ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 499, с. 20–25

МАТЕМАТИКА

УДК 519.21+514.154

СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ ОПЕРАТОРА КУПМАНА

© 2021 г. Академик РАН В. В. Козлов[1,2,*]

Поступило 12.05.2021 г.
После доработки 12.05.2021 г.
Принято к публикации 19.05.2021 г.

Рассматривается оператор Купмана, который порождается обратимым преобразованием пространства с конечной счетно-аддитивной мерой. Если квадрат этого преобразования эргодичен, то ортогональный оператор Купмана будет симплектическим преобразованием на вещественном гильбертовом пространстве квадратично суммируемых функций с нулевым средним значением. Указан бесконечный набор квадратичных инвариантов оператора Купмана, которые находятся попарно в инволюции относительно соответствующей симплектической структуры. Для преобразований с дискретным спектром и лебеговским спектром эти квадратичные инварианты функционально независимы и образуют полный инволютивный набор, что свидетельствует о свойстве полной интегрируемости преобразования Купмана.

Ключевые слова: оператор Купмана, эргодичность, симплектическая структура, квадратичные инварианты, дискретный спектр, лебеговский спектр

DOI: 10.31857/S268695432104010X

1. ОПЕРАТОР КУПМАНА

Пусть (M, μ) – пространство с конечной счетно-аддитивной мерой μ, а $T: M \to M$ – обратимое сохраняющее меру преобразование. Пусть $L_2(M,\mu)$ – гильбертово пространство вещественных функций на M, интегрируемых по мере μ со своим квадратом. Скалярное произведение функций f, g определяется по обычному правилу

$$(f,g) = \int_M f(x)g(x)d\mu(x).$$

Оператор Купмана $U: L_2 \to L_2$ переводит функцию $x \mapsto f(x)$ в функцию

$$x \mapsto f(T(x)).$$

Как известно, этот оператор ортогональный:

$$U^* U = UU^* = I, \tag{1}$$

или, что то же самое, $U^{-1} = U^*$. Ясно, что $\lambda = 1$ всегда будет его собственным значением. Ненулевые постоянные функции на M будут соответствующими собственными векторами.

Для нас существенное значение имеет следствие (1): оператор U допускает квадратичный инвариант $F = (f,f)$. Другими словами,

$$(Uf,Uf) = (f,f) \quad \text{для всех} \quad f \in L_2.$$

Далее в качестве иллюстрации будут рассматриваться два примера. Пусть M – n-мерный тор $\mathbb{T}^n = \{x_1,\ldots,x_n \bmod 2\pi\}$, а μ – стандартная мера Лебега на $\mathbb{T}^n$.

П р и м е р 1. $T: x \mapsto x + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$. В нерезонансном случае (когда соотношение $(m,\alpha) = k$, $m \in \mathbb{Z}^n$, $k \in \mathbb{Z}$ влечет $m = 0$, $k = 0$) отображение T эргодично (теорема Г. Вейля). Соответствующую дискретную динамическую систему часто называют каскадом Кронекера–Вейля.

П р и м е р 2. $T: x \mapsto Ax$, где A – унимодулярная матрица с целочисленными элементами. Если ни одно из собственных значений A не лежит на единичной окружности комплексной плоскости, то отображение T заведомо будет перемешиванием. Классический пример: $n = 2$ и

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Следует иметь в виду, что для преобразований из примера 2 эргодичность эквивалентна перемешиванию.

[1] *Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия*
[2] *Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, Россия*
**E-mail: kozlov@pran.ru*

В примере 1 функции $\varphi_m = \exp[i(m,x)]$, $m \in \mathbb{Z}^n$, являются собственными для соответствующего оператора Купмана:

$$U\varphi_m = \lambda_m \varphi_m, \quad \lambda_m = e^{i(m,\alpha)}.$$

Они составляют ортогональный базис в $L_2(\mathbb{T}^n)$. Это простое наблюдение подразумевает рассмотрение пространства квадратично интегрируемых функций с комплексными значениями. В вещественном случае оператор Купмана имеет двумерные инвариантные плоскости, натянутые на векторы $\sin(m,x)$ и $\cos(m,x)$ $(m \neq 0)$.

Если отображение T является перемешиванием (или даже слабым перемешиванием), то спектр оператора Купмана "непрерывный" (более точно, единственным собственным значением является $\lambda = 1$ и это собственное значение простое).

Основные факты спектральной теории оператора Купмана содержатся, например, в [1, 2].

2. СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА

Перейдем к рассмотрению более общей ситуации. Пусть $\mathcal{H}$ – вещественное гильбертово пространство (случай $\dim \mathcal{H} < \infty$ не исключается) со скалярным произведением (,) и $U: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ – ортогональный оператор. Отображение $x \mapsto Ux$, очевидно, допускает квадратичный инвариант $F(x) = (x, x)$.

Введем оператор

$$\Omega = (U^* + I)(U - I). \quad (2)$$

С учетом условий ортогональности (1)

$$\Omega = U - U^*.$$

Следовательно, Ω – кососамосопряженный оператор. Ввиду (1) его также можно представить в виде

$$\Omega = (U - I)(U^* + I) = -(U^* - I)(U + I). \quad (3)$$

Оператору (2) отвечает билинейная кососимметрическая форма

$$[x, y] = (\Omega x, y) = -(x, \Omega y). \quad (4)$$

Напомним, что эта форма называется невырожденной, если из $[x, y] = 0$ для всех $y \in \mathcal{H}$ вытекает, что $x = 0$. При условии невырожденности 2-форма (4) задает симплектическую структуру в $\mathcal{H}$ (ее саму обычно называют симплектической структурой).

Как известно, спектр ортогонального преобразования лежит на единичной окружности. Из (2) и (3) вытекает вырожденность оператора Ω, если $\lambda = \pm 1$ является собственным значением оператора U. Отметим простое

Предложение 1. *Если оператор U^2 не имеет ненулевых собственных векторов с единичным собственным значением, то 2-форма [,] невырождена*.

Действительно, пусть [,] вырождена и пусть $(\Omega x, y) = 0$ для всех $y \in \mathcal{H}$. Тогда $\Omega x = 0$ хотя бы для одного $x \neq 0$. Это означает, что $Ux = U^{-1}x$. Но это эквивалентно равенству $U^2 x = x$.

Теорема 1. *Оператор U сохраняет 2-форму* [,].

Надо доказать, что

$$U^* \Omega U = \Omega.$$

С учетом (1) левая часть равна

$$U^*(U - I)(U^* + I)U = (I - U^*)(I + U) = \Omega.$$

Что и требовалось.

Таким образом, если 2-форма [,] невырождена, то $(\mathcal{H}, [\,,])$ – симплектическое пространство и (по теореме 1) оператор U будет симплектическим. В конечномерном случае этот факт отмечен в [3]. В частности, $\dim \mathcal{H}$ четно.

Если U – оператор Купмана из п. 1, то 2-форма [,] вырождена: оператор U оставляет на месте постоянные функции. Чтобы поправить дело, надо рассмотреть гильбертово пространство $\hat{L}_2 \subset L_2$, ортогональное одномерному подпространству, состоящему из постоянных функций. Другими словами, $\hat{L}_2$ составляют квадратично суммируемые функции с нулевым средним значением. Ясно, что оператор U отображает $\hat{L}_2$ в $\hat{L}_2$.

В частности, справедливо

Предложение 2. *Пусть отображение $T^2: M \to M$ эргодично. Тогда 2-форма* [,] *невырождена на $\hat{L}_2$*.

Действительно, тогда $\lambda = 1$ является простым собственным значением соответствующего оператора Купмана $U^2: L_2 \to L_2$. Значит, оператор U^2 в $\hat{L}_2$ не имеет ненулевых собственных векторов с собственным значением $\lambda = 1$. Остается воспользоваться предложением 1.

Не стоит думать, что квадрат эргодического преобразования всегда эргодичен. Однако в двух примерах из п. 1 это заведомо так.

Итак, в общем случае (для каскадов с эргодическим квадратом) оператор Купмана $U^2: \hat{L}_2 \to \hat{L}_2$ будет симплектическим оператором. Правда, инвариантная симплектическая структура зависит от этого оператора.

Хорошо известно, что вещественный ортогональный оператор, который одновременно является симплектическим преобразованием, будет унитарным оператором. Это означает, что в вещественном $\hat{L}_2$ можно ввести комплексную структуру так, что действие U будет эквивалентно действию унитарного оператора в комплексном пространстве $\hat{L}_2$. Такая конструкция особенно просто выглядит для операторов с дискретным спектром. Этот круг вопросов обсуждается в [4] для вещественных линейных систем дифференциальных уравнений с квадратичным инвариантом в гильбертовом пространстве с целью их представления в виде уравнения Шрёдингера.

3. КВАДРАТИЧНЫЕ ИНВАРИАНТЫ

Квадратичная форма (Bx, x), $B^* = B$ — инвариант линейного отображения $x \mapsto Ux$ тогда и только тогда, когда

$$U^*BU = B.$$

Оказывается, кроме исходного квадратичного инварианта (когда $B = I$), это отображение допускает целую серию квадратичных инвариантов, которые находятся попарно в инволюции относительно симплектической структуры из п. 2.

Невырожденная кососимметрическая 2-форма $[\,,]$ позволяет ввести скобку Пуассона на векторном пространстве непрерывных квадратичных форм. Пусть

$$f = (Fx, x)/2 \quad \text{и} \quad g = (Gx, x)/2$$

суть две такие формы (самосопряженные операторы F и G ограничены). Их скобкой Пуассона $\{f, g\}$ называется квадратичная форма

$$h = (Hx, x)/2, \quad \text{где} \quad H = F\Omega G - G\Omega F. \tag{5}$$

Оператор H (как и операторы F и G) самосопряженный (симметрический и ограниченный). В частности, квадратичная форма h также будет непрерывной.

Скобка $\{\,,\,\}$ билинейна, кососимметрична и удовлетворяет тождеству Якоби. В работах [5, 6] скобка Пуассона определяется при более общих предположениях.

Введем самосопряженные операторы

$$B_n = [(U + I)(U^* + I)]^n = (U + I)^n(U^* + I)^n, \quad n \geq 0.$$

Т е о р е м а 2. *Непрерывные квадратичные формы*

$$F_n = (B_n x, x)/2 \tag{6}$$

суть инварианты отображения $x \mapsto Ux$, *причем*

$$\{F_k, F_l\} = 0 \tag{7}$$

для всех $k, l \geq 0$.

Для доказательства инвариантности F_n надо проверить равенство $U^*B_nU = B_n$, или

$$U^*(U + I)^n(U^* + I)^nU = (U + I)^n(U^* + I)^n. \tag{8}$$

Действительно, ввиду ортогональности U,

$$U^*(U + I) = U^* + I, \quad (U^* + I)U = U + I.$$

Следовательно, левая часть (8) равна

$$(U^* + I)(U + I)^{n-1}(U^* + I)^{n-1}(U + I) = \\ = (U + I)^n(U^* + I)^n.$$

Для доказательства инволютивности этих инвариантов надо проверить равенство

$$[(U + I)(U^* + I)]^k(U^* + I)(U + I)\times \\ \times[(U + I)(U^* + I)]^l = [(U + I)(U^* + I)]^l\times \\ \times(U^* + I)(U + I)[(U + I)(U^* + I)]^k. \tag{9}$$

Так как операторы $U^* + I$, $U + I$ и $U - I$ коммутируют между собой, то обе части равенства (9) симметричны относительно k и l. Что доказывает равенства (7).

Квадратичные инварианты F_n могут оказаться зависимыми. Вот простой пример: если $U = I$, то все они пропорциональны (x, x).

Пусть $N = \dim \mathscr{H}$ конечна и ортогональный оператор U не имеет собственных значений $\lambda = \pm 1$. Тогда N четно. Кроме того, как отмечено в [3], если среди собственных чисел оператора U нет кратных, то квадратичные формы $F_1, \ldots, F_{N/2}$ функционально независимы. Поскольку они находятся попарно в инволюции, то их непустые совместные уровни

$$\{x \in \mathscr{H}\colon F_1(x) = c_1, \ldots, F_{N/2}(x) = c_{N/2}\}$$

для почти всех значений $c_1, \ldots, c_{N/2}$ будут торами размерности $N/2$, инвариантными относительно действия оператора U. Далее, на этих торах можно так ввести угловые координаты

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_{N/2} \mod 2\pi,$$

что действие оператора U сводится к отображению Кронекера–Вейля

$$\varphi_j \mapsto \varphi_j + \alpha_j, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_{N/2} = \text{const}.$$

В силу линейности оператора U числа $\{\alpha_j\}$ не меняются от тора к тору.

Отметим, что полная интегрируемость линейного симплектического отображения имеет место и без предположения о простоте спектра. Этот результат выводится из теории нормальных форм Вильямсона [7]. Однако в случае простого спектра полный набор инволютивных инвариантов предъявляется без предварительного решения алгебраической задачи о собственных значениях и собственных векторах симплектического оператора.

В бесконечномерном случае ситуация более сложная. Мы рассмотрим два (в определенном смысле противоположных) случая, когда оператор U имеет простой дискретный спектр и когда его спектр непрерывный.

4. ДИСКРЕТНЫЙ СПЕКТР

Хорошо известно, что спектр ортогонального оператора лежит на единичной окружности комплексной плоскости. Мы исключаем возможность наличия двух вещественных точек спектра $\lambda = \pm 1$.

Итак, пусть

$$U(\xi + i\eta) = (\alpha + i\beta)(\xi + i\eta), \tag{10}$$

где ξ, η — векторы из вещественного гильбертова пространства $\mathcal{H}$, а $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Равенство (10) эквивалентно двум вещественным соотношениям

$$U\xi = \alpha\xi - \beta\eta, \quad U\eta = \beta\xi + \alpha\eta.$$

Следовательно, вещественная плоскость π, натянутая на векторы ξ, η, будет инвариантной относительно действия ортогонального оператора U. Легко показать, что при этом

$$(\xi, \xi) = (\eta, \eta) \quad \text{и} \quad (\xi, \eta) = 0.$$

Так что можно считать векторы ξ и η единичной длины; они составляют ортонормированный базис на плоскости π.

Пусть

$$x = p\xi + q\eta, \quad p, q \in \mathbb{R}$$

суть точки инвариантной плоскости π и $x' = Ux = p'\xi + q'\eta$. Тогда

$$p' = \alpha p + \beta q, \quad q' = -\beta p + \alpha q \tag{11}$$

суть ортогональное преобразование плоскости π; это поворот на угол

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}.$$

Ясно, что линейное преобразование допускает квадратичный инвариант

$$p^2 + q^2. \tag{12}$$

Последнему наблюдению можно придать инвариантный смысл, если ввести оператор ортогонального проектирования P гильбертова пространства на плоскость π. Это ограниченный самосопряженный оператор: $P^* = P$ и $P^2 = P$. Инвариант (12) представляется в следующем виде:

$$f = (Px, Px), \quad x \in \mathcal{H}.$$

Предположим теперь, что оператор U имеет бесконечно много различных собственных значений

$$\alpha_1 + i\beta_1, \alpha_2 + i\beta_2, \ldots$$

с собственными векторами

$$\xi_1 + i\eta_1, \xi_2 + i\eta_2, \ldots$$

Двумерные плоскости

$$\pi_n = \{x \in \mathcal{H}\colon x = p\xi_n + q\eta_n, p, q \in \mathbb{R}\}$$

снова будут инвариантными для оператора U. Можно показать, что плоскости π_k и π_l ортогональны, если, конечно, $k \neq l$ (см., например, [6]).

Таким образом, в $\mathcal{H}$ имеется ортонормированная система векторов

$$\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \ldots \tag{13}$$

Кроме того, оператор U допускает бесконечно много квадратичных инвариантов

$$f_n = (P_n x, P_n x), \quad n \geq 1, \tag{14}$$

где P_n — оператор ортогонального проектирования на π_n.

С другой стороны, плоскости π_n инвариантны также относительно действия кососамосопряженного оператора Ω. На инвариантной плоскости π_n он представляется кососимметрической матрицей

$$\begin{bmatrix} 0 & 2\beta_n \\ -2\beta_n & 0 \end{bmatrix}.$$

Все эти матрицы невырождены, поскольку $\beta_n \neq 0$. В противном случае оператор U будет иметь собственные значения ± 1.

Т е о р е м а 3. *Предположим, что ортонормированная система векторов* (13) *полна. Тогда*

а) *квадратичные формы* (14) *составляют полный набор независимых квадратичных инвариантов оператора U, находящихся попарно в инволюции относительно симплектической структуры в $\mathcal{H}$, которая задается кососамосопряженным оператором Ω,*

б) *совместные уровни этих инвариантов*

$$\left\{x \in \mathcal{H}\colon f_n(x) = c_n,\ n \geq 1;\ c_n > 0 \ \text{и} \ \sum c_j^2 < \infty\right\}$$

будут бесконечномерными торами

$$\mathbb{T}_c^\infty = \mathop{\mathsf{X}}_{n=1}^{\infty} \mathbb{T}_n^1,$$

в) *на этих торах можно выбрать угловые переменные $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \bmod 2\pi$ так, что в этих переменных действие оператора U на $\mathbb{T}_c^\infty$ задается формулами*

$$\varphi_n \mapsto \varphi_n + \varphi_n^0, \quad \operatorname{tg}\varphi_n^0 = \frac{\beta_n}{\alpha_n}; \quad n \geq 1. \tag{15}$$

Это утверждение указывает на свойство полной интегрируемости отображения $x \mapsto Ux$ (как и в конечномерном случае, о котором упоминалось в п. 3). Полнота семейства инволютивных инвариантов (14) означает, что к этому набору нельзя добавить еще одну квадратичную форму, которая была бы независима от набора (14) и находилась бы с ними в инволюции. Отображение (15) – это бесконечномерный вариант отображения Кронекера–Вейля. Его свойства вполне аналогичны эргодическим свойствам непрерывных потоков Кронекера–Вейля на бесконечномерных торах (они обсуждаются в [8, 9]; там же можно найти дальнейшие ссылки).

5. ЛЕБЕГОВСКИЙ СПЕКТР

Случай непрерывного спектра более сложный. Ограничимся рассмотрением каскадов с так называемым лебеговским спектром. Сюда, в частности, относятся автоморфизмы тора из примера 2 (п. 1). Такие системы заведомо обладают перемешиванием. Для простоты ограничимся случаем однократного лебеговского спектра.

В этом случае в $\mathcal{H} = \hat{L}_2$ имеется полный ортонормированный базис $\{e_j\}$, $j \in \mathbb{Z}$ такой, что

$$Ue_j = e_{j+1}. \qquad (16)$$

В определенном смысле общий случай сводится к этому частному (см., например, [2]).

Пусть $x = \sum p_j e_j$, $\sum p_j^2 < \infty$. Тогда

$$Ux = \sum p_j e_{j+1} = \sum p_{j-1} e_j.$$

Таким образом, если отождествить $\mathcal{H}$ с l_2 (пространство бесконечных в обе стороны последовательностей $\{p_j\}$ с условием $\sum p_j^2 < \infty$), то действие оператора U сводится к сдвигу элементов на единицу влево. При таком сдвиге, конечно, сохраняется скалярный квадрат $F = \sum p_j^2$. Теорема 2 дает бесконечный набор квадратичных инвариантов:

$$F_n = \sum p_{j-n} p_j + \sum p_{j+n} p_j. \qquad (17)$$

Более точно, инварианты (6) сводятся к конечным линейным комбинациям квадратичных форм (17).

Далее, $\Omega e_j = e_{j+1} - e_{j-1}$, $j \in \mathbb{Z}$. Значит,

$$\Omega x = \sum p_j \Omega e_j = \sum (p_{j-1} - p_{j+1}) e_j. \qquad (18)$$

Соответствующая 2-форма $[x, y] = (\Omega x, y)$ будет невырожденной. Действительно, пусть $(\Omega x, y) = 0$ для всех y. Положим $y = e_j$. Тогда из (18) вытекает, что $p_{j-1} = p_{j+1}$. Следовательно, элементы вектора x с четными (нечетными) номерами равны между собой. Но тогда они все равны нулю, иначе будет расходиться ряд $\sum p_j^2$. Поэтому $x = 0$.

Значит, кососамосопряженный оператор Ω задает симплектическую структуру в $\mathcal{H} = \hat{L}_2$. Из формулы (18) вытекает инвариантность этой структуры относительно преобразования U. Из теоремы 2 также следует инволютивность квадратичных инвариантов (17) относительно скобки Пуассона, порожденной этой симплектической структурой.

Нетрудно показать, что квадратичные формы $F_0, F_1, F_2, \ldots$ независимы: их градиенты (как векторы из $\mathcal{H}$) линейно независимы (хотя бы в одной точке $\mathcal{H}$). Далее, можно показать, что любая непрерывная квадратичная форма на $\mathcal{H}$, инвариантная относительно действия оператора U, представляется в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n F_n$$

с некоторыми постоянными α_n, $n \geq 0$. Все это свидетельствует о свойстве полной интегрируемости оператора Купмана для систем с лебеговским спектром. Однако вопрос о строении совместных уровней квадратичных инвариантов (17) остается открытым. Сводится ли действие оператора Купмана на этих бесконечномерных многообразиях к отображению Кронекера–Вейля?

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 21-71-30011).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Халмош П.Р.* Лекции по эргодической теории. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
2. *Арнольд В.И., Авец А.* Эргодические проблемы классической механики. Ижевск: Ижевская республ. типография, 1999.
3. *Козлов В.В.* // ДАН. 2017. Т. 477. № 6. С. 646–648.
4. *Козлов В.В.* // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т. 496. № 1. С. 48-52.
5. *Трещёв Д.В., Шкаликов А.А.* // Матем. заметки. 2017. Т. 101. № 6. С. 911–918.
6. *Козлов В.В.* // УМН. 2020. Т. 75. № 3. С. 55–106.
7. *Williamson J.* // Amer. J. Math. 1936. V. 58. № 1. P. 141–163.
8. *Klimek S., Leśniewski A.* Ergodic theorems for quantum Kroneker flows / Perspectives of quantization South Hadly, MA, 1996 Amer. Math. Soc. Providence, RI 1998 P. 71–80.
9. *Kozlov V.V.* // Russian Journal of Math. Physics. 2021. V. 28. № 1. P. 74–84

THE SYMPLECTIC GEOMETRY OF THE KOOPMAN OPERATOR

Academician of the RAS V. V. Kozlov[a,b]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

[b] *P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russian Federation*

We consider the Koopman operator, which is generated by an invertible transformation of a space with a finite countably additive measure. If the square of this transformation is ergodic, then the orthogonal Koopman operator will be a symplectic transformation on the real Hilbert space of quadratically summable functions with zero mean value. An infinite set of quadratic invariants of the Koopman operator, which are pairwise in the involution with respect to the corresponding symplectic structure, is specified. For transformations with a discrete spectrum and a Lebesgue spectrum, these quadratic invariants are functionally independent and form a complete involutive set, which indicates that the Koopman transform has the property of complete integrability.

Keywords: Koopman operator, ergodicity, symplectic structure, quadratic invariants, discrete spectrum, Lebesgue spectrum