ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 499, с. 17–19

МАТЕМАТИКА

УДК 519.1

АСИМПТОТИКА ЧИСЛА НЕЗАВИСИМОСТИ СЛУЧАЙНОГО ПОДГРАФА ГРАФА $G(n, r, < s)$

В. С. Карась[1], П. А. Огарок[2], А. М. Райгородский[1,2,3,4,*]

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 23.03.2020 г.
Поступило 26.03.2020 г.
После доработки 15.05.2021 г.
Принято к публикации 16.05.2021 г.

Рассматривается вопрос о вероятностной версии классической проблемы экстремальной комбинаторики. Представлены обобщения на случай непостоянных параметров и на случай различных вероятностей ребра для теоремы устойчивости, утверждающей, что число независимости случайного подграфа графа $G(n, r, < s)$ асимптотически не изменяется при независимом удалении ребер.

Ключевые слова: асимптотика, число независимости, случайный подграф, граф $G(n, r, < s)$

DOI: 10.31857/S268695432104007X

ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТА

В данном сообщении речь пойдет о вероятностной версии классической задачи экстремальной комбинаторики, изучение которой было инициировано более полувека назад П. Эрдешем, Ч. Ко и Р. Радо. В своей работе упомянутые авторы доказали следующую замечательную теорему.

Теорема 1 (П. Эрдеш, Ч. Ко, Р. Радо). *Пусть даны натуральные числа r и s, $s < r$. Пусть $\mathcal{R}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ — множество из n элементов. Обозначим $m(n, r, s)$ максимальную мощность такой совокупности r-элементных подмножеств множества $\mathcal{R}_n$, что любые два подмножества в этой совокупности имеют не менее s общих элементов (такая совокупность называется s-пересекающейся). Тогда найдется такое $n_0(r, s)$, что при всех $n \geq n_0(r, s)$ выполнено $m(n, r, s) = C_{n-s}^{r-s}$.*

Отметим, что оценка $m(n, r, s) \geq C_{n-s}^{r-s}$ практически очевидна: достаточно зафиксировать какие-либо s элементов $v_1, v_2, \ldots, v_s \in \mathcal{R}_n$ и рассмотреть все r-элементные подмножества, которые их содержат. В мировой литературе такую "тривиальную" s-пересекающуюся конструкцию принято называть звездой.

Ввиду своей исключительной значимости, результат теоремы 1 неоднократно обобщался и уточнялся. В частности, был получен ряд утверждений о своеобразной устойчивости результата Эрдеша–Ко–Радо. Ярким примером является, в первую очередь, так называемая граница Франкла, представленная последним в следующей формулировке.

Теорема 2 (П. Франкл). *Пусть даны натуральные числа r и s, $s < r$. Пусть $\mathcal{M}$ — произвольная s-пересекающаяся совокупность r-элементных подмножеств множества $\mathcal{R}_n$. Тогда найдется такое $n_0(r, s)$, что при всех $nn_0(r, s)$ либо $\mathcal{M}$ — это часть некоторой звезды, либо мощность $\mathcal{M}$ не превосходит величины*

a)
$$(s+2)C_{n-s-2}^{r-s-1} + C_{n-s-2}^{r-s-2} = \left|\{V\colon |V| = r, |\{1, \ldots, s+2\} \cap V| \geq s+1\}\right| \quad \textit{при} \quad r \leq 2s+1,$$

b)
$$\sum_{i=1}^{r-s} C_{r-s+1}^{i} C_{n-r-1}^{r-s-i} + s = \left|\{V\colon |V| = r, \{1, \ldots, s\} \subset V, V \cap \{1+s, \ldots, 1+r\} \neq \emptyset\} \cup \{\{1, \ldots, s+1\} \setminus \{i\} : i \in \{1, \ldots, s\}\}\right| \ \textit{при} \ r > 2s+1.$$

Важно сказать, что наименьшее $n_0(r, s)$ было определено Франклом и Уилсоном для любых r, s:
$$n_0(r, s) = (r - s + 1)(s + 1).$$

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[2] *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия*
[3] *Кавказский математический центр Адыгейского государственного университета, Майкоп, Республика Адыгея*
[4] *Бурятский государственный университет, Институт математики и информатики, Улан-Удэ, Россия*
**E-mail: mraigor@yandex.ru*

О современном состоянии исследований в области см. [1]. Мы же перейдем к версии устойчивости, которая изучалась в серии недавних работ (см. [2–9]).

Рассмотрим граф $G(n, r, < s) = (V(n, r), E(n, r, s))$:

$$V(n,r) = \{A \subset \{1, 2, \dots, n\} : |A| = r\},$$
$$E(n,r,s) = \{\{A, B\} : |A \cap B| < s\}.$$

Напомним, что числом независимости $\alpha(G)$ графа G называют размер максимального множества его вершин, попарно не соединенных ребрами (сами такие множества называются независимыми). Очевидно, что $\alpha(G(n, r, < s)) = m(n, r, s)$, а любая s-пересекающаяся совокупность r-элементных множеств взаимно однозначно отвечает некоторому независимому множеству вершин графа $G(n, r, < s)$. Графы такого типа активно изучаются в теории кодирования, в теории Рамсея, в теории гиперграфов, в комбинаторной геометрии (см. [10–24]).

Теперь введем понятие случайного подграфа графа $G(n, r, < s)$. Пусть $p \in [0, 1]$. Тогда $G_p(n, r, < s)$ – это случайный элемент со значениями во множестве всех остовных подграфов $G = (V(n,r), E)$ графа $G(n, r, < s)$ и с биномиальным распределением:

$$\mathbb{P}\left(G_p(n, r, < s) = G\right) = p^{|E|}(1-p)^{|E(n,r,s)|-|E|}.$$

В работе [2] была доказана следующая теорема об устойчивости.

Т е о р е м а 3 (М.М. Пядеркин, А.М. Райгородский). *Для любых фиксированных r и s*

$$\mathbb{P}(\alpha\left(G_{1/2}(n, r, < s)\right) = C_{n-s}^{r-s}) \to 1, \quad n \to \infty.$$

Нам удалось доказать аналогичное утверждение для неконстантных параметров $r = r(n)$ и $s = s(n)$.

Т е о р е м а 4. *Утверждение теоремы* 3 *верно для* $r = r(n) \to \infty$, $s = s(n) \to \infty$ *при условии, что*

$$r = o\left(\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{1}{3}}\right), \quad s = o(r).$$

Отметим, что в доказательстве теоремы 4 очень существенно используется теорема 2, в которой присутствует неулучшаемое условие $(r - s + 1)(s + 1) < n$. В частности, это условие означает, что $r^2 < n$. Таким образом, ограничение вида $r^3 < xn$, которое имеется по сути в теореме 4, вряд ли в рамках текущего метода удастся значительно ослабить. Иными словами, с точки зрения условий, теорема достаточно близка к оптимуму.

Также нам удалось перенести результат теоремы 3 на случай различных вероятностей ребра.

Т е о р е м а 5. *Справедливы следующие две асимптотики.*

1. *Для любых констант r и s таких, что $r > s$ и $r > 3$, при вероятности сохранения ребра*

$$p \geq p_1(n) = \frac{2sC_r^s \ln n}{C_{n-s}^{r-s}}$$

имеем

$$\mathbb{P}(\alpha\left(G_p(n, r, < s)\right) = C_{n-s}^{r-s}) \to 1, \quad n \to \infty.$$

2. *Для любого $\varepsilon > 0$ и для любых констант r и s таких, что $r > s$, при вероятности сохранения ребра*

$$p \leq p_2(n) = \frac{(1-\varepsilon)(r+s)\ln n}{C_{n-s}^{r-s}}$$

имеем

$$\mathbb{P}(\alpha\left(G_p(n, r, < s)\right) C_{n-s}^{r-s} + 1) \to 1, \quad n \to \infty.$$

При текущих ограничениях на r и s (нет зависимости от n) результат теоремы 5 практически неулучшаем.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Настоящая работа выполнена за счет гранта РНФ (проект № 16-11-10014).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kupavskii A.* Degree versions of theorems on intersecting families via stability // J. Comb. Theory Ser. A. 2019. V. 168. P. 272–287.
2. *Pyaderkin M.M.* On the chromatic number of random subgraphs of a certain distance graph // Discrete Applied Mathematics. 2019. V. 267. P. 209–214.
3. *Пядёркин М.М.* О пороговой вероятности для устойчивости независимых множеств в дистанционном графе // Матем. Заметки. 2019. Т. 106. № 2. С. 280–294.
4. *Деревянко Н.М., Киселев С.Г.* Числа независимости случайных подграфов некоторого дистанционного графа // Пробл. передачи информ. 2017. Т. 53. № 4. С. 3–15.
5. *Пядёркин М.М.* Числа независимости случайных подграфов дистанционных графов // Матеем. заметки. 2016. Т. 99. № 4. С. 564–573.
6. *Пядёркин М.М.* Числа независимости случайных подграфов некоторого дистанционного графа // Матем. заметки. 2016. Т. 99. № 2. С. 288–297.
7. *Devlin Pat, Kahn Jeff.* On "stability" in the Erdös–Ko–Rado Theorem // SIAM J. Discrete Math. 2016. V. 30. № 2. P. 1283–1289.
8. *Das Shagnik, Tran Tuan.* Removal and Stability for Erdös–Ko–Rado Theorem // SIAM J. Discrete Math. 2016. V. 30. Iss. 2.
9. *Kupavskii A.* On random subgraphs of Kneser and Schrijver graphs // J. Combinatorial Theory Ser. A. 2016. V. 30. Iss. 2.

10. *Kiselev S., Supavskii A.* Rainbow matchings in k-partite hypergraphs // Bulletin of the London Mathematical Society. 2021. V. 53. № 2. P. 360–369.

11. *Купавский А.Б., Сагдеев А.А.* Теория Рамсея в пространстве с чебышёвской метрикой // УМН. 2020. Т. 75. № 5 (455). С. 191–192.

12. *Сагдеев А.А.* Об одной теореме Франкла–Уилсона // Пробл. передачи информ. 2019. Т. 55. № 4. С. 86–106.

13. *Sagdeev A. A.* On the Chromatic Numbers Corresponding to Exponentially Ramsey Sets // J. Math. Sciences. 2020. V. 247. № 3. P. 488–497.

14. *Шабанов Д.А., Шайхеева Т.М.* О предписанном хроматическом числе полных многодольных гиперграфов и кратных покрытиях независимыми множествами // Матем. заметки. 2020. Т. 107. № 3. С. 454–465.

15. *Semenov A., Shabanov D.* On the weak chromatic number of random hypergraphs // Discrete Applied Mathematics. 2020. V. 276. P. 134–154.

16. *Akhmejanova M.B., Shabanov D.A.* Equitable colorings of hypergraphs with few edges // Discrete Applied Mathematics. 2020. V. 276. P. 2–12.

17. *Пушняков Ф.А., Райгородский А.М.* Оценка числа ребер в особых подграфах некоторого дистанционного графа // Матем. заметки. 2020. Т. 107. № 2. С. 286–298.

18. *Пушняков Ф.А., Райгородский А.М.* Оценка числа ребер в подграфах графов Джонсона // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т. 499. С. 40–43.

ASYMPTOTIC OF THE INDEPENDENCE NUMBER OF A RANDOM SUBGRAPH OF THE GRAPH $G(n, r, < s)$

V. S. Karas[a], P. A. Ogarok[b], and A. M. Raigorodskii[a,b,c,d]

[a]*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

[b]*Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Moscow Region, Russian Federation*

[c]*Institute of Mathematics and Computer Science, Adygya State University, Maykop, Russian Federation*

[d]*Institute of Mathematics and Computer Science, Buryat State University, Ulan-Ude, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

In this paper, we deal with a probabilistic version of a classical problem of extremal combinatorics. An extension to the case of non-constant parameters and to the case of different probabilities of edges is established for a stability theorem asserting that the independence number of a random subgraph of a graph $G(n, r, < s)$ does not change asymptotically, provided the initial edges are destroyed independently.

Keywords: Asymptotic, the independence number, random subgraphs, graph $G(n, r, < s)$