ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 499, № 1, с. 35–39

МАТЕМАТИКА

УДК 517.968.43

ПРИМЕНЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ К ИССЛЕДОВАНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В РАВНОВЕСНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЛОГИСТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКЕ

© 2021 г. М. В. Николаев[1,*], У. Дикман[2,3,], А. А. Никитин[1,4,***]**

Представлено академиком РАН И.А. Соколовым 31.03.2021 г.
Поступило 31.03.2021 г.
После доработки 04.04.2021 г.
Принято к публикации 07.05.2021 г.

Изучается нелинейное интегральное уравнение, возникающее в некоторой модели пространственной логистической динамики. Вопрос разрешимости данного уравнения исследуется с помощью введения специальных пространств функций, интегрируемых с точностью до константы. Устанавливаются достаточные условия на биологические характеристики, а также параметры замыкания третьего пространственного момента, гарантирующие существование решения описанного выше уравнения в некотором шаре с центром в нуле. Кроме того, показывается, что данное решение единственно в рассматриваемом шаре и не является нулевым. Это означает, что при соответствующих условиях состояние равновесия популяции некоторого вида существует и не совпадает с состоянием вымирания.

Ключевые слова: функциональный анализ, нелинейные интегральные уравнения, математическая биология

DOI: 10.31857/S2686954321040123

Основным предметом изучения в данной работе является параметрическое семейство нелинейных интегральных уравнений, возникающее при замыкании третьего момента в пространственной логистической модели У. Дикмана и Р. Лоу [1, 2]. Краткое описание данной модели, а также математическая постановка рассматриваемой задачи приведены в первой части нашей работы. Во втором разделе вводится специальное функциональное пространство и приводятся некоторые операторы, действующие в нем. В третьей части рассмотренные операторы используются для построения параметрического отображения, действующего в обозначенном ранее пространстве функций, неподвижные точки которого совпадают с решениями исследуемых уравнений. Кроме того, указываются достаточные условия существования неподвижных точек данного отображения и их единственность в некотором шаре при различных наборах параметров.

1. ОПИСАНИЕ ЗАДАЧИ

1.1. Модель биологических сообществ

Рассмотрим некоторую популяцию неподвижных организмов, обитающих в пространстве $\mathbb{R}^k$. Модель характеризуется следующими гомогенными в пространстве биологическими параметрами:

1) естественная смертность ($d \geq 0$),

2) агрессивность индивидов ($d' \geq 0$),

3) интенсивность рождения новых особей ($b > 0$),

4) ядро движения ($m = m(x)$),

5) ядро конкуренции ($w = w(x)$).

При этом ядра движения и конкуренции являются неотрицательными, радиально-симметричными, интегрируемыми функциями, с L_1-нормой равной 1, которые исчезают на бесконечности. Ядро движения представляет собой плотность веро-

[1]*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[2]*Международный институт прикладного системного анализа, Лаксенбург, Австрия*
[3]*Department of Evolutionary Studies of Biosystems, The Graduate University for Advanced Studies (Sokendai), Hayata, Japan*
[4]*Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия*
*E-mail: nikolaev.mihail@inbox.ru
**E-mail: dieckmann@iiasa.ac.at
***E-mail: nikitin@cs.msu.ru

ятности случайной величины, определяющей положение потомков относительно своих родителей. Ядро конкуренции описывает пространственную структуру конкуренции между индивидами.

В каждый момент времени состояние изучаемой популяции характеризуется пространственными моментами, которые являются усреднением некоторых статистических характеристик. Мы будем рассматривать первые три момента:

1) $N(t)$ – средняя плотность особей,

2) $C(x,t)$ – средняя плотность пар особей, в которых сдвиг второго индивида относительно первого равен x,

3) $T(x,y,t)$ – средняя плотность троек особей, в которых сдвиг второго и третьего индивидов относительно первого равен x и y соответственно.

В настоящей статье мы будем работать с состоянием равновесия популяции, которое характеризуется отсутствием динамики моментов во времени (таким образом, моменты перестают зависеть от t). Оно описывается следующей системой интегральных уравнений (подробнее см. в [2]):

$$\begin{gathered} 0 = (b-d)N - d'\int_{\mathbb{R}^k} C(x)w(x)dx, \\ 0 = bm(x)N + \int_{\mathbb{R}^k} bm(y)C(x+y)dy - \\ -(d + d'w(x))C(x) - \int_{\mathbb{R}^k} d'w(y)T(x,y)dy. \end{gathered} \tag{1}$$

1.2. Уравнение равновесия

В работе рассматривается трехпараметрическое семейство замыканий третьего момента вида

$$T(x,y) = \tag{2}$$
$$= \frac{\alpha C(x)C(y) + \beta C(x)C(y-x) + \gamma C(y)C(y-x) - \beta N^4}{(\alpha+\gamma)N},$$

где $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, при этом $\alpha + \gamma \neq 0$. Оно используется с целью уменьшения количества неизвестных в системе (1) (подробнее о методе замыканий см. [3]). После подстановки замыкания (2) в систему (1) и некоторых преобразований, получим

$$Q = \frac{\bar{m} + [\bar{m} * Q] - \bar{w}Q - \dfrac{\beta}{\alpha+\gamma}Q[\bar{w} * Q] - \dfrac{\gamma}{\alpha+\gamma}[Q\bar{w} * Q] + \dfrac{\beta d'}{\alpha+\gamma}N^2}{d + \dfrac{\alpha(b-d)}{\alpha+\gamma}}, \tag{3}$$

где $Q = C/N$, $\bar{m} = bm$, $\bar{w} = d'w$. Для сокращения записи все аргументы у функций опущены. Нотация $[f * g]$ здесь обозначает интеграл следующего вида:

$$\int_{\mathbb{R}^k} f(x-y)g(y)dy.$$

Будем называть уравнение (3) уравнением равновесия. Отметим, что

$$\lim_{\|x\|_{\mathbb{R}^k} \to +\infty} Q(x) = N, \tag{4}$$

поскольку в [3] было показано, что

$$\lim_{\|x\|_{\mathbb{R}^k} \to +\infty} C(x) = N^2.$$

2. ПРОСТРАНСТВО $\widehat{L_1}(\mathbb{R}^k)$

2.1. Определение

Прежде чем приступать к дальнейшему исследованию уравнения равновесия, рассмотрим некоторое специальное пространство функций, которому, как будет показано далее, принадлежит решение уравнения (3).

Рассмотрим множество функций вида $f = F + n$, где $F \in L_1(\mathbb{R}^k)$, а $n \in \mathbb{R}$. Будем в дальнейшем называть функцию F функциональной частью элемента f и обозначать $\mathcal{F}f$, а n – числовой частью и обозначать $\mathcal{N}f$. Очевидно, что рассмотренное множество линейно относительно операций сложения и умножения на число. Введем на вышеупомянутом множестве структуру нормированного пространства, определив норму по правилу

$$\|f\|_{\widehat{L_1}} = \|\mathcal{F}f\|_{L_1} + |\mathcal{N}f|.$$

Полученное пространство обозначим за $\widehat{L_1}(\mathbb{R}^k)$.

З а м е ч а н и е 1. Элементы f и g пространства $\widehat{L_1}(\mathbb{R}^k)$ равны тогда и только тогда, когда равны их функциональные и числовые части соответственно.

Л е м м а 1. *Пространство $\widehat{L_1}(\mathbb{R}^k)$ банахово.*

2.2. Некоторые операторы в $\widehat{L_1}(\mathbb{R}^k)$

Рассмотрим некоторые операторы, действующие в $\widehat{L_1}(\mathbb{R}^k)$, которые представляют наибольший интерес в данной работе.

Определим сверточный оператор $\mathscr{C}_\varphi$, действующий на функции из $\widehat{L_1}(\mathbb{R}^k)$ по правилу

$$\mathscr{C}_\varphi f = [\varphi * f] = \int\limits_{\mathbb{R}^k} \varphi(x-y)f(y)dy,$$

где $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^k)$.

Лемма 2. *Оператор $\mathscr{C}_\varphi$ является ограниченным линейным оператором, действующим в $\widehat{L_1}(\mathbb{R}^k)$, норма которого равна $\|\varphi\|_{L_1}$.*

Введем вспомогательное пространство функций

$$BL_1(\mathbb{R}^k) = \{f \in L_1(\mathbb{R}^k) \mid \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbb{R}^k}|f| < +\infty\},$$

обозначая

$$\|f\|_{BL_1} = \max\{\|f\|_{L_1}, \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbb{R}^k}|f|\}.$$

Определим оператор самосвертки $\mathscr{S}_\varphi$, действующий на функции из $\widehat{L_1}(\mathbb{R}^k)$ по правилу

$$\mathscr{S}_\varphi f = [f\varphi * f] = \int\limits_{\mathbb{R}^k} f(x-y)\varphi(x-y)f(y)dy,$$

где $\varphi \in BL_1(\mathbb{R}^k)$. Можно показать, что этот оператор действует в $\widehat{L_1}(\mathbb{R}^k)$. Более того, верно следующее утверждение.

Лемма 3. *Для любой пары элементов f, $g \in \widehat{L_1}(\mathbb{R}^k)$ имеет место неравенство*

$$\|\mathscr{S}_\varphi f - \mathscr{S}_\varphi g\|_{\widehat{L_1}} \le \|\varphi\|_{BL_1}(\|f\|_{\widehat{L_1}} + \|g\|_{\widehat{L_1}})\|f-g\|_{\widehat{L_1}}.$$

Определим оператор произведения на свертку $\mathscr{P}_\varphi$, действующий из $\widehat{L_1}(\mathbb{R}^k)$ по правилу

$$\mathscr{P}_\varphi f = f[\varphi * f] = f(x)\int\limits_{\mathbb{R}^k} \varphi(x-y)f(y)dy,$$

где $\varphi \in BL_1(\mathbb{R}^k)$. Данный оператор также действует в $\widehat{L_1}(\mathbb{R}^k)$ и верно следующее утверждение, которое аналогично лемме 3.

Лемма 4. *Для любой пары элементов $f, g \in \widehat{L_1}(\mathbb{R}^k)$ имеет место неравенство*

$$\|\mathscr{P}_\varphi f - \mathscr{P}_\varphi g\|_{\widehat{L_1}} \le \|\varphi\|_{BL_1}(\|f\|_{\widehat{L_1}} + \|g\|_{\widehat{L_1}})\|f-g\|_{\widehat{L_1}}.$$

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

3.1. Оператор равновесия

Теперь мы готовы приступить к дальнейшему исследованию уравнения равновесия (3). Далее будем дополнительно считать, что ядра рождения и конкуренции почти всюду ограничены. В таком случае они принадлежат классу $BL_1(\mathbb{R}^k)$.

Будем искать решение уравнения (3) в пространстве $\widehat{L_1}(\mathbb{R}^k)$. Условие (4) позволяет нам сказать, что в таком случае $N = \mathscr{N}Q$. Учитывая это, перепишем уравнение в операторной форме

$$Q = \mathscr{A}Q, \tag{5}$$

где оператор $\mathscr{A}$ действует из $\widehat{L_1}(\mathbb{R}^k)$ по правилу

$$\mathscr{A}f = \frac{\overline{m} + [\overline{m} * f] - \overline{w}f - \dfrac{\beta}{\alpha+\gamma}f[\overline{w} * f] - \dfrac{\gamma}{\alpha+\gamma}[f\overline{w} * f] + \dfrac{\beta d'}{\alpha+\gamma}(\mathscr{N}f)^2}{d + \dfrac{\alpha(b-d)}{\alpha+\gamma}}. \tag{6}$$

С помощью введенных ранее операторов, представление (6) может быть переписано в виде

$$\mathscr{A}f = \frac{\overline{m} + \mathscr{C}_{\overline{m}}f - \overline{w}f - \dfrac{\beta}{\alpha+\gamma}\mathscr{P}_{\overline{w}}f - \dfrac{\gamma}{\alpha+\gamma}\mathscr{S}_{\overline{w}}f + \dfrac{\beta d'}{\alpha+\gamma}(\mathscr{N}f)^2}{d + \dfrac{\alpha(b-d)}{\alpha+\gamma}}. \tag{7}$$

Отметим, что $\mathscr{A}$ действует в $\widehat{L_1}(\mathbb{R}^k)$, поскольку операторы $\mathscr{C}_{\overline{m}}$, $\mathscr{P}_{\overline{w}}$ и $\mathscr{S}_{\overline{w}}$ действуют в этом пространстве. Фактически мы свели задачу о решении уравнения (3) к задаче нахождения неподвижной точки оператора (7). Будем называть этот оператор оператором равновесия.

3.2. Неподвижная точка оператора равновесия

С учетом рассмотренных выше лемм 2–4, можно оценить, насколько сильно меняется расстояние между двумя элементами пространства $\widehat{L_1}(\mathbb{R}^k)$ под действием операторов $\mathscr{C}_{\overline{m}}$, $\mathscr{S}_{\overline{w}}$ и $\mathscr{P}_{\overline{w}}$. Исходя из этого нетрудно найти достаточные условия сжимаемости оператора $\mathscr{A}$ в некотором шаре B пространства $\widehat{L_1}(\mathbb{R}^k)$. Проводя оценку величин $\|\mathscr{A}\|_{\widehat{L_1}}$ при $f \in B$, можно выявить замкнутый шар $B' \subset B$, инвариантный относительно оператора равновесия. Однако замкнутый шар полного метрического пространства сам является полным метрическим пространством. Это позволяет нам, воспользовавшись принципом Банаха, доказать, что оператор $\mathcal{A}$ будет иметь в B' единственную неподвижную точку.

Данные рассуждения приводят нас к следующей теореме.

Т е о р е м а 1. *Если выполнены условия*

$$\gamma < 0,$$
$$\alpha b + \gamma d > 0,$$
$$2\beta - \gamma > 0,$$
$$b - d > \frac{\alpha + \gamma}{-\gamma}\|\overline{w}\|_{BL_1},$$
$$b - d > \frac{4b(2\beta - \gamma)}{-\gamma},$$

а положительное число R удовлетворяет системе неравенств

$$\begin{gathered} -\frac{\alpha+\gamma}{4\beta-2\gamma} \le R < -\frac{\gamma(b-d)}{\|\overline{w}\|_{BL_1}(4\beta-2\gamma)} - \frac{\alpha+\gamma}{4\beta-2\gamma}, \\ \frac{\gamma(b-d)-\sqrt{D}}{2\|\overline{w}\|_{BL_1}(2\beta-\gamma)} \le R \le \frac{\gamma(b-d)+\sqrt{D}}{2\|\overline{w}\|_{BL_1}(2\beta-\gamma)}, \end{gathered} \tag{8}$$

где

$$D = \gamma^2(b-d)^2 - 4b(\alpha+\gamma)(2\beta-\gamma)\|\overline{w}\|_{BL_1},$$

то оператор равновесия (6) *имеет в шаре радиуса R с центром в нуле единственную неподвижную точку.*

З а м е ч а н и е 2. В условиях теоремы 1 неподвижная точка оператора равновесия ненулевая, так как образ нулевого элемента пространства $\widehat{L}_1(\mathbb{R}^k)$ под действием оператора $\mathcal{A}$ не является нулевым.

Приведем пример параметров модели, удовлетворяющих условиям вышеуказанной теоремы. Пусть $\alpha = 1/2$, $\beta = -7/16$, а $\gamma = -1$, тогда

$$\gamma = -1 < 0,$$
$$2\beta - \gamma = \frac{1}{8} > 0.$$

Если выбрать $b = 1$ и $d = 1/10$, то

$$\alpha b + \gamma d = \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{2}{5} > 0,$$
$$b - d = \frac{9}{10} > \frac{1}{2} = \frac{4b(2\beta-\gamma)}{-\gamma}.$$

Выберем ядро конкуренции в виде плотности нормального распределения с нулевым математическим ожиданием и стандартным отклонением равным $(10\sqrt{2\pi})^{-1}$, т.е.

$$w(x) = 10e^{-100\pi x^2},$$

а также возьмем $s = 1$, тогда $\|\overline{w}\|_{BL_1} = 10$. Поэтому

$$b - d = \frac{9}{10} > -5 = \frac{\alpha+\gamma}{-\gamma}\|\overline{w}\|_{BL_1}.$$

Значение величины D при таком выборе будет равно 331/100, значит,

$$\frac{\gamma(b-d)+\sqrt{D}}{\|\overline{w}\|_{BL_1}(2\beta-\gamma)} = \frac{-1\cdot 9/10 + \sqrt{331/100}}{10\cdot 1/8} =$$
$$= \frac{-72+8\sqrt{331}}{100} > \frac{-72+8\cdot 18}{100} = \frac{36}{50}.$$

При этом

$$-\frac{\alpha+\gamma}{4\beta-2\gamma} = \frac{2}{5} < \frac{36}{50},$$

т.е.

$$-\frac{\alpha+\gamma}{4\beta-2\gamma} < \frac{\gamma(b-d)+\sqrt{D}}{\|\overline{w}\|_{BL_1}(2\beta-\gamma)}. \tag{9}$$

С другой стороны,

$$\frac{\gamma(b-d)-\sqrt{D}}{2\|\overline{w}\|_{BL_1}(2\beta-\gamma)} = \frac{-72-8\sqrt{331}}{100} < 0,$$

а

$$-\frac{\gamma(b-d)}{\|\overline{w}\|_{BL_1}(4\beta-2\gamma)} - \frac{\alpha+\gamma}{4\beta-2\gamma} = \frac{72}{100} + \frac{2}{5} > 0,$$

значит,

$$\frac{\gamma(b-d)-\sqrt{D}}{2\|\overline{w}\|_{BL_1}(2\beta-\gamma)} < -\frac{\gamma(b-d)}{\|\overline{w}\|_{BL_1}(4\beta-2\gamma)} - \frac{\alpha+\gamma}{4\beta-2\gamma}. \tag{10}$$

Из (9) и (10) следует, что система (8) разрешима. Если теперь выбрать R, например, равным 2/5, то все условия теоремы 1 будут выполнены.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе был поставлен вопрос о существовании и единственности решения задачи о нахождении состояния равновесия некоторой популяции организмов. Было показано, что решение системы уравнений (1) можно искать в виде неподвижной точки некоторого оператора, действующего в специальном функциональном пространстве. С помощью принципа Банаха были найдены достаточные условия, накладываемые на биологические параметры модели и параметры замыкания третьего пространственного момента, гарантирующие существование и единственность неподвижной точки этого оператора в некотором шаре с центром в нуле. При этом показано, что данное состояние нетривиально.

Отметим, что ранее проводился лишь численный анализ нелинейных интегральных уравнений, получающихся после замыканий третьего момента. Аналитическое исследование подобных уравнений при трехпараметрическом замыкании (2) в случае ненулевых α, β и γ проводится впервые. Кроме того, результаты данной работы иллюстрируют важность подбора параметров замыкания (2), поскольку в статьях [4, 5] было показано, что при $\alpha = 1$, $\beta = a = 0$ нетривиальное состояние равновесия существует исключительно при $d = 0$.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Публикация подготовлена в результате проведения исследования (проекта 20–04–021) в рамках программы "Научный фонд НИУ ВШЭ".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Law R., Dieckmann U.* Moment approximations of individual-based models // The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity / Ed. by U. Dieckmann, R. Law, J. Metz. Cambridge University Press. 2000. P. 252–270.
2. *Dieckmann U., Law R.* Relaxation projections and the method of moments // The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity / Ed. by U. Dieckmann, R. Law, J. Metz. Cambridge University Press. 2000. P. 412–455.
3. *Murrell D. J., Dieckmann U., Law R.* On moment closures for population dynamics in continuous space // J. Theor. Biology. 2004. 229. P. 421–432. russian
4. *Давыдов А.А., Данченко В.И., Звягин М.Ю.* Существование и единственность стационарного распределения биологического сообщества // Труды МИАН. 2009. Т. 267. С. 46–55.
5. *Давыдов А.А., Данченко В.И., Никитин А.А.* Об интегральном уравнении для стационарных распределений биологических сообществ // Проблемы динамического управления. Сборник научных трудов. 2010. С. 15–29.

APPLICATION OF SPECIAL FUNCTION SPACES TO THE STUDY OF NONLINEAR INTEGRAL EQUATIONS ARISING IN EQUILIBRIUM SPATIAL LOGISTIC DYNAMICS

M. V. Nikolaev[a], U. Dieckmann[b,c], and A. A. Nikitin[a,d]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

[b] *Advancing Systems Analysis Program, International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, Austria*

[c] *Department of Evolutionary Studies of Biosystems, The Graduate University for Advanced Studies (Sokendai), Hayama, Japan*

[d] *Higher School of Economics University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS I.A. Sokolov

In this paper, we study a nonlinear integral equation that arises in a model of spatial logistic dynamics. The problem of this equation's solution's existence is investigated by introducing special spaces of functions that are integrable up to a constant. Sufficient conditions are established for the biological characteristics and the parameters of the third spatial moment closure, that guarantee the existence of the solution of the equation mentioned above in some ball centered at zero. In addition, it is shown that this solution is unique in the considered ball and not zero. This means that, under the appropriate conditions, the equilibrium state of the population of a certain species exists and does not coincide with the state of extinction.

Keywords: functional analysis, nonlinear integral equations, mathematical biology