ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 499, с. 31–34

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В ПОЛОСЕ

 В. А. Костин[1,*], Д. В. Костин[1,2,], А. В. Костин[1]**

Представлено академиком РАН В.П. Масловым 30.03.2021 г.
Поступило 27.04.2021 г.
После доработки 04.06.2021 г.
Принято к публикации 15.06.2021 г.

В рамках теории операторных косинус-функций и ее приложения находится решение и устанавливается корректная разрешимость граничной задачи Дирихле для обобщенного уравнения Гельмгольца в полосе. Устанавливается критическая ширина полосы в зависимости от граничных условий. Применение этого результата к задаче по распространению тепла в двугранном углу позволяет определить угол корректности этой задачи и указать закон распространения тепла в рассматриваемой области.

Ключевые слова: сильно непрерывные косинус-функции и полугруппы преобразований, краевые задачи, корректная разрешимость

DOI: 10.31857/S2686954321040093

Как известно [1–3], уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \beta u(x,t) = 0, \tag{1}$$

$\beta \in R = (-\infty, \infty)$, $x, t \in R \times R$, называется в математической физике уравнением Гельмгольца.

Уравнение (1) занимает важное место в изучении физических процессов, причем в их описании существенную роль играет знак параметра β. Так, диффузии с реакцией распада молекул газа соответствует $\beta < 0$. Случаю $\beta > 0$ соответствует процесс с наличием размножения диффузионных частиц.

С математической точки зрения свойства решения уравнений (1) также существенно зависят от знака β при постановке краевых задач. Так, при $\beta \le 0$ имеет место однозначная разрешимость уравнения (1) в классе непрерывных в замкнутой области $\Omega + \Sigma$ функций, принимающих на границе Σ заданное значение $u|_{\Sigma} = u_{\Sigma}$. Если же $\beta > 0$, то единственности может не быть. Этот факт приводит к задаче определения размеров области Ω (см. [1, с. 462]).

В настоящем сообщении исследуется корректная разрешимость задачи Дирихле для обобщенного уравнения Гельмгольца, с применением результатов к задаче (1), в интервале $t \in [0, l]$.

1. ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2 u(t)}{\partial t^2} + Au(t) + \beta u(t) = 0, \quad t \in [0, l] \subset [0, \infty), \tag{2}$$

где A – линейный замкнутый оператор, действующий в банаховом пространстве E, с областью определения $D(A)$, плотной в E.

Ставится задача отыскания функции $u(t)$, со значениями в $D(A)$, дважды непрерывно дифференцируемой, удовлетворяющей уравнению (2) на отрезке $[0, l]$ и условиям

$$u(0) = \varphi, \quad u(l) = \psi, \quad \varphi, \psi \in D(A). \tag{3}$$

Определение 1 [4–6]. Задача (2)–(3) называется корректной, если она однозначно разрешима для любых $\varphi, \psi \in D(A)$ и существует константа $M > 0$, такая, что для всех решений уравнения (1) справедливо неравенство

$$\sup_{t \in [0,l]} \|u(t)\|_E \le M \left(\|\varphi\|_E + \|\psi\|_E \right). \tag{4}$$

[1] *Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия*
[2] *Воронежский государственный педагогический университет, Воронеж, Россия*
**E-mail: vlkostin@mail.ru*
***E-mail: dvk605@mail.ru*

Для $\beta = 0$ в [7] показано, что если оператор A является генератором сильно непрерывной косинус-функции $C(A,t)$, удовлетворяющей условиям

$$\|C(t,A)\| \le Me^{\omega|t|}, \tag{5}$$

то задача (2)–(3) корректно разрешима в интервале $[0,l]$

$$0 \le l < \frac{\pi}{\omega}. \tag{6}$$

В настоящем сообщении рассматривается случай $\beta \ne 0$ и доказывается

Т е о р е м а 1. *Если в уравнении* (1) *оператор* A *является генератором* C_0*-косинус-функции с оценкой* (5), *то на интервале* $[0,l]$, *где* l *задается условиями*

$$0 \le l < \begin{cases} \dfrac{\pi}{\omega+\sqrt{\beta}}, & \text{если} \quad \beta \ge 0, \\ \dfrac{\pi}{\omega}, & \text{если} \quad \beta < 0, \end{cases} \tag{7}$$

задача (2)–(3) *корректно разрешима и ее решение имеет вид*

$$u(t) = \tag{8}$$

$$= \frac{1}{l}\sin\frac{\pi t}{l}\left[\int_0^\infty \frac{C(y,A_\beta)\varphi dy}{\mathrm{ch}\left(\frac{\pi y}{l}\right) - \cos\left(\frac{\pi t}{l}\right)} + \int_0^\infty \frac{C(y,A_\beta)\psi dy}{\mathrm{ch}\left(\frac{\pi y}{l}\right) + \cos\left(\frac{\pi t}{l}\right)}\right],$$

где $A_\beta = A + \beta I$, I — *тождественный оператор в* E,

$$C(t,A_\beta)f = C(t,A)f + $$
$$+ \sqrt{\beta}t\int_0^t \frac{I_1(\sqrt{\beta}\sqrt{t^2-s^2})C(s,A)fds}{\sqrt{t^2-s^2}}, \tag{9}$$

$I_1(z) = \frac{z}{\pi}\int_0^1 (1-\xi^2)^{\frac{1}{2}} z\xi d\xi$ — *модифицированная функция Бесселя* 1*-го рода*.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Для доказательства теоремы достаточно получить представление (9).

Так как A — генератор сильно непрерывной косинус–функции, то для его резольвенты справедливо представление через преобразование Лапласа L ([8, c. 177])

$$R(\lambda^2,A)f = \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda t}C(t,A)fdt = $$
$$= \frac{1}{\lambda}L[C(t,A)f](\lambda), \quad (\mathrm{Re}\lambda > \omega). \tag{10}$$

Из (10) следует равенство

$$C(t,A)f = [L^{-1}(\lambda R(\lambda^2,A))f](t), \tag{11}$$

где $[L^{-1}(h)](t)$ — обратное преобразование Лапласа.

Применяя (11) к $C(A_\beta)$, получаем

$$C(t,A_\beta)f = L^{-1}[\lambda R(\lambda^2, A\beta)f](t) =$$
$$= L^{-1}\left[\frac{\lambda R(\lambda^2-\beta,A)}{\sqrt{\lambda^2-\beta}}f\right](t) =$$
$$= \frac{d}{dt}\left\{L^{-1}\left[\frac{R(\lambda^2-\beta,A)}{\sqrt{\lambda^2-\beta}}f\right](t)\right\} =$$
$$= \frac{d}{dt}\left\{L^{-1}\left[\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{\lambda^2-\beta}s}}{\sqrt{\lambda^2-\beta}}C(\xi,A)f\right]\right\}(t) =$$
$$= \frac{d}{dt}\left[\int_0^\infty L^{-1}\frac{e^{-\sqrt{\lambda^2-\beta}s}}{\sqrt{\lambda^2-\beta}}C(s,A)fds\right](t).$$

Пользуясь таблицей преобразования Лапласа, получаем соотношение

$$C(t,A_\beta)f = \frac{d}{dt}\left\{\int_0^t I_0[-\beta(t^2-s^2)]^{\frac{1}{2}}C(s,A)fds\right\} =$$
$$= \frac{d}{dt}\left\{\int_0^t J_0[\beta(t^2-s^2)]^{\frac{1}{2}}C(s,A)fds\right\}.$$

После дифференцирования получаем соотношение (9).

Для определения порядка роста $C(t,A_\beta)$ сделаем замену $\frac{s}{t} = \tau$ под знаком интеграла в (9) и оценим

$$\|F(t)f\| = \left\|\int_0^t \frac{I_1[\beta(t^2-s^2)]^{\frac{1}{2}}C(s,A)fds}{\sqrt{t^2-s^2}}\right\| \le$$
$$\le Me^{\omega|t|}\int_0^t \frac{|I_1[\beta(t^2-s^2)]^{\frac{1}{2}}|}{\sqrt{t^2-s^2}}ds\|f\| = \tag{12}$$
$$= Me^{\omega|t|}\int_0^1 \frac{|I_1[t\sqrt{\beta(1-\tau^2)}]|}{\sqrt{1-\tau^2}}d\tau\|f\|.$$

Если $\beta > 0$, то из (12) следует неравенство

$$\|F(t)f\| \le \frac{2\sqrt{\beta}t}{\pi}e^{\omega t}\int_0^1\int_0^1 \sqrt{(1-\xi^2)}\,\mathrm{ch}[t\xi\sqrt{\beta(1-\tau^2)}]d\xi\|f\| \le$$
$$\le \frac{2\sqrt{\beta}t}{\pi}e^{\omega t}\int_0^1 \mathrm{ch}[t\xi\sqrt{\beta}]d\xi\|f\| \le \frac{e^{(\omega+\sqrt{\beta})t}}{\pi}\|f\|. \tag{13}$$

Если $\beta < 0$, то очевидна оценка

$$\|F(t)\| \le \frac{2e^{\omega t}\sqrt{|\beta|}t}{\pi}\int_0^1\int_0^1 (1-\xi^2)^{\frac{1}{2}} \times \\ \times|\cos t\xi\sqrt{\beta(1-\tau^2)}|d\xi d\tau\|f\| \le \frac{\sqrt{|\beta|}e^{\omega t}t}{2}. \tag{14}$$

Применение неравенства (5), (13), (14) в представлении (9) дает оценку

$$\|C(t,A\beta)\| \le M[e^{\omega|t|} + \sqrt{|\beta|}te^{\omega+\sqrt{\beta}|t|}] \le \\ \le M_1(1+\sqrt{|\beta|}|t|)e^{(\omega+\sqrt{\beta})|t|}. \tag{15}$$

Таким образом, порядок роста косинус-функции $C(t,A_\beta)$ равен $\omega+\sqrt{\beta}$. И, следовательно, пользуясь (13), (14) для оператора A_β, получаем оценку (15) в случае $\beta \ge 0$.

Соответствующая оценка для $\beta < 0$ получается аналогично, с учетом неравенства $(I_1(\sqrt{\beta}t\sqrt{1-\tau^2})) \le 1$. Это завершает доказательство теоремы.

Замечание 1. Для частного случая $\beta > 0$ и оператора $A = B^2$, где B порождает сильно непрерывную группу операторов $T(t)$, представление (9) получено в [8] другим способом.

3. ПРИМЕНЕНИЕ К УРАВНЕНИЯМ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Рассмотрим граничную задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца в следующей постановке.

Ищется решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + \beta u(x,t) = 0, \tag{16}$$

$x \in R = (-\infty,\infty)$, $t \in [0,l] \in R^+ = [0,\infty)$, $\beta = \mathrm{const}$, удовлетворяющее граничным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u(l,x) = \psi(x), \tag{17}$$

φ и ψ являются элементами банахова пространства $C_p(\bar{R})$ равномерно непрерывных и ограниченных с весом $e^{-\sigma x}$ $(\sigma > 0)$ функций с нормой

$$\|f\|_\sigma = \sup_{x\in R} e^{-\sigma x}|f(x)|. \tag{18}$$

Зададим оператор A дифференциальным выражением $\frac{d^2}{dx^2}$ с областью определения $D(A) = \left\{f\colon f \in C_\sigma, \frac{d^2 f}{dx^2} \in C_\sigma\right\}$ и приведем задачу (16)–(17) к виду (3)–(4).

Так, определенный оператор A является генератором косинус-функции

$$C(t,A)f(x) = \frac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t)], \tag{19}$$

с оценкой

$$\left|e^{-\sigma x}C(t)f(x)\right| \le \\ \le e^{-\sigma x}|f(x+t)+f(x-t)| \le \left(\frac{e^{\sigma t}+e^{-\sigma t}}{2}\right)\|f\|_\sigma, \tag{20}$$

показывающий выполнение условия (5) с порядком роста $C(t)$, равным σ.

Следовательно, задача (16)–(17) корректно разрешима в пространствах $E = C_\sigma(\bar{R})$ на интервале $[0,l]$,

$$0 < l < \begin{cases} \dfrac{\pi}{\sigma+\sqrt{\beta}}, & \text{если} \quad \beta > 0, \\ \dfrac{\pi}{\sigma}, & \text{если} \quad \beta \le 0. \end{cases} \tag{21}$$

Замечание 2.

1. Если $\beta > 0$, $\sigma = 0$, то (21) совпадает с аналогичным неравенством в [1, с. 462].

2. Если $\beta < 0$, $\sigma \ne 0$, то интервал корректности сужается в зависимости от увеличения концентрации вещества на границе.

3. Если $\beta < 0$, $\sigma = 0$, то интервал корректности может быть неограниченным, что совпадает с известными результатами.

4. О СТАЦИОНАРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ ВНУТРИ ДВУГРАННОГО УГЛА. УГОЛ КОРРЕКТНОСТИ

Применим полученные результаты к задаче о распределении тепла внутри двугранного угла ([9, с. 133]), нахождения функции $V(r,u)$, $0 < r < \infty$, $0 \le \varphi \le \varphi_0 < \infty$, являющейся решением уравнения

$$\frac{\partial^2 V(r,\varphi)}{\partial \phi^2} + r\frac{\partial}{\partial^2}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0, \tag{22}$$

удовлетворяющей граничным условиям

$$v(r,0) = w_1(r) = Ar^\sigma, \quad V(r,\varphi_0) = w_2(r) = Br^\sigma, \tag{23}$$

A, B, σ – действительные константы.

Замена $r = \ln x$, $\varphi = t$ приводит (22)–(23) к виду

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, \tag{24}$$

$$u(x,0) = Ae^{\sigma x}, \quad u(x,\varphi_0) = Be^{\sigma x}, \\ x \in (-\infty,\infty), \quad t \in [0,\varphi_0]. \tag{25}$$

Применяя соотношение (8) к (24)–(25) и возвращаясь к переменным r, φ с ограничениями

$$0 \le \varphi \le \varphi_0 < \frac{\pi}{\sigma}, \tag{26}$$

получаем решение задачи (22)–(23) в виде

$$V(r,\varphi) = \left[A\sin\sigma\varphi + B\sin\sigma(\varphi_0 - \varphi)\right]\frac{r^\sigma}{\sin\sigma\varphi_0}. \tag{27}$$

В силу теоремы 1, отсюда следует, что задача (24)–(25), а вместе с ней и задача (22)–(23) корректны на интервале $[0,\varphi_0]$, который удовлетворяют условиям (26).

Назовем его углом корректности. Интересно, что увеличение параметра σ на границе влечет уменьшение угла корректности. Так, при $\sigma = 2$ угол корректности не должен превосходить $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$.

Далее заметим, что если $A \ge 0$, $B \ge 0$, то имеют место оценки

$$\begin{aligned} 0 \le V(r,\varphi) \le \frac{(A+B)\sin\frac{\sigma\varphi_0}{2}}{\sin\sigma\varphi_0} r^\sigma = \\ = \frac{(A+B)}{2}\cdot\frac{r^\sigma}{\cos\frac{\sigma\varphi_0}{2}} = V\left(r,\frac{\varphi_0}{2}\right). \end{aligned} \tag{28}$$

Таким образом, угол между гранями должен удовлетворять условиям корректности, зависящим от граничных данных. В этом случае максимум температуры аккумулируется на середине угла корректности и изменяется в зависимости от расстояния r в соответствии с формулой (28), показывающей, что при возрастании σ угол между гранями уменьшается.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения государственного задания в сфере науки (номер темы FZGF-2020-0009).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
2. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 488 с.
3. *Маслов В.П., Данилов В.Г., Волосов К.А.* Математическое моделирование процессов тепло-массопереноса. М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва “Наука”, 1987. 352 с.
4. *Горбачук В.И., Князюк А.И.* Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений // Успехи мат. наук. 1989. Т. 44. № 3. С. 55–91.
5. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.
6. *Kurepa S.* Semigroups and cosine functions. Lecture Notes in Math. B.: Springer, 1982. V. 948. P. 47–72.
7. *Костин В.А., Костин Д.В., Костин А.В.* Операторные косинус-функции и граничные задачи // ДАН. 2019. Т. 486. № 5. С. 531–536.
8. *Голдстейн Дж.* Полугруппы линейных операторов и их приложения. Киев: Выща школа, 1989. 347 с.
9. *Волков И.К.* Интегральные преобразования и операторное исчисление // Волков И.К., Канатников А.Н. Изд-во МГТУ им. Баумана, 1999. 227 с.

ON THE CORRECT SOLVABILITY OF THE DIRICHLET BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE GENERALIZED HELMHOLTZ EQUATION IN A STRIP

V. A. Kostin[a], D. V. Kostin[a,b], and A. V. Kostin[a]

[a] *Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation*

[b] *Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.P. Maslov

Within the framework of the theory of operator cosine functions and its application, a solution is found and the correct solvability of the Dirichlet boundary value problem for the generalized Helmholtz equation in the band is established. The critical bandwidth is set depending on the boundary conditions. Applying this result to the problem of heat propagation in a dihedral angle allows us to determine the angle of correctness of this problem and specify the law of heat propagation in the considered region.

Keywords: strongly continuous cosine functions and transformation semigroups, boundary value problems, correct solvability