

КРИТИЧЕСКИЕ ЗНАЧЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ БЛЯШКЕ

© 2021 г. Член-корреспондент РАН В. Н. Дубинин^{1,2,*}

Поступило 01.04.2021 г.

После доработки 15.04.2021 г.

Принято к публикации 17.06.2021 г.

Для конечных произведений Бляшке B степени $n \geq 2$, $B(0) = 0$, $B'(0) \neq 0$, установлены точная верхняя граница минимальных модулей критических значений и точная нижняя граница максимальных модулей критических значений этих произведений. Указанные оценки зависят только от n и $|B'(0)|$.

Ключевые слова: рациональные функции, произведения Бляшке, критические значения, римановы поверхности, симметризация, диссимметризация

DOI: 10.31857/S2686954321040056

Полиномы и рациональные функции играют важную роль в различных областях математики. Тем удивительнее наличие нерешенных задач для этих классов функций, формулируемых простым и естественным образом. К такого рода задачам относятся, например, знаменитые гипотезы Сендова о расположении нулей и критических точек комплексного полинома и Смейла об отношении критического значения полинома к соответствующей его критической точке (гипотеза о среднем значении) (см. [1]). Класс рациональных функций, наиболее близких по своей структуре к полиномам степени n , составляют конечные произведения Бляшке той же степени:

$$B(z) = \alpha \prod_{k=1}^n \frac{z - z_k}{1 - \bar{z}_k z}, \quad z \in U := \{z: |z| < 1\},$$

где $|\alpha| = 1$ и комплексные числа $z_1, \dots, z_n$ лежат в единичном круге U . Такие произведения и их приложения изучались многими авторами (см., например, работы [2–5] и библиографию в них). В то же время задачи, связанные с критическими значениями произведений Бляшке, мало изучены [1, 4]. Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть B – конечное произведение Бляшке степени $n \geq 2$, $B(0) = 0$, $|B'(0)| = c$, $0 < c < 1$. Тогда

$$\min\{|B(\zeta)|: B'(\zeta) = 0\} \leq \min\{|B_1(\zeta)|: B'_1(\zeta) = 0\}, \quad (1)$$

где

$$B_1(z) = z \frac{z^{n-1} - c}{1 - cz^{n-1}}. \quad (2)$$

Нетрудно видеть, что функция B_1 является произведением Бляшке. Критические точки B_1 заданы уравнением

$$\zeta^{2n-2} + ((n-2)c - n/c)\zeta^{n-1} + 1 = 0,$$

а критические значения $B_1(\zeta)$, реализующие минимум в правой части (1), расположены на одинаковом расстоянии от начала координат симметричным образом. Из теоремы 1 легко вытекает соответствующее утверждение о критических значениях комплексных полиномов вида $P(z) = z^n + \dots + cz$ [6]:

$$\min\{|P(\zeta)|: P'(\zeta) = 0\} \leq \min\{|P^*(\zeta)|: P^{*'}(\zeta) = 0\} = (n-1) \left(\frac{c}{n}\right)^{n/(n-1)},$$

где $P^*(z) = z^n - cz$. Последнее неравенство дает ответ на один из вопросов Смейла (см. [7, с. 3; 6]). Заметим, что полином P^* является также экстремальным и в знаменитой гипотезе Смейла о среднем значении, согласно которой предполагается существование критической точки ζ , удовлетворяющей неравенству

$$\left| \frac{P(\zeta)}{c\zeta} \right| \leq \frac{n-1}{n} \quad (3)$$

[7, с. 33]. Шейл–Смолл поднял вопрос о получении аналогичной (3) оценки, где полином P заменяется на конечное произведение Бляшке B ,

¹ Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Россия

² Институт прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук, Владивосток, Россия

*E-mail: dubinin@iam.dvo.ru

$B(0) = 0$, $B'(0) = c$ [1, с. 366]. Некоторый прогресс в этом направлении достигнут в работе Нг и Жан-га [4]. Учитывая вышесказанное, естественно предположить, что экстремальным произведением Бляшке в гипотезе, аналогичной (3), будет функция B_1 из теоремы 1.

При доказательстве теоремы 1 существенно используется симметрия римановой поверхности R_1 функции, обратной произведению B_1 . Эту поверхность можно представить следующим образом. Пусть σ — модуль наименьшего критического значения функции B_1 и пусть $\lambda_k = [\operatorname{sech}(2\pi i(k-1)/(n-1)), \exp(2\pi i(k-1)/(n-1))]$, $k = 1, \dots, n-1$

$$U_0 = \left\{ w: |w| < 1, w \notin \bigcup_{k=1}^{n-1} \lambda_k \right\}.$$

Поверхность R_1 получается приклеиванием “крест-накрест” к области U_0 листов $U_k = \{w: |w| < 1, w \notin \lambda_k\}$ по берегам совпадающих разрезов единичного круга, $k = 1, \dots, n-1$. Следуя методике [6], мы рассматриваем симметричный конденсатор, заданный на поверхности R_1 [8], который затем преобразуется в конденсатор меньшей емкости, расположенный на поверхности функции, обратной исходному произведению B из теоремы 1. Ключевую роль в этом преобразовании играет диссимметризация вещественнозначных функций [8].

В решении ряда задач экстремальной функции является так называемое произведение Чебышева–Бляшке [3]. Нас интересует функция B_2 , которая с точностью до дробно-линейной замены аргумента совпадает с таким произведением. Для фиксированного целого $n \geq 2$ и вещественного κ , $0 < \kappa < 1$, рассмотрим рациональную функцию $Z \equiv Z_n(\zeta; \kappa)$, заданную параметрически:

$$Z_n(\operatorname{sn}(u; k); \kappa) := \operatorname{sn}\left(u \frac{K(\kappa)}{K(k)}; \kappa\right), \quad u \in \mathbb{C},$$

где модуль k определяется равенством

$$K'(k)K(\kappa) = nK'(\kappa)K(k), \quad 0 < k < 1,$$

$K(\cdot)$ и $K'(\cdot)$ — полные эллиптические интегралы первого рода [9]. Функцию Z , а также суперпозиции этой функции с дробно-линейными отображениями как в области определения, так и в области значений, принято называть дробями Золотарева [10]. Хорошо известна роль дробей Золотарева в теории рациональной аппроксимации и некоторых вопросах электротехнических расчетов [9]. Конечное произведение Бляшке B_2 определяется следующим образом:

$$B_2(z) = \Phi\left(Z\left(\frac{\beta(1-z)}{1+z}; \kappa\right)\right), \quad z \in U, \quad 1 < \tau < \infty,$$

где

$$\Phi(v) = \frac{v(\sqrt{\tau}-1) + \sqrt{\tau} + 1}{\sqrt{\tau} + 1 - v(\sqrt{\tau}-1)}, \quad \sqrt{\kappa} = \frac{\sqrt{\tau}-1}{\sqrt{\tau}+1},$$

β — наибольший корень уравнения $Z(\zeta) = \frac{\sqrt{\tau}+1}{1-\sqrt{\tau}}$.

Функция B_2 отображает единичный круг $|z| < 1$ на риманову поверхность R_2 , расположенную над кругом $|w| < 1$ и допускающую следующее геометрическое представление. Пусть H_1 есть круг $|w| < 1$ с разрезом вдоль отрезка $h^- := [-1, -1/\sqrt{\tau}]$, и пусть $H_2, \dots, H_n$ — копии круга $|w| < 1$ с разрезами вдоль отрезков h^- и $h^+ := [1/\sqrt{\tau}, 1]$. Наконец, обозначим через H_n круг $|w| < 1$ с разрезом h^- , если n четное и h^+ в противном случае. Поверхность R_2 получается склеиванием областей H_k , $k = 1, \dots, n$. Область H_1 приклеена к области H_2 “крест-накрест” по берегам h^- -разрезов. Область H_2 приклеена к H_3 по берегам h^+ -разрезов и т.д. Область H_{n-1} приклеена к области H_n по берегам h^- -разрезов, если n четное, и по берегам h^+ -разрезов, если n нечетное.

Т е о р е м а 2. В условиях теоремы 1 справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \max\{|B(\zeta)|: B'(\zeta) = 0\} &\geq \\ &\geq \max\{|B_2(\zeta)|: B'_2(\zeta) = 0\} = 1/\sqrt{\tau}, \end{aligned}$$

где τ — единственный корень уравнения $|B'_2(0)| = c$ на промежутке $1 < \tau < \infty$.

Как следствие из теоремы 2, заключаем, что при всех t , $0 < t < 1/\sqrt{\tau}$, лемниската $\{z: |B(z)| = t\}$ не является связным множеством.

Доказательство теоремы 2 опирается на метод симметризации [11], при котором результат симметризации расположен на римановой поверхности функции, обратной полиному Чебышева первого рода.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 20-01-00018) и Минобрнауки России (дополнительное соглашение от 21.04.2020 № 075-02-2020-1482-1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sheil-Small T. Complex polynomials. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2002.
2. Mashreghi J., Fracain E. (eds.) Blaschke products and their applications. Fields Institute Communications 65. N.Y.: Springer, 2013.

3. *Ng T.W., Tsang C.Y.* Chebyshev-Blaschke products // J. Comp. and Appl. Math. 2015. V. 277. P. 106–114.
4. *Ng T.W., Zhang Y.* Smale's mean value conjecture for finite Blaschke products // J. Anal. 2016. V. 24. P. 331–345.
5. *Garcia S.R., Mashreghi J., Ross W.T.* Finite Blaschke products and their connections. Cham: Springer, 2018.
6. *Дубинин В.Н.* Неравенства для критических значений полиномов // Матем. сб. 2006. Т. 197. № 8. С. 63–72.
7. *Smale S.* The fundamental theorem of algebra and complexity theory // Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.). 1981. V. 4. № 1. P. 1–36.
8. *Dubinin V.N.* Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory. Basel: Birkhauser/Springer, 2014.
9. *Ахиезер Н.И.* Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970.
10. *Bogatyrev A.B.* How many Zolotarev fractions are there? // Constructive approximation. 2017. V. 46. № 1. P. 37–45.
11. *Дубинин В.Н.* Круговая симметризация конденсаторов на римановых поверхностях // Матем. сб. 2015. Т. 206. № 1. С. 69–96.

CRITICAL VALUES OF THE FINITE BLASCHKE PRODUCTS

Corresponding Member of the RAS V. N. Dubinin^{a,b}

^a *Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russian Federation*

^b *Institute for Applied Mathematics, Far East Branch, Russian Academy of Sciences, Vladivostok, Russian Federation*

For finite Blaschke products B of degree $n \geq 2$, $B(0) = 0$, $B'(0) \neq 0$, a sharp upper bound for the least critical values and a sharp lower bound for the greatest critical values of these products are established. These estimates depend only on n and $|B'(0)|$.

Keywords: rational functions, Blaschke products, critical values, Riemann surfaces, symmetrization, dis-symmetrization