*ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 499, с. 8–12*

**МАТЕМАТИКА**

*УДК 519.615*

# НОВЫЙ КЛАСС ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ВЫРОЖДЕННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ *p*-РЕГУЛЯРНОСТИ

**© 2021 г. Академик РАН Ю. Г. Евтушенко[1,2,*], А. А. Третьяков[1,3,4,**]**

Поступило 22.04.2021 г.
После доработки 22.04.2021 г.
Принято к публикации 08.06.2021 г.

Предлагается новый подход для исследования на устойчивость динамических систем в случае, когда традиционные функции Ляпунова не эффективны или вообще не применимы для исследования. Основное аппаратное средство, которое используется для анализа вырожденных систем, это так называемая *p*-фактор функция Ляпунова, позволяющая сводить исходную задачу к новой на основе конструкций теории *p*-регулярности. Приводится пример содержательного применения рассматриваемого в статье метода.

*Ключевые слова:* динамические системы, устойчивость, вырожденность, особенность, *p*-фактор функция Ляпунова

**DOI:** 10.31857/S2686954321040068

Рассматривается автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}(t) = f(x), \tag{1}$$

где вектор-функция $f \in C^{p+1}(\mathbb{R}^n)$. При этом начальное условие $x(t_0) = x_0$ определяет единственное решение системы (1). Предполагаем, что $f(0) = 0$, т.е. точка решения $x^*(t) \equiv 0$ является положением равновесия системы (1), и будем изучать вопрос асимптотической устойчивости этого решения, а также возможность модификации системы (1) в случае неусточивости таким образом, чтобы получить новую систему с тем же положением равновесия, но уже устойчивого.

[1] *Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Федерального исследовательского центра “Информатика и управление” Российской академии наук, Москва, Россия*
[2] *Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный, Московская область, Россия*
[3] *System Research Institute, Polish Academy of Sciences, Warsaw, Poland*
[4] *Siedlce University, Faculty of Sciences, Siedlce, Poland*
**E-mail: yuri-evtushenko@yandex.ru*
***E-mail: prof.tretyakov@gmail.com*

Определение 1. Будем говорить, что решение $x^*(t) \equiv 0$ системы (1) устойчиво, или устойчиво по Ляпунову, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что $\|x(x_0(t))\| \le \varepsilon$ $\forall t \ge t_0$ при $\|x_0\| \le \delta$.

Определение 2. Будем говорить, что решение $x^*(t) = 0$ системы (1) является асимптотически устойчивым в окрестности $U(x^*)$, если оно устойчиво по Ляпунову и

$$\lim_{t\to\infty} x(x_0(t)) = 0. \tag{2}$$

Для изучения вопроса устойчивости является весьма эффективным аппарат функций Ляпунова (см., например, [1–11, 13]). Далее для простоты считаем $t_0 = 0$.

Определение 3. Непрерывно дифференцируемая функция $\nu(x)$ называется функцией Ляпунова, если $\nu(x) > 0$ и $\dfrac{d\nu(x)}{dt} < 0$ $\forall x \in U(x^*)\backslash\{x^*\}$, $\nu(x^*) = 0$.

Для анализа устойчивости системы (1) применима классическая теорема Ляпунова [13], которую мы сформулируем в следующем виде.

Теорема 1 (Ляпунова). *Если для системы* (1) *существует функция Ляпунова, то тривиальное решение* $x^*(t) = 0$ *асимптотически устойчиво.*

Традиционно используются следующие функции Ляпунова:

$$\nu(x) = \|f(x)\|^2, \quad \nu(x) = \|x - x^*\|^2. \tag{3}$$

Если матрица $f'(x^*)$ отрицательно определена, то очевидно $\frac{d\nu(x)}{dt} < 0$, $x \in U(x^*)\backslash\{x^*\}$.

Существует обширный класс систем вида (1), в которых отображение $f(x)$ вырождено в точке $x^* = 0$, т.е. $f'(x^*)$ вырождено, и строить функцию Ляпунова затруднительно. Например, для систем вида $\dot{x} = x^{2p}$, $p \geq 1$, $p \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ или $\dot{x}_1 = x_1 + x_1x_2$, $\dot{x}_2 = x_1^2 + x_2^3$, $x \in \mathbb{R}^2$ и т.д. В этом случае матрица $f'(x^*)$ вырождена в точке $x^* = 0$ и применить классическую функцию Ляпунова типа (3) невозможно. Оказывается, для вырожденных систем (1) эффективным методом исследования устойчивости является аппарат теории $p$-регулярности, описание и основные конструкции которого можно найти, например, в [12].

## 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ $p$-РЕГУЛЯРНОСТИ

Пусть отображение $f(\cdot): X \to Y$ достаточно гладкое (по крайней мере до порядка $p + 1$), $X$, $Y$ — банаховы пространства. Считаем при этом в точке $x^* \in X$, $f(x^*) = 0$. Для нас интересен случай вырождения $f(\cdot)$ в точке $x^*$, т.е. $\operatorname{Im} f'(x^*) \neq Y$. Пусть пространство $Y$ разложимо в прямую сумму подпространств

$$Y = Y_1 \oplus \ldots \oplus Y_p, \tag{4}$$

где $Y_1 = \overline{\operatorname{Im} f'(x^*)}$, $Z_1 = Y$ и пусть $Z_2$ — замкнутое дополнение пространства $Y_1$ до $Y$ (мы предполагаем, что такое существует). Обозначим через $P_{Z_2}: Y \to Z_2$ оператор проектирования на $Z_2$ параллельно $Y_1$. Тогда через $Y_2$ обозначим замыкание линейной оболочки образа квадратичной формы $P_{Z_2} f^{(2)}(x^*)[\cdot]^2$. Далее определим индуктивно

$$Y_i = \overline{\operatorname{span} \operatorname{Im} P_{Z_i} f^{(i)}(x^*)[\cdot]^i} \subseteq Z_i,$$

где $Z_i$ — замкнутое дополнение к $(Y_1 \oplus \ldots \oplus Y_{i-1})$. Окончательно, $Y_p = Z_p$. При этом число $p \in \mathbb{N}$ выбирается как минимальный номер, для которого (4) имеет место. Определим отображения

$$f_i(x) = P_{Y_i} f(x): X \to Y_i, \quad i = 1, \ldots, p, \tag{5}$$

где $P_{Y_i}: Y \to Y_i$ — оператор проектирования на $Y_i$ параллельно $(Y_1 \oplus \ldots \oplus Y_{i-1} \oplus Y_{i+1} \oplus \ \ldots \ \oplus Y_p)$, и обозначим $P_i = P_{Y_i}$, $i = 1, \ldots, p$.

Определение 4. Линейный оператор $\Psi_p(x,h) \in L(X, Y_1 \oplus \ldots \oplus Y_p)$, $h \in X$, $\|h\| \neq 0$,

$$\Psi_p(x,h) = f_1'(x) + f_2''(x)h + \ldots + f_p^{(p)}(x)[h]^{p-1} \tag{6}$$

называется $p$-фактор оператором отображения $f(\cdot)$ в точке $x$, а $\Psi_p(x,h) = f_1(x) + f_2'(x)h + \ldots + f_p^{(p-1)}(x)[h]^{p-1}$ — $p$-фактор функция.

Определение 5. Будем говорить, что отображение $f(\cdot)$ $p$-регулярно в точке $x^*$ на элементе $h$, если матрица $\Psi_p(x^*, h)$ не вырождена, т.е. $\operatorname{Im}\Psi_p(x^*, h) = Y$.

Пусть $\operatorname{Ker}^k f_k^{(k)}(x^*)$ есть $k$-ядро $k$-формы $f_k^{(k)}(x^*)$, т.е.

$$\operatorname{Ker}^k f_k^{(k)}(x^*) = \{\xi \in X \mid f_k^{(k)}(x^*)[\xi]^k = 0\}.$$

Через $H_p(x^*)$ обозначим

$$H_p(x^*) = \bigcap_{k=1}^{p} \operatorname{Ker}^k f_k^{(k)}(x^*).$$

Одним из основных результатов теории $p$-регулярности является теорема о неявной функции в вырожденном случае, которую мы представим в следующем виде [14].

Теорема 2. *Пусть* $g(u,x) \in C^{p+1}(U,X)$, $g: U \times X \to Z$, $U$, $X$ *и* $Z$ — *банаховы пространства и отображения* $g_i(u,x)$, $i = 1, \ldots, p$, *определены в соответствии с* (5). *Предположим, что* $g(u^*, x^*) = 0$ *и* $g$ — $p$-*регулярна по переменной* $x$ *на элементе* $h \in \bigcap_{k=1}^{p} \operatorname{Ker}^k g_k^{(k)}(u^*, x^*)$, $h = (\bar{u}, 0)$, $\bar{u} \neq 0$, *т.е.*

$$\{g_1'(u^*, x^*) + g_2''(u^*, x^*)[h] + \ldots + g_p^{(p)}(u^*, x^*)[h]^{p-1}\} \cdot (\{0\}_u \times X) = Z.$$

*Тогда существует независимая константа* $c > 0$, *достаточно малое* $\varepsilon > 0$ *и отображение* $\varphi(u) = x^* + \omega(u)$ *такие, что для* $\alpha \in [0, \varepsilon]$ *и* $u = u^* + + \alpha\bar{u}$ *имеем* $g(u, \varphi(u)) = 0$, $\|\omega(u)\| = o(\alpha)$ *и*

$$\|\varphi(u) - x^*\| \leq c \sum_{k=1}^{p} \|g_k(u, x^*)\|^{1/k}.$$

## 2. $p$-ФАКТОР ФУНКЦИЯ ЛЯПУНОВА И УСТОЙЧИВОСТЬ ВЫРОЖДЕННЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим систему (1), в которой отображение $f(x)$ вырождено в точке равновесия $x^* = 0$, т.е. $\det f'(x^*) = 0$.

Система (1) в этом случае может и не быть устойчива, и построение на основе системы (1) новой системы, но уже устойчивой и с тем же положением равновесия $x^*$, является весьма важной проблемой. В свою очередь, ответ на вопрос об устойчивости решения $x^*$ системы (1) с использованием обычной функций Ляпунова вида (3) не всегда возможен, см., например, случай, когда $f(x) = x^2$, и др.

Покажем, как можно с использованием результатов теории $p$-регулярности построить на основе системы (1) новую систему, но уже асимптотически устойчивую по отношению к тому же решению $x^* = 0$. Введем так называемую $p$-фактор функцию Ляпунова.

Определение 6. Функцию $\nu_p(x, h) = \|\Phi_p(x,h)\|^2$, где

$$\begin{aligned}\Phi_p(x,h) &= P_1 f(x) + \\ &+ P_2 f'(x)[h] + \ldots + P_p f^{(p-1)}(x)[h]^{p-1} = \\ &= f_1(x) + f_2(x)[h] + \ldots + f_p^{(p-1)}(x)[h]^{p-1},\end{aligned}$$

будем называть $p$-фактор функцией Ляпунова для системы (1).

Теорема 3. *Пусть $f \in C^{p+1}(\mathbb{R}^n)$ и существует такой элемент $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$, что матрица $\Psi_p(x^*, h) < 0$ отрицательно опредена.*

*Тогда система*

$$\dot{x}(t) = \Phi_p(x^*, h), \quad x(0) = x_0 \tag{7}$$

*будет асимптотически устойчива в окрестности $U(x^*)$.*

Доказательство. Доказательство данной теоремы аналогично доказательству теоремы 1 с использованием $p$-фактор функции Ляпунова $\nu_p(x,h)$ и с учетом того, что

$$\frac{d\nu_p(x,h)}{dt} = 2\langle \Psi_p(x,h)\Phi_p(x,h), \Phi_p(x,h)\rangle < 0 \quad \forall x \in U(x^*) \backslash \{x^*\}.$$

При этом $\Phi_p(x,h) \neq 0 \; \forall x \in U(x^*) \backslash \{x^*\}$. Поэтому выполняются условия теоремы 1, из которой следует нужный результат.

Пример 1. Рассмотрим пример, когда $p = 2$

$$\frac{dx}{dt} = x^2, \quad x(0) = x_0, \quad x^* = 0. \tag{8}$$

Очевидно, что условия теоремы 1 для классической функции Ляпунова $v(x) = \|f(x)\|^2 = x^4$ не выполнены.

Однако из теоремы 3 следует, что модифицированная система

$$\frac{dx}{dt} = P_1 f(x) + P_2 f'(x)h = 2xh$$

с 2-фактор функцией Ляпунова $\nu_2(x,h) = (2xh)^2$ будет асимптотически устойчива при $h = -1$. Здесь $P_1 = 0$, $P_2 = 1$.

Что касается асиптотической устойчивости исходной системы (1), то в случае вырождения $f'(x^*)$ ситуация может быть различная. Однако при предположении так называемой сильной $p$-регулярности отображения $f(\cdot)$ в точке $x^*$ будет верен результат, приводимый ниже в теореме 4.

Замечание 1. В силу того, что $P_1 f'(x^*) = f'(x^*)$, мы также будем использовать модификацию $p$-фактор функции Ляпунова при

$$\bar{\Phi}_p(x,h) = f(x) + P_2 f'(x)[h] + \ldots + P_p f^{(p-1)}(x)[h]^{p-1}$$

и соответственно модификацию $p$-фактор оператора

$$\bar{\Psi}_p(x,h) = f'(x) + P_2 f''(x)[h] + \ldots + P_p f^{(p)}(x)[h]^{p-1}.$$

и модификацию $p$-фактор функции $\Psi_p(x^*, h)$.

*Определение 7.* Будем говорить, что отображение $f \in C^{p+1}(\mathbb{R}^n)$ *удовлетворяет условию сильной $p$-регулярности* в точке $x^*$, если $\forall x \in U_\delta(x^*) \backslash \{x^*\}$ $\exists h \in \mathbb{R}^n$, $\|h\| \leq 1$ такие, что выполнено неравенство

$$\langle \bar{\Psi}_p(x,h)\bar{\Phi}_p(x,h), f(x)\rangle < 0, \tag{9}$$

где $\delta > 0$ – достаточно малое.

Пример 1 (продолжение). Для функции $f(x) = x^2$ условие сильной 2-регулярности в точке $x^* = 0$ выполнено. Действительно, здесь $p = 2$, $x^* = 0$, $P_1 = 0$, $P_2 = 1$ и

$$\bar{\Phi}_2(x,h) = x^2 + 2xh,$$
$$\bar{\Psi}_2(x,h) = f'(x) + P_2 f''(x)[h] = 2x + 2h,$$

$$\langle \bar{\Psi}_2(x,h)\bar{\Phi}_2(x,h), f(x)\rangle = 2(x+h)(x^2 + 2xh)x^2 < 0$$

$\forall x \in U_\delta(0) \backslash \{0\}$, где $h = 1$, если $x < 0$ и $-x < h < -\frac{x}{2}$, если $x > 0$ и выполнено (9).

Теорема 4. *Пусть $f \in C^{p+1}(\mathbb{R}^n)$.*

*Тогда если отображение $f$ – сильно $p$-регулярно в точке $x^*$, то тривиальное решение $x^*$ системы* (1) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Покажем, что $p$-фактор функция Ляпунова $\nu_p(x,h) = \|\bar{\Phi}_p(x,h)\|^2$ является искомой функцией Ляпунова для применения теоремы 1 при $x \in U_\delta(x^*)\backslash\{x^*\}$ и $\delta > 0$ достаточно малом. Имеем

$$\frac{d\nu_p(x,h)}{dt} = 2\langle\bar{\Phi}'_p(x,h)\bar{\Phi}_p(x,h),\dot{x}(t)\rangle = \\ = 2\left\langle\bar{\Psi}_p(x,h)\bar{\Phi}_p(x,h), f(x)\right\rangle.$$

Последнее выражение согласно (9) отрицательно $\forall x \in U_\delta(x^*)\backslash(0)$. При этом $\|\bar{\Phi}_p(x,h)\| \le c$ равномерно по $h$, так как $\|h\| \le 1$ $\forall x \in U_\delta(x^*)$. Поэтому доказательство теоремы 1 не изменится (см., например, [13]), при использовании функции $\nu_p(x,h)$ на траектории решений уравнения (1), хотя в некоторых точках траектории $x(t)$ векторы $h$, вообще говоря, могут быть разные и зависеть от $x$, но это не влияет на анализ устойчивости.

Однако при исследовании на устойчивость в общем случае ситуация зависит от начальной точки $x(0) = x_0$ и при различных точках $x_0$ траектория $x(x_0,t)$ может как сходиться к $x^*$, так и не сходиться к $x^*$. Ответ на этот вопрос весьма сложен и связан с существованием решения краевых задач. Поясним это.

Заменим переменные $u = \dfrac{1}{t}$ и пусть в точке $t = +\infty$ соответственно $u = 0$. Тогда система (1) перепишется следующим образом:

$$\dot{x}(u)u^2 = f(x), \quad x(0) = 0, \quad x(u_0) = x_0. \qquad (10)$$

Обозначив $g(u,x) = \dot{x}u^2 - f(x)$, можем исследовать, при каких начальных значениях $x_0$ уравнение $g(u,x) = 0$ имеет в окрестности точки (0, 0) решение $x = x(u)$. Частично ответ на этот вопрос может дать теорема 2, которая гарантирует существование устойчивого решения, если при начальных значениях $x_0$ выполняется условие $p$-регулярности отображения $g(u,x)$ на элементе $h = (0,x_0)$, а значит, существование решения $x(u) \to 0$ при $u \to 0$ (или соответственно $t \to \infty$).

Пример 1 (продолжение). Таким образом, из теоремы 4 следует асимптотическая устойчивость системы (8) с использованием модификации 2-фактор-функции Ляпунова

$$\bar{\nu}_2(x,h) = \|\bar{\Phi}_2(x,h)\|^2 = (x^2 + 2xh)^2.$$

Отметим также, что для системы (8) применение модифицированной 2-фактор функции $\bar{\Phi}_2(x,h)$ в теореме 3 также дает новую устойчивую динамическую систему

$$\dot{x}(t) = \bar{\Phi}_2(x,h) = \\ = f(x) + P_2 f'(x)[h] = x^2 + 2xh, \quad x(0) = x_0,$$

при $h = -1$.

## ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 21-71-30005).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983. 384 с.
2. *Барбашин Е.А., Красовский Н.Н.* Об устойчивости движения в целом // ДАН СССР. 1952. Т. 86. № 3. С. 453–456.
3. *LaSalle J.P., Lefschetz S.* Stability by Liapunov's direct method. Academic Press, 1961.
4. *Chellaboina V.S., Haddad W.M.* Nonlinear dynamical systems and control: A Lyapunov-based approach. Princeton University Press, 2008.
5. *Teschl G.* Ordinary differential equations and dynamical systems. Providence: American Mathematical Society, 2012. V. 140.
6. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.* Математическая теория автоматического управления. М.: ЛЕНАНД, 2019.
7. *Absil P.A., Kurdyka K.* On the stable equilibrium points of gradient systems // Systems & control letters. 2006. V. 55. № 7. P. 573–577.
8. *Гладилина Р.И.* Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости импульсных систем // Динамические системы. 2009. № 26. С. 25–30.
9. *Бибиков Ю.Н., Плисс В.А., Трушина Н.В.* Об устойчивости нулевого решения существенно нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в случае центра // Вестн. Санкт-Петербургского ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4. № 3.
10. *Stamova I.M., Stamov G.T.* Stability analysis of differential equations with maximum // Mathematica Slovaca. 2013. V. 63. № 6. P. 1291–1302.
11. *Ismayilova K.E.* Stability analysis for first-order nonlinear differential equations with three-point boundary conditions // e-Journal of Analysis and Applied Mathematics. 2020. V. 2020. № 1. P. 40–52.
12. *Tret'yakov A., Marsden J.E.* Factor analysis of nonlinear mappings: p-regularity theory // Communications on Pure & Applied Analysis. 2003. V. 2. № 4. P. 425.
13. *Евтушенко Ю.Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982. 432 с.
14. *Brezhneva O.A., Tret'yakov A.A.* Implicit function theorems for nonregular mappings in Banach spaces. Exit from singularity // Banach Spaces and Their Applications in Analysis. 2007. P. 285–302.

# NEW CLASS OF LYAPUNOV'S FUNCTIONS FOR SINGULAR DYNAMIC SYSTEMS STABILITY ANALYSIS. ELEMENTS OF *p*-REGULARITY THEORY

**Yu. G. Evtushenko**[a,b] **and A. A. Tret'yakov**[a,c,d]

[a] *Dorodnicyn Computing Centre, Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

[b] *Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Moscow Region, Russian Federation*

[c] *System Research Institute, Polish Academy of Sciences, Warsaw, Poland*

[d] *Siedlice University, Faculty of Sciences, Siedlice, Poland*

The article proposes a new approach for studying the stability of dynamic systems in the case when the traditional Lyapunov functions are ineffective or generally not applicable for research. The main tool used for the analysis of degenerate systems is the so-called $p$-factor Lyapunov function, which makes it possible to reduce the original problem to a new one based on the constructions of the $p$-regularity theory. An example of a meaningful application of the method considered in the article is given.

*Keywords:* dynamic systems, stability, degeneration, singular, $p$-factor Lyapunov function