ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 499, с. 26–30

МАТЕМАТИКА

УДК 510.6

ОБ ОДНОМ УСИЛЕНИИ ТЕОРЕМЫ О НЕИЗОМОРФИЗМЕ АЛГЕБР ДОКАЗУЕМОСТИ

© 2021 г. Е. А. Колмаков[1,2,*]

Представлено академиком РАН Л.Д. Беклемишевым 28.04.2021 г.
Поступило 29.04.2021 г.
После доработки 29.04.2021 г.
Принято к публикации 15.05.2021 г.

Мы получаем усиление теоремы В.Ю. Шаврукова о неизоморфизме алгебр доказуемости двух Σ_1-корректных теорий, основываясь на результатах, полученных Г. Адамссоном. Усиленное достаточное условие неизоморфизма позволяет построить новые примеры пар теорий с неизоморфными алгебрами. В частности, мы доказываем отсутствие эпиморфизмов из алгебры $(\mathfrak{L}_T, \Box_T\Box_T)$ на алгебру $(\mathfrak{L}_T,\Box_T)$.

Ключевые слова: предикат доказуемости, алгебра доказуемости, принцип рефлексии

DOI: 10.31857/S2686954321040081

Эквациональный класс алгебр Магари был введен Р. Магари [5] для изучения понятия доказуемости в данной формальной теории в более общем алгебраическом контексте. Алгебра Магари – это булева алгебра $(\mathcal{B},\Box)$ с унарным оператором $\Box$, которая удовлетворяет следующим тождествам: $\Box(a \to b) \to (\Box a \to \Box b) = \top$, $\Box(\Box a \to a) \to \Box a = \top$ и $\Box\top = \top$, где $\top$ есть единица алгебры $\mathcal{B}$.

С данной формальной теорией T (в рамках которой можно выразить синтаксические понятия, связанные с языком этой теории, и, в частности, понятие доказуемости) можно связать конкретную алгебру Магари $\mathfrak{D}_T$, называемую алгеброй доказуемости теории T, которая определяется как $(\mathfrak{L}_T,\Box_T)$, где $\mathfrak{L}_T$ есть алгебра Линденбаума теории T, а $\Box_T$ есть унарный оператор, индуцируемый *предикатом доказуемости* $\mathrm{Pr}_T(x)$ в теории T, т.е. формулой в языке теории T, выражающей, что формула с гёделевым номером x является теоремой теории T, следующим образом

$$\Box_T[\varphi]_{\sim_T} = [\mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)]_{\sim_T},$$

где $\varphi \sim_T \psi \Leftrightarrow T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.

Формальное изучение понятия доказуемости как оператора (или модальности) традиционно относят к области, известной как логика доказуемости. Алгебры доказуемости позволяют взглянуть на вопросы, изучаемые в рамках этой области, с алгебраической точки зрения. Одним из центральных результатов в логике доказуемости является знаменитая теорема Р. Соловея об арифметической полноте [11], которая может быть переформулирована на алгебраическом языке следующим образом: для каждой Σ_1-корректной теории T эквациональная теория алгебры $\mathfrak{D}_T$ аксиоматизируется пропозициональной модальной логикой Гёделя–Лёба GL.

Наиболее сильные результаты об алгебрах доказуемости формальных теорий были получены В.Ю. Шавруковым [7–10]. Среди них неарифметичность полной первопорядковой теории $\mathrm{Th}(\mathfrak{D}_T)$ алгебры доказуемости любой Σ_1-корректной теории T и неразрешимость ее $\forall^*\exists^*\forall^*\exists^*$-фрагмента, полное описание рекурсивно перечислимых подалгебр $\mathfrak{D}_T$ (впоследствии Д. Замбелла распространил этот результат на произвольные подалгебры), существование нетривиальных автоморфизмов алгебры $\mathfrak{D}_T$. Шавруковым также были получены несколько важных результатов об изоморфизмах алгебр доказуемости [7, 9]. Именно эти результаты, формулируемые ниже, являются объектом исследований данной работы.

Первый из них – это достаточное условие отсутствия элементарной эквивалентности (а значит, и изоморфизма) алгебр доказуемости двух Σ_1-корректных теорий (см. [7] и [10, Theorem 2.11]). В частности, отсюда вытекает неизоморфизм алгебр доказуемости арифметики Пеано и теории множеств Цермело–Френкеля.

[1] *Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия*
[2] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: kolmakov-ea@yandex.ru*

Теорема 1. *Если теория T доказывает схему $\mathrm{RFN}_{\Sigma_1}(S)$ равномерной Σ_1-рефлексии для теории S, то $\mathfrak{D}_T \not\cong \mathfrak{D}_S$. Более того, в этом случае $\mathfrak{D}_T$ и $\mathfrak{D}_S$ не являются элементарно эквивалентными.*

Отметим, что в силу результата Крипке и Пур-Эль [6] для достаточно широкого класса теорий T и S алгебры Линденбаума $\mathfrak{L}_T$ и $\mathfrak{L}_S$ рекурсивно изоморфны. Второй важный результат Шаврукова [9] — это достаточное условие существования (рекурсивного) изоморфизма между $\mathfrak{D}_T$ и $\mathfrak{D}_S$, точную формулировку которого мы здесь не приводим.

Впоследствии Г. Адамссон усилил теорему 1 и получил следующий результат [1] (мы приводим другую, но, в силу результатов [1, Theorem 17], эквивалентную формулировку). Здесь $\mathcal{R}_T(x)$ есть функция Σ_1-рефлексии теории T, которая определяется следующим образом. Значение $\mathcal{R}_T(x)$ есть наименьшая верхняя граница для минимальных свидетелей Σ_1-предложений, которые доказуемы в T доказательствами с гёделевыми номерами, не превосходящими x.

Теорема 2. *Если существует эпиморфизм из $\mathfrak{D}_T$ на $\mathfrak{D}_S$, то существует элементарная функция $t(x)$ такая, что неравенство*

$$\mathcal{R}_T(n) \leq t(\mathcal{R}_S^{(4)}(n))$$

имеет место для бесконечно многих $n \in \mathbb{N}$.

Отметим, что это усиливает теорему Шаврукова о неизоморфизме в двух направлениях. Во-первых, ослаблено само достаточное условие неизоморфизма, что позволило построить примеры, демонстрирующие, что алгебра $\mathfrak{D}_T$ действительно зависит от конкретного выбора предиката доказуемости для теории T. В частности, Адамссон установил [1, Corollary 21], что $(\mathfrak{L}_T,\Box_T) \not\cong (\mathfrak{L}_T,\Box_T^{(6)})$, где $\Box_T^{(6)}$ есть 6-кратная итерация оператора $\Box_T$. Во-вторых, это условие гарантирует отсутствие эпиморфизма (а не просто изоморфизма). В своей работе Адамссон отмечает, что полученное им условие не является оптимальным и возможны более точные оценки.

Настоящая работа является продолжением исследований в этом направлении. Наш основной результат (теорема 3) усиливает приведенный выше результат Адамссона. Мы доказываем несколько свойств функции рефлексии $\mathcal{R}_T(x)$ для теории T, которые затем используются для получения более точных оценок в условии неизоморфизма, а также вводим классы функций $\mathcal{F}_T^k(U)$, которые являются обобщениями класса доказуемо тотальных вычислимых функций $\mathcal{F}(T)$ и позволяют обобщить основной результат. Используя усиленный результат о неизоморфизме, мы доказываем $(\mathfrak{L}_T,\Box_T) \not\cong (\mathfrak{L}_T,\Box_T\Box_T)$, что подтверждает одну из гипотез из работы [1], а также получаем серию новых примеров пар теорий с неизоморфными алгебрами доказуемости, но совпадающими классами доказуемо тотальных вычислимых функций.

В настоящей работе мы рассматриваем теории первого порядка в языке арифметики. Базовой арифметической теорией является элементарная арифметика EA, т.е. теория первого порядка в языке $0, (\cdot)', +, \times$, расширенном одноместным функциональным символом exp для функции 2^x. Теория EA задается стандартным набором аксиом, определяющих эти символы, и схемой индукции для всех элементарных формул (или $\Delta_0(\exp)$-формул), т.е. формул в языке с экспонентой, все вхождения кванторов в которые ограничены термами в этом языке. Через EA^+ обозначается теория, расширяющая EA аксиомой, выражающей тотальность суперэкспоненциальной функции 2^x_y. Классы арифметической иерархии Σ_n и Π_n в чисто арифметическом языке без экспоненты рекурсивно определяются стандартным образом для всех $n \in \mathbb{N}$. Для заданного класса формул Γ две теории T и S называются Γ-эквивалентными, если они доказывают одни и те же формулы из Γ.

Мы предполагаем фиксированной стандартную арифметизацию синтаксиса. В частности, $\ulcorner\varphi\urcorner$ обозначает гёделев номер формулы φ. Все теории, рассматриваемые в этой работе, предполагаются элементарно аксиоматизируемыми Σ_1-корректными расширениями теории EA. Напомним, что Σ_1-корректность означает истинность любого Σ_1-предложения, доказуемого в T. Каждая теория T задается элементарной формулой $\sigma_T(x)$, определяющей множество (гёделевых номеров) аксиом теории T в стандартной модели арифметики $\mathbb{N}$. Эта формула используется в построении (упомянутых выше) стандартного предиката доказательства $\mathrm{Prf}_T(p,x)$ и связанного с ним предиката доказуемости $\exists p \mathrm{Prf}_T(p,x)$, который мы обозначаем через $\Box_T(x)$. Конечные итерации предиката $\Box_T$ обозначаются через $\Box_T^{(k)}$. Стандартный предикат доказуемости $\Box_T$ удовлетворяет условиям Лёба и обладает свойством доказуемой Σ_1-полноты, что гарантирует истинность тождеств, задающих класс алгебр Магари, в определенной выше алгебре доказуемости $\mathfrak{D}_T$ (см. [4]).

Среди расширений заданной теории T мы рассматриваем так называемые схемы рефлексии. Схема локальной Γ-рефлексии $\mathrm{Rfn}_\Gamma(T)$ задается множеством формул вида $\Box_T\gamma \to \gamma$, для каждого предложения $\gamma \in \Gamma$. Схема равномерной Γ-рефлексии $\mathrm{RFN}_\Gamma(T)$ задается множеством формул вида $\forall x(\Box_T\gamma(\underline{x}) \to \gamma(x))$, для каждой формулы $\gamma \in \Gamma$. Обычно класс Γ есть один из классов арифметической иерархии.

Функция $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ называется доказуемо тотальной вычислимой функцией в теории T, если существует Σ_1-формула $\psi(x_1, \ldots, x_k, y)$, определяющая график функции f в стандартной модели, такая, что

$$T \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_k \exists y \psi(x_1, \ldots, x_k, y).$$

Класс доказуемо тотальных вычислимых функций теории T обозначается через $\mathcal{F}(T)$. Известно, что $\mathcal{F}(\mathrm{EA}) = \mathcal{E}_3$ есть класс функций элементарных по Кальмару. Будем говорить, что функция $g(x)$ мажорирует функцию $f(x)$, если неравенство $f(n) > g(n)$ выполнено только для конечного множества натуральных чисел $n \in \mathbb{N}$. Выражение $f^{(n)}(x)$ обозначает n-кратную композицию функции $f(x)$ с собой, и $f^{(0)}(x) = x$.

В работе [1] вводится несколько функций, связанных с “ускорением” доказательств при добавлении к теории T некоторых допустимых правил вывода (и других принципов), например, правила Париха (из $\Box_T\psi$ вывести ψ), и доказывается, что они имеют одинаковую скорость роста. В исходной формулировке теоремы 2 фигурирует другая функция, но как было упомянуто выше, использование функции Σ_1-рефлексии $\mathcal{R}_T(x)$ приводит к эквивалентной формулировке.

Поскольку теория T является Σ_1-корректной, функция $\mathcal{R}_T(x)$ тотальна и вычислима. Как отмечается в [1], функция $\mathcal{R}_T(x)$ близка к тому, чтобы быть доказуемо тотальной вычислимой функцией теории T, хотя и не является таковой (см. утверждение 1). Определение следующих классов функций $\mathcal{F}^k_T(U)$ базируется на этом наблюдении. Обозначим через $\mathcal{F}_T(U)$ класс всех функций $f\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ таких, что

$$U \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \Box_T\big(\exists y \psi_f(\underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}, y)\big),$$

для некоторой Σ_1-формулы $\psi_f(x_1, \ldots, x_n, y)$, определяющей график функции f в стандартной модели. Аналогично определяются классы $\mathcal{F}^k_T(U)$ при $k \geq 1$, где используется итерированный предикат доказуемости $\Box^{(k)}_T$ вместо $\Box_T$. Мы также пишем $\Box^{(0)}_T\psi(\underline{x})$ вместо $\psi(x)$, хотя $\Box^{(0)}_T(x)$, вообще говоря, не является формулой. Тогда естественно определить $\mathcal{F}^0_T(U)$ как $\mathcal{F}(U)$. В силу доказуемой Σ_1-полноты имеют место следующие включения:

$$\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}^0_T(U) \subseteq \mathcal{F}^1_T(U) \subseteq$$
$$\subseteq \mathcal{F}^2_T(U) \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}(U + \mathrm{RFN}_{\Sigma_1}(T)),$$

а также $\mathcal{F}(T) \subseteq \mathcal{F}_T(\mathrm{EA})$, поскольку $\mathrm{EA} \vdash \Box_T \forall x \psi(x) \to \to \forall x \Box_T \psi(\underline{x})$. Таким образом, мы получаем расширяющуюся цепочку классов, которые, вообще говоря, не замкнуты относительно суперпозиции (в отличие от класса $\mathcal{F}(U)$ доказуемо тотальных вычислимых функций). Однако имеет место следующее свойство замкнутости.

Л е м м а 1. *Если теория T содержит U, то для всех $F(x) \in \mathcal{F}^m_T(U)$ и $G(x) \in \mathcal{F}^n_T(U)$ имеет место $G(F(x)) \in \mathcal{F}^{m+n}_T(U)$ для всех $m, n \in \mathbb{N}$.*

Следующее утверждение является переформулировкой упомянутого выше утверждения про функцию $\mathcal{R}_T(x)$, доказанного в [1].

У т в е р ж д е н и е 1. *Для всех $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{R}^{(k)}_T(x) \in \in \mathcal{F}^k_T(\mathrm{EA})$.*

Ниже мы приводим без доказательства несколько фактов о свойствах функции рефлексии $\mathcal{R}_T(x)$ и о классах $\mathcal{F}^k_T(U)$, которые используются в доказательстве основной теоремы настоящей работы для получения более точных оценок в условии неизоморфизма Адамссона.

Л е м м а 2. *Существует строго монотонная элементарная функция $v(x)$ такая, что для всех ψ, χ и $n \in \mathbb{N}$, если существует S-вывод формулы $\Box_S\psi \vee \Box_S\chi$ с гёделевым номером, не превосходящим n, то либо существует S-вывод ψ, либо существует S-вывод χ с гёделевым номером, не превосходящим $\mathcal{R}_S(v(n))$.*

Л е м м а 3. *Существует элементарная функция $w(x, y)$ такая, что для любой $f(x) \in \mathcal{F}(T)$ существует $c \in \mathbb{N}$ такое, что $f(\mathcal{R}_S(n)) \leq \mathcal{R}_S(w(c, n))$ имеет место для всех $n \in \mathbb{N}$.*

С л е д с т в и е 1. *Существует строго монотонная элементарная функция $h(x)$ такая, что для любых $k \in \mathbb{N}$ и $f(x) \in \mathcal{F}(T)$ неравенство*

$$f(\mathcal{R}^{(k+1)}_S(n)) \leq \mathcal{R}^{(k+1)}_S(h(n))$$

выполнено для почти всех $n \in \mathbb{N}$.

Следующая теорема является основным результатом нашей работы и усиливает теорему 2.

Т е о р е м а 3. *Пусть T и S — теории со стандартными предикатами доказуемости $\Box_T$ и $\Box_S$. Если существует эпиморфизм алгебры $\mathfrak{D}_T$ на алгебру $\mathfrak{D}_S$, то существует элементарная функция $q(x)$ такая, что для всех $k \in \mathbb{N}$ и для любой функции $F(x) \in \mathcal{F}^k_T(T)$ неравенство $F(n) \leq \mathcal{R}^{(k+1)}_S(q(n))$ выполнено для бесконечно многих $n \in \mathbb{N}$.*

Мы не приводим здесь доказательства этой теоремы. Отметим лишь, что оно во многом следует доказательству Адамссона [1] (которое, в свою очередь, следует исходному доказательству Шаврукова [7]), а сформулированные выше леммы позволяют получить более точные оценки и более общий результат. Теорема 3 дает несколько достаточных условий неизоморфизма алгебр доказуемости, которые приводятся ниже.

С л е д с т в и е 2. *Каждое из следующих условий влечет отсутствие эпиморфизмов из* $\mathfrak{D}_T$ *на* $\mathfrak{D}_S$:

(i) $\mathcal{R}_S^{(k+1)}(x) \in \mathcal{F}_T^k(T)$ *для некоторого* $k \in \mathbb{N}$;

(ii) $\mathcal{F}_S^{k+1}(\mathrm{EA}) \subseteq \mathcal{F}_T^k(T)$ *для некоторого* $k \in \mathbb{N}$;

(iii) $T \vdash \forall\sigma \in \Sigma_1(\Box_S^{(k+1)}\sigma \to \Box_T^{(k)}\sigma)$ *для некоторого* $k \in \mathbb{N}$.

Отметим, что пункты (ii) и (iii) этого следствия также применимы к алгебрам для теорий с нестандартными предикатами доказуемости (например, $\Box_T\Box_T$) при условии, что эти предикаты могут быть заменены стандартными предикатами, которые эквивалентны исходным, и эта эквивалентность доказуема в теории EA.

Рассмотрим несколько применений теоремы 3 для получения новых примеров пар теорий с неизоморфными алгебрами. Для доказательства неизоморфизма (и отсутствия эпиморфизмов) мы будем пользоваться следствием 2 и замечанием относительно нестандартных предикатов доказуемости, приведенным выше.

С л е д с т в и е 3. *Для всех* $n, m \in \mathbb{N}$, *если* $n > m \geq 1$, *то не существует эпиморфизма из* $(\mathfrak{L}_T, \Box_T^{(n)})$ *на* $(\mathfrak{L}_T, \Box_T^{(m)})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу доказуемой Σ_1-полноты и $m+1 \leq n$, в EA выводимо $\forall\sigma \in \Sigma_1(\Box^{((m+1)\cdot m)}\sigma \to \Box_T^{(m\cdot n)}\sigma)$, откуда, в силу пункта (iii) следствия 2 при $k = m$ и возможности заменить итерированные предикаты доказуемости на EA-эквивалентные стандартные предикаты, вытекает требуемый результат.

В частности, при $n = 2$, $m = 1$ мы получаем, что не существует эпиморфизма из алгебры $(\mathfrak{L}_T, \Box_T\Box_T)$ на алгебру $(\mathfrak{L}_T, \Box_T)$, что подтверждает гипотезу из [1].

Хотя достаточное условие Шаврукова из теоремы 1 строго сильнее условия из теоремы 2, оно имеет более теоретико-доказательственную форму, и поэтому более удобно при применении к конкретным парам теорий. Применение условия Адамссона требует более тщательного анализа длины доказательств Σ_1-предложений в рассматриваемых теориях для получения точных оценок на скорость роста функций $\mathcal{R}_T(x)$ и $\mathcal{R}_S(x)$, но оно также позволяет получить новые примеры неизоморфизма в тех случаях, когда теорема 1 не применима.

Следующая теорема (вместе с пунктом (iii) следствия 2) показывает, что условие Шаврукова может быть существенно ослаблено с сохранением его теоретико-доказательственной формы.

Т е о р е м а 4. *Если теория* T *доказывает схему* $\mathrm{Rfn}_{\Sigma_1}(S)$ *и этот факт формализуется в виде* $T \vdash \forall\sigma \in \Sigma_1\Box_T(\Box_S\sigma \to \sigma)$, *то не существует эпиморфизма из* $\mathfrak{D}_T$ *на* $\mathfrak{D}_S$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применяя данное в формулировке теоремы условие и доказуемую Σ_1-полноту, получаем $T \vdash \forall\sigma \in \Sigma_1(\Box_S\Box_S\sigma \to \Box_T\sigma)$. Требуемый результат тогда вытекает из пункта (iii) следствия 2 при $k = 1$.

Как следствие доказанной теоремы мы получаем семейство пар теорий с одинаковыми классами доказуемо тотальных вычислимых функций, но неизоморфными алгебрами доказуемости.

С л е д с т в и е 4. *Ни для какого* $n \geq 1$ *не существует эпиморфизма из* $\mathfrak{D}_U$ *на* $(\mathfrak{L}_T, \Box_T^{(n)})$, *где* U *есть теория* $T + \mathrm{Rfn}_{\Sigma_1}(T)$.

Следующее утверждение дает другой пример подобного рода. Оно вытекает из следствия 4 и теоремы об изоморфизме [9] (с использованием результатов [3, Proposition 5.4] и [2, Corollary 5.2]).

У т в е р ж д е н и е 2. *Для теорий* $U = \mathrm{EA}^+$, $S = U + \mathrm{Rfn}_{\Sigma_1}(U)$ *и* $T = U + \mathrm{RFN}_{\Sigma_1}(U)$ *имеет место* $\mathfrak{D}_U \not\cong \mathfrak{D}_S \cong \mathfrak{D}_T$, *но* $\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(S) \neq \mathcal{F}(T)$.

Отметим, что во всех рассмотренных примерах теорий с неизоморфными алгебрами, теории не были доказуемо равнонепротиворечивыми. Следующая теорема дает естественный пример семейства доказуемо Π_1-эквивалентных (а значит, и равнопротиворечивых) теорий с неизоморфными алгебрами. Напомним, что теория T_ω есть расширение теории T утверждениями $\neg\Box_T^{(n)}\bot$ для всех $n \in \mathbb{N}$. По теореме Горячева теории T_ω и $T + \mathrm{Rfn}_{\Sigma_1}(T)$ являются Π_1-эквивалентными, и этот факт доказуем в EA (см. [3, Proposition 6.1]).

Т е о р е м а 5. *Не существует эпиморфизма из* $\mathfrak{D}_U$ *на* $\mathfrak{D}_{T_\omega}$, *где* U *есть теория* $T + \mathrm{Rfn}_{\Sigma_1}(T)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся пунктом (i) следствия 2. В силу утверждения 1 имеем $\mathcal{R}_{T_\omega}(x) \in \mathcal{F}_{T_\omega}(\mathrm{EA}) = \mathcal{F}_T(\mathrm{EA})$, где равенство имеет место, поскольку T_ω есть Π_1-расширение теории T. Откуда, в силу леммы 1, получаем $\mathcal{R}_{T_\omega}^{(2)}(x) \in \mathcal{F}_T^2(\mathrm{EA}) \subseteq \mathcal{F}_U(U)$, где включение вытекает из доказуемости в EA предложения $\forall\sigma \in \Sigma_1(\Box_T\Box_T\sigma \to \Box_U\sigma)$.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность академику РАН Л. Д. Беклемишеву за поддержку и внимание к работе.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-90050.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Adamsson G.* Diagonalizable Algebras and the Length of Proofs // Magister-uppsats, Göteborgs universitet/Institutionen för filosofi, lingvistik och vetenskapsteori. 2011.
2. *Beklemishev L.D.* A Proof-theoretic Analysis of Collection // Arch. Math. Logic. 1998. V. 37. P. 275–296.
3. *Beklemishev L.D.* Proof-theoretic Analysis by Iterated Reflection // Arch. Math. Logic. 2003. V. 42. P. 515–552.
4. *Беклемишев Л.Д.* Схемы рефлексии и алгебры доказуемости в формальной арифметике // УМН. 2005. Т. 60. № 2. С. 3–78.
5. *Magari R.* The Diagonalizable Algebras (the Algebraization of the Theories Which Express Theor.: II) // Boll. d. Unione Matem. Ital. 1975. Suppl. fasc. 3. V. 4. № 12. P. 117–125.
6. *Pour-El M.B., Kripke S.* Deduction-preserving "Recursive Isomorphisms" Between Theories // Fund. Math. 1967. V. 61. P. 141–163.
7. *Shavrukov V.Yu.* A note on the diagonalizable algebras of PA and ZF // Ann. Pure Appl. Logic. 1993. V. 61. P. 161–173.
8. *Shavrukov V.Yu.* Subalgebras of diagonalizable algebras of theories containing arithmetic // Diss. Math. 1993. V. 323.
9. *Shavrukov V.Yu.* Isomorphisms of diagonalizable algebras // Theoria. 1997. V. 63. № 3. P. 210–221.
10. *Shavrukov V.Yu.* Undecidability in diagonalizable algebras // J. Symbolic Logic. 1997. V. 62. № 1. P. 79–116.
11. *Solovay R.M.* Provability interpretations of modal logic // Isr. J. Math. 1976. V. 25. P. 287–304.

ON A STRENGTHENING OF THE NON-ISOMORPHISM THEOREM FOR PROVABILITY ALGEBRAS

E. A. Kolmakov[a,b]

[a] *Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

[b] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS L.D. Beklemishev

We prove a strengthened version of V. Shavrukov's result on the non-isomorphism of provability algebras of two Σ_1-sound theories, based on the improvements previously discovered by G. Adamsson. We then obtain several corollaries to the strengthened result by applying it to various pairs of theories and obtain new non-isomorphism examples, In particular, we show that there are no epimorphisms from $(\mathfrak{L}_T, \Box_T\Box_T)$ onto $(\mathfrak{L}_T, \Box_T)$.

Keywords: provability predicate, provability algebra, reflection principle