ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 499, с. 54–57

МАТЕМАТИКА

УДК 517.984.5

ОПЕРАТОРНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ЗАДАЧИ СТЕКЛОВА В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ С БЫСТРО МЕНЯЮЩИМИСЯ УСЛОВИЯМИ НА ГРАНИЦЕ

© 2021 г. А. Г. Чечкина[1,*]

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 18.01.2021 г.
Поступило 10.02.2021 г.
После доработки 21.05.2021 г.
Принято к публикации 31.05.2021 г.

Рассмотрена спектральная задачи типа Стеклова для лапласиана в неограниченной области с гладкой границей. Условие Стеклова быстро чередуется с однородным условием Дирихле на части границы. Получены операторные оценки, с помощью которых изучено асимптотическое поведение собственных элементов исходной задачи при стремлении малого параметра к нулю. Малый параметр характеризует размер участков границы с условием Дирихле, расстояние между которыми имеет порядок логарифма малого параметра в отрицательной степени.

Ключевые слова: операторные оценки, задача Стеклова, граничное усреднение

DOI: 10.31857/S2686954321040044

Большой интерес последнее время вызывает задача Стеклова, зависящая от малого параметра (см., например, [1–5]). Предполагается, что микронеоднородность сосредоточена на границе, аналогичные задачи см. [6–9]. В этой работе рассматривается задача в неограниченной области, у которой условие Стеклова быстро чередуется с условием Дирихле на границе. Мы получаем операторные оценки для этой задачи, а также и для аналогичной задачи в ограниченной области. Некоторые интегральные оценки для подобных задач см. в [10, 11].

Отметим, что техника операторных оценок, впервые появившаяся в работах М.С. Бирмана, Т.А. Суслиной, В.В. Жикова, С.Е. Пастуховой и G. Griso (см. работы [12, 13], а также ссылки в них), позволяет получать значительно более строгие результаты (сходимость резольвент в соответствующих нормах) по сравнению с результатами, получаемыми в теории сингулярных возмущений и теории усреднения. Слабая и сильная сходимость решений (из теории возмущений и теории усреднения) влечет только частичные результаты о сходимости спектра.

В настоящей работе рассмотрена задача в неограниченной области, что приводит к существенному усложнению структуры спектра задачи, при этом получены точные по порядку оценки скорости сходимости, которые позволяют с помощью стандартных результатов спектральной теории самосопряженных операторов в гильбертовых пространствах доказать результат о сходимости спектра и соответствующих спектральных проекторов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть связная область Ω с непустой границей лежит в пространстве $\mathbb{R}^2$ с локальными координатами $x = (x_1, x_2)$. Предполагается, что граница области Ω имеет гладкость C^2 и равномерно ограниченную кривизну. Отметим еще раз, что ограниченность области Ω не предполагается.

Выберем на границе $\partial\Omega$ точку x_0 и назовем Γ_1 множество точек $x(s) \in \partial\Omega$ таких, что $|s| < 1$, где s – длина дуги от x_0 до данной точки. Пусть $s_k = k \cdot |\ln \varepsilon|^{\delta-1}$, $x_k = x(s_k)$, где $\delta \in (0, 1)$, $k \in \mathbb{Z}$, а ε – положительный малый параметр. Обозначим $\Upsilon_\varepsilon = \{k : |k \cdot |\ln \varepsilon|^{\delta-1}| < 1\}$.

Таким образом, Γ_1 – часть границы $\partial\Omega$ длины 2. Обозначим оставшуюся часть границы за Γ_2, т.е. $\Gamma_2 := \partial\Omega \backslash \overline{\Gamma}_1$. Мы предполагаем, что $\partial\Omega$ имеет в окрестности Γ_1 гладкость C^3. При этом Γ_1 состоит из двух быстро чередующихся частей (см. рис. 1):

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: chechkina@gmail.com*

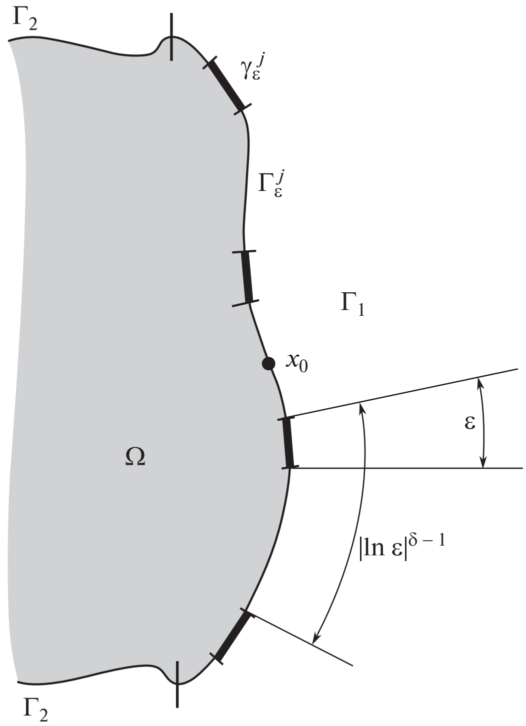

Рис. 1. Область Ω.

$\Gamma_1 = \gamma_\varepsilon \cup \Gamma_\varepsilon$, где $\gamma_\varepsilon = \bigcup_{k\in\Upsilon_\varepsilon} \gamma_\varepsilon^k$, $\Gamma_\varepsilon = \bigcup_{k\in\Upsilon_\varepsilon} \Gamma_\varepsilon^k$. Длина $|\gamma_\varepsilon^k| = \varepsilon$, $\overline{\gamma}_s^j \cup \overline{\Gamma}_s^k = [x(s_k), x(s_{k+1})]$, $k \in \Upsilon_\varepsilon$.

Рассмотрим следующую сингулярно возмущенную спектральную задачу с краевым условием Стеклова:

$$\begin{aligned} \hat{\mathscr{H}} u_\varepsilon &= 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} &= \lambda u_\varepsilon \quad \text{на} \quad \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon, \\ u_\varepsilon &= 0 \quad \text{на} \quad \gamma_\varepsilon, \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\hat{\mathscr{H}} := -\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} + \mathrm{i}\sum_{j=1}^{2}\left(A_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} A_j \right) + A_0.$$

Здесь $A_{ij} = A_{ij}(x)$, $A_j = A_j(x)$, $A_0 = A_0(x)$ — действительнозначные функции, определенные в $\overline{\Omega}$, а i — мнимая единица. Предполагаем, что A_{ij} и $A_j \in C^1(\overline{\Omega})$, $A_0 \in C(\overline{\Omega})$, $A_{ij} = A_{ji}$ и все эти функции равномерно ограничены на $\overline{\Omega}$,

$$\sum_{i,j=1}^{2} A_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq c_0 \sum_{j=1}^{2} \xi_j^2, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2,$$

где $c_0 > 0$ — фиксированная константа. Через $\dfrac{\partial}{\partial n}$ обозначена конормальная производная:

$$\frac{\partial}{\partial n} = \sum_{i,j=1}^{2} A_{ij}(x)\nu_i \frac{\partial}{\partial x_j} + \mathrm{i}\sum_{j=1}^{2} A_j \nu_j,$$

где $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ — единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Основное требование к области Ω следующее. В пространстве $W_2^1(\Omega)$ введем полуторалинейную форму:

$$\mathfrak{h}(u,v) := \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \overline{v}}{\partial x_i} dx + \\ + \mathrm{i}\sum_{j=1}^{2} \int_\Omega \left(A_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \overline{v} - A_j u \frac{\partial \overline{v}}{\partial x_j} \right) dx + \int_\Omega A_0 u\overline{v}\, dx.$$

Предполагается, что существуют такие константы $c_1 > 0$ и $\lambda_0 > 0$, что для всех $u \in W_2^1(\Omega)$ верна оценка

$$\mathfrak{h}(u,u) + \lambda_0 \|u\|^2_{L_2(\partial\Omega)} \geq c_1 \|u\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{2}$$

Имеет место

Л е м м а 1. *Полуторалинейная форма*

$$\mathfrak{h}_0(u,v) := h(u,v) + \lambda_0 (u,v)_{L_2(\partial\Omega)}$$

определяет эквивалентное скалярное произведение в $W_2^1(\Omega)$.

Обозначим через $W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ пространство следов функций из $W_2^1(\Omega)$ на $\partial\Omega$. Определим норму в $W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ как

$$\|g\|^2_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} := \inf_{\substack{u\in W_2^1(\Omega) \\ u|_{\partial\Omega}=g}} \mathfrak{h}_0(u,u).$$

Эта норма естественно возникает, если рассматривать пространство $W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ как факторпространство $W_2^1(\Omega)/\mathring{H}^1(\Omega)$, где $\mathring{H}^1(\Omega)$ — подпространство $W_2^1(\Omega)$, состоящее из функций с нулевым следом на границе Ω.

Для функций $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ неравенство (2) принимает форму

$$\mathfrak{h}(u,u) \geq c_1 \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)},$$

и, следовательно, краевая задача

$$\begin{aligned} \hat{\mathscr{H}} U &= 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \\ U &= g \quad \text{на} \quad \partial\Omega \end{aligned} \tag{3}$$

имеет единственное решение для каждого $g \in W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

Обозначим через $\mathcal{A}\colon W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \to W_2^1(\Omega)$ оператор, отображающий функцию $g \in W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ в решение U задачи (3). Можно заметить, что

$$\|g\|^2_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = \mathfrak{h}_0(\mathcal{A}g, \mathcal{A}g).$$

Это дает возможность определить скалярное произведение в пространстве $W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{gathered} \hat{\mathcal{H}} U_\varepsilon = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \\ \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial n} + \lambda_0 U_\varepsilon = g \quad \text{на} \quad \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon, \\ U_\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_\varepsilon, \end{gathered} \tag{4}$$

где $g \in W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ – заданная функция. Задачу (4) мы понимаем в обобщенном смысле, решения ищутся в соболевском пространстве $\mathring{H}^1(\Omega, \gamma_\varepsilon)$, состоящем из функций пространства $W_2^1(\Omega)$ с нулевым следом на γ_ε. Решение задачи (4) – функция $U_\varepsilon \in \mathring{H}^1(\Omega, \gamma_\varepsilon)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\mathfrak{h}_0(U_\varepsilon, v) = (g, v)_{L_2(\Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon)} \tag{5}$$

для любого $v \in \mathring{H}^1(\Omega, \gamma_\varepsilon)$. Имея в виду тождество (5) и предположение (2), получаем, что задача (4) имеет единственное решение.

Обозначим оператор в $W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, отображающий каждую функцию $g \in W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ в след решения задачи (4) на границе Ω, через $\mathcal{H}_\varepsilon$. Ясно, что эти следы равны нулю на γ_ε. Тогда задача нахождения собственных значений задачи (1) может быть записана в виде

$$\mathcal{H}_\varepsilon \mathfrak{u}_\varepsilon = \Lambda \mathfrak{u}_\varepsilon,$$

где $\mathfrak{u}_\varepsilon$ – след U_ε на $\Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon$, а $\Lambda := (\lambda + \lambda_0)^{-1}$. В данной работе изучается спектр оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$.

Пусть $\mathcal{H}_0$ – тот же оператор, что и $\mathcal{H}_\varepsilon$, но в случае $\gamma_\varepsilon = \emptyset$, $\Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon = \partial\Omega$. Ясно, что оба этих оператора, $\mathcal{H}_\varepsilon$ и $\mathcal{H}_0$ ограничены.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Первая теорема – об операторной сходимости.

Т е о р е м а 1. *Операторы $\mathcal{H}_\varepsilon$ и $\mathcal{H}_0$ являются самосопряженными в пространстве $W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Имеет место оценка*

$$\|\mathcal{H}_\varepsilon - \mathcal{H}_0\| \le C|\ln\varepsilon|^{-\frac{\delta}{2}},$$

где $\|\cdot\|$ – норма ограниченного оператора в пространстве $W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, $\delta = \mathrm{const}$, $0 < \delta < 1$.

Следующий результат — о сходимости спектра оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$.

Т е о р е м а 2. *Спектр оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ сходится к спектру $\mathcal{H}_0$. Спектральные проекторы оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ сходятся к спектральным проекторам оператора $\mathcal{H}_0$. А именно, если λ_0 – дискретное собственное значение оператора $\mathcal{H}_0$ кратности n при $\varepsilon \to 0$, то существует ровно n собственных значений оператора H_ε с учетом кратности, сходящихся к λ_0 при $\varepsilon \to 0$. И полный проектор этих собственных значений сходится в норме ограниченных операторов в $W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ к проектору на собственное подпространство, порожденное λ_0.*

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарит рецензента, в результате внимательного и тщательного прочтения работы которого удалось значительно улучшить изложение результатов.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета “Математические методы анализа сложных систем”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mel'nyk T.A.* Asymptotic behavior of eigenvalues and eigenfunctions of the Steklov problem in a thick periodic junction // Nonlinear Oscillations. 2001. V. 4. № 1. P. 91–105.
2. *Pérez E.* On periodic Steklov type eigenvalue problems on half-bands and the spectral homogenization problem // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. 2007. V. 7. № 4. P. 859–883.
3. *Назаров С.А.* Асимптотика решения спектральной задачи Стеклова в области с затупленным пиком // Мат. заметки. 2009. Т. 86. № 4. С. 571–587.
4. *Чечкина А.Г.* Усреднение спектральных задач с сингулярным возмущением условия Стеклова // Известия РАН. 2017. Т. 81. № 1. С. 203–240.
5. *Chechkina A.G., D'Apice C., De Maio U.* Rate of Convergence of Eigenvalues to Singularly Perturbed Steklov–Type Problem for Elasticity System // Applicable Analysis. 2019. V. 98. № 1-2. P. 32–44.
6. *Гадыльшин Р.Р., Чечкин Г.А.* Краевая задача для Лапласиана с быстро меняющимся типом граничных условий в многомерной области // Сиб. мат. журнал. 1999. Т. 40. № 2. С. 271–287.

7. *Перес М.Е., Чечкин Г.А., Яблокова (Доронина) Е.И.* О собственных колебаниях тела с “легкими” концентрированными массами на поверхности // Успехи мат. наук. 2002. Т. 57. Вып. 6. С. 195–196.
8. *Chechkin G.A.* On Vibration of Partially Fastened Membrane with Many “Light” Concentrated Masses on the Boundary // C. R. Mécanique. 2004. V. 332. № 12. P. 949–954.
9. *Amirat Y., Chechkin G.A., Gadyl’shin R.R.* Asymptotics of the Solution of a Dirichlet Spectral Problem in a Junction with Highly Oscillating Boundary // C. R. Mécanique. 2008. V. 336. № 9. P. 693–698.
10. *Chechkin G.A., Koroleva Yu.O., Persson L.-E.* On the Precise Asymptotics of the Constant in the Friedrich‘s Inequality for Functions, Vanishing on the Part of the Boundary with Microinhomogeneous Structure // Journal of Inequalities and Applications. 2007. V. 2007. article ID 34138. 13 pages. https://doi.org/10.1155/2007/34138
11. *Chechkin G.A., Koroleva Yu.O., Meidell A., Persson L.-E.* On the Friedrichs inequality in a domain perforated aperiodically along the boundary. Homogenization procedure. Asymptotics for parabolic problems. // Russ. J. Math. Phys. 2009. V. 16, P. 1–16.
12. *Суслина Т.А.* Усреднение задачи Дирихле для эллиптических уравнений высокого порядка с периодическими коэффициентами // Алгебра и анализ. 2017. Т. 29. № 2. С. 139–192.
13. *Griso G.* Interior error estimate for periodic homogenization. // Anal. Appl. 2006. V. 4. P. 61–79.

OPERATOR ESTIMATES FOR THE STEKLOV PROBLEM IN UNBOUNDED DOMAIN WITH RAPIDLY CHANGING CONDITIONS ON THE BOUNDARY

A. G. Chechkina[a]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

In the paper one considers a spectral problem of the Steklov type for the Laplacian in an unbounded domain with a smooth boundary. The Steklov condition rapidly alternates with the homogeneous Dirichlet condition on a part of the boundary. There are obtained operator estimates with the help of which the asymptotic behavior of the eigenelements of the original problem is studied as the small parameter tends to zero. The small parameter characterizes the size of the part of the boundary with the Dirichlet condition, the distance between which is of the order of the logarithm of the small parameter in the negative power.

Keywords: operator estimates, Steklov problem, boundary homogenization