete Applied Mathematics. 2020. V. 276. P. 134–154.

19. *Akhmejanova M.B., Shabanov D.A.* Equitable colorings of hypergraphs with few edges // Discrete Applied Mathematics. 2020. V. 276. P. 2–12.

20. *Райгородский А.М., Михайлов К.А.* О числах Рамсея для полных дистанционных графов с вершинами в $\{0, 1\}^n$ // Матем. сборник. 2009. Т. 200. № 12. С. 63–80.

21. *Frankl P., Furedi Z.* Forbidding just one intersection // J. Combinatorial Theory. Series A. 1985. V. 39. P. 160–176.

ESTIMATE OF THE NUMBER OF EDGES IN SUBGRAPHS OF JOHNSON'S GRAPH

Ph. A. Pushnyakov[a] and A. M. Raigorodskii[a,b,c,d]

[a] *Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Moscow Region, Russian Federation*

[b] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

[c] *Institute of Mathematics and Computer Science, Adygya State University, Maykop, Russian Federation*

[d] *Institute of Mathematics and Computer Science, Buryat State University, Ulan-Ude, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

New estimates of the number of edges in subgraphs of Johnson's graph are obtained.

Keywords: Johnson's graph, distance graphs, Turán's theorem