ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 497, с. 18–22

МАТЕМАТИКА

УДК 517.54

ТЕОРЕМА О ЖЕСТКОСТИ САМОАФФИННЫХ ДУГ

© 2021 г. А. В. Тетенов[1,2,3,*], О. А. Челканова[2]

Представлено академиком РАН Ю. Г. Решетняком 24.12.2020 г.
Поступило 24.12.2020 г.
После доработки 11.01.2021 г.
Принято к публикации 26.01.2021 г.

Как известно более десятилетия, всякая самоподобная жорданова дуга γ, для которой существуют подобия, сколь угодно близкие к тождественному отображению и сдвигающие эту дугу по самой себе на малое расстояние, является отрезком прямой. В настоящей работе мы распространяем это утверждение на класс самоаффинных дуг и доказываем, что всякая самоаффинная дуга, допускающая сколь угодно малые аффинные сдвиги, является отрезком параболы или прямой.

Ключевые слова: самоаффинная дуга, аттрактор, слабое условие отделимости, теорема жесткости

DOI: 10.31857/S2686954321020053

Вопрос о строении самоподобных кривых играет важную роль во фрактальной геометрии и отражен во многих работах, начиная с ее зарождения. Первыми примерами фрактальных кривых были график функции Вейерштрасса (1861), кривая Коха (1906), треугольник Серпинского (1914). В 1938 г. П. Леви исследовал равносоставленные самоподобные кривые, а в 1958 г. Де Рам описал класс двузвенных самоаффинных кривых.

Важным шагом к пониманию структуры самоподобных кривых было исследование В.В. Асеевым самоподобных ципперов [7] и описание условия жордановости и ограниченности искривления их аттракторов.

В работе [8] была получена теорема жесткости для жордановых самоподобных дуг. Она состоит в том, что если жорданова дуга γ задана системой $\mathcal{S}$ сжимающих подобий в $\mathbb{R}^2$, не удовлетворяющей слабому условию отделимости, то γ является отрезком прямой. Из нее вытекают теорема о конечной представимости самоподобных кривых [9] и теорема о жесткости одномерных самоподобных структур [10].

Эти результаты справедливы для жордановых дуг, порожденных системами сжимающих подобий. Открытым оставался вопрос о распространении этих теорем на класс самоаффинных дуг.

К. Бандтом и А. С. Кравченко [2] было доказано, что всякая самоаффинная кривая класса гладкости C^2 является поддугой параболы или отрезком прямой.

Цель настоящей работы — доказать теорему жесткости для самоаффинных дуг, устанавливающую условия, при которых жорданова дуга, порожденная конечной или бесконечной системой сжимающих аффинных отображений, является отрезком параболы или прямой.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ — жорданова дуга. γ называется *самоподобной* (соответственно *самоаффинной*), если она является аттрактором конечной системы $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ сжимающих подобий (соответственно, невырожденных аффинных отображений) в $\mathbb{R}^n$.

Дугу γ назовем *локально самоаффинной*, если для любой собственной поддуги $\gamma' \subset \gamma$ существует невырожденное аффинное отображение S, такое что $S(\gamma) \subset \gamma'$.

Аттрактором системы $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ сжимающих отображений полного метрического пространства X в себя называется такое непустое компактное множество $K \subset X$, что $K = S_1(K) \cup \ldots \cup S_m(K)$.

Существование и единственность аттрактора обеспечивается теоремой Хатчинсона [4].

[1] *Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия*
[2] *Горно-Алтайский государственный университет, Горно-Алтайск, Россия*
[3] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия*
**E-mail: a.tetenov@g.nsu.ru*

Для системы $\mathcal{S}$ и ее множества индексов $I = \{1, \ldots, m\}$ назовем слова $\mathbf{i} = i_1 \ldots i_k \in I^k$ мультииндексами, а множество всех мультииндексов обозначим через $I^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} I^k$. Каждый мультииндекс $\mathbf{i} = i_1 i_2 \ldots i_k$ задает отображение $S_{\mathbf{i}} = S_{i_1} S_{i_2} \ldots S_{i_k} \colon X \to X$, а множества $K_{\mathbf{i}} = S_{\mathbf{i}}(K)$ называются копиями ранга k аттрактора K.

Заметим, что всякая самоаффинная дуга является локально самоаффинной; обратное неверно.

При исследовании размерности самоподобных множеств К. Бандт и З. Граф [1] рассматривали отображения соседства $S_{\mathbf{i}}^{-1} S_{\mathbf{j}}$ пар копий $K_{\mathbf{i}}$ и $K_{\mathbf{j}}$. Множество всех отображений соседства $\mathcal{F}(S) = \{S_{\mathbf{i}}^{-1} S_{\mathbf{j}}, \mathbf{i}, \mathbf{j} \in I^*, i_1 \neq j_1\}$ называется ассоциированным семейством подобий системы $\mathcal{S}$. Система $\mathcal{S}$ удовлетворяет слабому условию отделимости (WSP) [6], если тождественное отображение Id не является предельной точкой семейства $\mathcal{F}(\mathcal{S})$.

Жордановы дуги γ_1 и γ_2 имеют правильное пересечение, если $\gamma_1 \cap \gamma_2$ – дуга, один из концов которой является концом дуги γ_1, а другой – концом γ_2. Невырожденное аффинное отображение $g(x) = Ax + b$ пространства $\mathbb{R}^2$ мы назовем аффинным сдвигом жордановой дуги γ, если γ и $g(\gamma)$ имеют правильное пересечение, $\|A - E\| < \frac{1}{2}$, а $g(x)$ не имеет неподвижных точек на γ.

Главный результат настоящей работы – это следующая теорема о жесткости самоаффинных дуг.

Теорема 1. *Пусть локально самоаффинная жорданова дуга $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ удовлетворяет одному из следующих условий*:

(i) *Существует последовательность аффинных сдвигов f_k дуги γ, сходящаяся к тождественному отображению* Id;

(ii) γ *является аттрактором системы $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ сжимающих аффинных отображений, не удовлетворяющей слабому условию отделимости*.

Тогда γ – отрезок параболы или прямой.

Доказательству утверждения теоремы в случае (i) посвящена большая часть сообщения. Основная проблема состоит в том, чтобы показать, что дуга γ принадлежит классу C^2. Для этого в разделе 2 мы доказываем, что каждый аффинный сдвиг f дуги a можно вложить в однопараметрическую подгруппу $G_f = \{f^t, t \in \mathbb{R}\}$ группы аффинных отображений $\mathbb{R}^2$. Мы отмечаем, что орбиты точек $x \in \mathbb{R}^2$ относительно группы G_f являются кривыми класса гладкости C^∞. Это позволяет получить в разделе 3 последовательность поддуг Λ_k класса C^∞, равномерно сходящуюся к некоторой поддуге $\gamma' \subset \gamma$, и тем доказать требуемую гладкость γ. В случае (ii) требуется только доказать выполнение условия (i).

2. АФФИННЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И АССОЦИИРОВАННЫЕ С НИМИ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

В этом разделе мы сопоставляем каждому аффинному сдвигу f однопараметрическую подгруппу $G_f = \{f^t\}$ и показываем, что траектории $\{f^t(x), t \in \mathbb{R}\}$ для почти всех точек $x \in \mathbb{R}^2$ – кривые класса C^∞.

Зададим окрестность $\mathcal{U}$ тождественного отображения Id в группе невырожденных аффинных отображений $GA(\mathbb{R}^2)$ равенством

$$\mathcal{U} = \Big\{ f(x) = Ax + b, A \in GL(2, R), \|A - E\| < \frac{1}{2}, b \in \mathbb{R}^2, \|b\| < 1 \Big\}.$$

Пусть $A(\mathbb{R}^2)$ – пространство всех аффинных отображений плоскости $g(y) = Ly + \beta$, где $L \in L(2, \mathbb{R})$, $\beta \in \mathbb{R}^2$.

Лемма 1. *Существует гомеоморфизм Ψ окрестности $\mathcal{U}$ тождественного отображения в $GA(\mathbb{R}^2)$ на окрестность $\mathcal{V}$ нулевого отображения в $A(\mathbb{R}^2)$ такой, что для любого $f \in \mathcal{U}$ отображение $g = \Psi(f)$ удовлетворяет условию*:

для любого $x \in \mathbb{R}^2$ решение $y = f^t(x)$ задачи Коши $\{\dot{y} = g(y), y(0) = x\}$ при $t = 1$ равно $f(x)$.

Иными словами, отображение $g(y) = Ly + \beta$ таково, что для любого $x \in \mathbb{R}^2$ значение $f(x)$ совпадает со значением оператора эволюции

$$f^t(x) = e^{tL} x + e^{tL} \int_0^t e^{-sL} ds \cdot \beta \tag{1}$$

аффинной системы

$$\dot{y} = Ly + \beta \tag{2}$$

при $t = 1$. Таким образом, мы вкладываем $f(x)$ в однопараметрическую группу невырожденных аффинных отображений $\{f^t(x), t \in \mathbb{R}\}$, задаваемую уравнением (2).

Следуя [3, 5], в качестве L мы берем главное значение $\ln A$ матричного логарифма A, задаваемое рядом $L = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(A-E)^n}{n}$, а вектор β находим из равенства $b = e^L\int_0^1 e^{-sL}ds\cdot\beta$. Интегрирование дает, что $(e^L - E)\beta = Lb$ или, в других обозначениях, $(A - E)\beta = \ln A\cdot b$.

Поэтому $b = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{L^n}{(n+1)!}\beta$ и $\beta = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(A-E)^n}{n+1}b$. Таким образом, отображения Ψ и Ψ^{-1} задаются равенствами

$$g(y) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(A-E)^n}{n}\cdot y + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(A-E)^n}{n+1}b, \tag{3}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{L^n}{n!}x + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{L^n}{(n+1)!}\beta. \tag{4}$$

Заметим, что при $f\in\mathcal{U}$, $\|E-A\|<\frac{1}{2}$, а $\|L\|<\ln 2 < 0.7$. Это обеспечивает равномерную сходимость рядов в выражениях (3) и (4) и показывает, что Ψ гомеоморфно отображает множество U на некоторую окрестность $\mathcal{V} = \Psi(U)$ нуля в $A(\mathbb{R}^2)$.

Л е м м а 2. *Интегральные кривые* $L_f(x) = \{f^t(x); t\in\mathbb{R}\}$ *системы* (2) *принадлежат классу гладкости* C^∞.

Напомним, как задаются эти кривые в зависимости от выбора $g\in V$. Как известно, здесь возможны три случая:

1. Оба собственных значения λ_1, λ_2 матрицы L отличны от 0. Тогда собственные значения e^{λ_1}, e^{λ_2} матрицы A не равны 1. В этом случае уравнение (2) имеет единственную стационарную точку $x_0 = -L^{-1}\beta = (I - A)^{-1}b$, а

$$f^t(x) = e^{Lt}(x - x_0) + x_0. \tag{5}$$

2. Матрица L вырождена и ее собственные значения равны $\lambda\neq 0$ и 0. Если соответствующие собственные векторы e_1, e_2, а векторы b и x соответственно равны $b_1e_1 + b_2e_2$ и $x_1e_1 + x_2e_2$, то

$$f^t(x) = \left(x_1e^{\lambda t} + b_1\frac{e^{\lambda t}-1}{e^{\lambda}-1}\right)e_1 + (x_2 + b_2t)e_2. \tag{6}$$

3. Если $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, а $L\neq 0$, то матрица L подобна жордановой клетке с нулями на диагонали. Пусть (e_1, e_2) — базис, в котором матрица L имеет вид $L = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, и пусть $\beta = ue_1 + ve_2$ и $b = b_1e_1 + b_2e_2$. Тогда

$$f^t(x) = \left(\frac{b_2}{2}t^2 + \left(x_2 + b_1 - \frac{b_2}{2}\right)t + x_1\right)e_1 + (b_2t + x_2)e_2. \tag{7}$$

В случаях 2 и 3 система (2) либо не имеет стационарных точек, либо, если $b_2 = 0$, имеет неподвижную прямую $\{x = \tau e_1 + x_2e_2; \tau\in\mathbb{R}\}$, параллельную вектору e_1.

В каждом из этих случаев если x не является точкой покоя системы (2), то кривая $L_f(x)$ принадлежит классу гладкости C^∞.

3. АППРОКСИМАЦИЯ ДУГИ γ ГЛАДКИМИ КРИВЫМИ

Пусть f_k — последовательность аффинных сдвигов жордановой дуги γ, сходящаяся к Id. Пусть a_0, a_1 — концы дуги γ. Не ограничивая общности, мы можем предполагать, что дуга γ содержится в круге $D = \{x^2 + y^2\leq 1\}$ и что $f_k(a_0)\in\gamma$ для любого f_k.

Л е м м а 3. *Для любого* $x\in\gamma$ *можно выбрать такие* n_k, N_k, *что последовательность множеств*

$$P(k,x) = \{f_k^n(x), -n_k\leq n\leq N_k - n_k\} \tag{8}$$

сходится к γ *в метрике Хаусдорфа* d_H.

Наметим идею доказательства леммы 3.

В силу компактности дуги γ для любого $\varepsilon > 0$ существует такое δ, что если $x_1, x_2\in\gamma$ и $d(x_1, x_2) < \delta$, то диаметр поддуги γ_{x_1,x_2} меньше ε. Пусть $\sigma_{k,0} = \gamma\backslash f_k(\gamma)$. Для всякого $k\in\mathbb{N}$ существует такое число N_k, что множество точек $\{f_k^n(a_0), 0\leq n\leq N_k\}$ разбивает дугу γ на непересекающиеся поддуги $\sigma_{k,n} = f_k^n(\sigma_{k,0})$ с концами $(f_k^n(a_0), f_k^{n+1}(a_0))$ при $0\leq n\leq N_k - 1$ и поддугу $\sigma_{k,N_k} = f_k^{N_k}(\sigma_{k,0})\cap\gamma$ с концами $(f_k^{N_k}(a_0), a_1)$.

Существует такое N, что при $k > N$ и $y\in\gamma$, $\|f_k(y) - y\| < \delta$. Тогда диаметры поддуг $\sigma_{k,n}$ меньше ε. Пусть n_k — такой номер, что точка $x\in f_k^{n_k}(\sigma_{k,0})$. Тогда множество $P(k,x)$ содержит точки каждой из поддуг $\sigma_{k,n}$, поэтому $d_H(P(k,x),\gamma) < \varepsilon$.

Это показывает справедливость утверждения леммы 3.

Покажем теперь, что дуга γ принадлежит классу гладкости C^2.

Пусть $\Lambda_k(x)=\{f_k^t(x), -n_k \le t \le N_k - n_k\}$ – поддуга интегральной кривой $L_{f_k}(x)$. Так как $\Lambda_k(x) \supset P(k, x)$, дуга γ содержится в верхнем топологическом пределе $\overline{\lim_{n\to\infty}} \Lambda_k(x)$ последовательности множеств $\Lambda_k(x)$.

Множества Λ_k являются отрезками интегральных кривых линейных динамических систем $\dot{y} = L_k y + \beta_k$.

Так как $f_k \to \mathrm{Id}$, последовательность $g_k = \Psi(f_k)$ сходится к 0. Воспользуемся тем, что кривые Λ_k являются отрезками интегральных кривых уравнений $\dot{y} = \theta g_k(y)$ при любом выборе $\theta > 0$ и, выбрав подходящие множители θ_k, построим последовательность $\theta_k g_k$, отделенную от 0.

Для этого возьмем $\theta_k = 1/\max\{\|g_k(y)\|, y \in D\}$. Положив $\hat{g}_k = \theta_k g_k$, мы получим последовательность линейных динамических систем в D, интегральные кривые которых совпадают с интегральными кривыми систем $\dot{y} = g_k(y)$. При этом $\max\{\|\hat{g}_k(y)\|, y \in D\}$ равен единице и, в силу выпуклости функции $\|\hat{g}_k(y)\|$, достигается на границе D.

В силу теоремы Арцела, из последовательности $\hat{g}_k$ можно выделить подпоследовательность, которая равномерно сходится к некоторой аффинной функции g_0, которая отлична от нуля, поскольку $\max\|g_0(x)\|$ на D также равен 1.

Если $\gamma \cap D$ не является отрезком прямой, то найдется такая точка $\xi \in \gamma$, что $g_0(\xi) = a \ne 0$. Найдем такое N и такую окрестность $V(\xi)$, что при $x \in V$ и $n \ge N$, $\|\hat{g}_n(x) - a\| < \|a/2\|$. Тогда существует такое $T > 0$, что для любого $n > N$ и для любой точки в $x \in V$ время выхода этой точки за пределы V по траектории Λ_n не превосходит T.

При этом в силу непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от правых частей решения уравнений $\dot{x}(t) = \hat{g}_n(x)$, $x(0) = \xi$ равномерно сходятся вместе со всеми производными к решению уравнения $\dot{x}(t) = g_0(x)$, $x(0) = \xi$, а интегральные кривые L_{n_k} сходятся к интегральной кривой L_0 уравнения $\dot{x}(t) = g_0(x)$.

Так как для любой точки $x \in \gamma \cap V$, $g_0(x) \ne 0$, эта кривая принадлежит классу C^∞, но тогда и $\gamma \in C^\infty$.

Поскольку, согласно теореме К. Бандта и А.С. Кравченко [2], всякая самоаффинная дуга класса гладкости C^2 является отрезком параболы, таковой является и дуга γ. Это завершает доказательство теоремы в случае (i).

Чтобы получить доказательство утверждения (ii) теоремы 1, мы опираемся на следующие рассуждения:

1. Пусть γ – самоаффинная жорданова дуга γ, $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ – порождающая ее система, а отображение f принадлежит ассоциированному семейству $\mathcal{F}(\mathcal{S})$. Тогда либо $f(\gamma) \cap \gamma$ – поддуга в $f(\gamma)$ и γ, либо $f(\gamma) \cap \gamma = \varnothing$.

2. Из условий теоремы следует, что существует последовательность $f_n \in \mathcal{F}(\mathcal{S})$, сходящаяся к Id такая, что последовательность поддуг $f_n(\gamma) \cap \gamma$ сходится к γ. Тогда существует последовательность аффинных сдвигов $\hat{f}_n \in \mathcal{F}(\mathcal{S})$ дуги γ, сходящаяся к Id. Поэтому γ – отрезок параболы.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2019-1613.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bandt Ch., Graf S.* Self-similar sets 7. A characterization of self-similar fractals with positive Hausdorff measure // Proc. Amer. Math. Soc. 1992. V. 114. № 4. P. 995–1001.

2. *Bandt C., Kravchenko A.S.* Differentiability of fractal curves // Nonlinearity. 2011. V. 24. P. 2717.

3. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. 5-е изд. М.: Физматлит, 2004. 560 с. ISBN 5-9221-0524-8.

4. *Hutchinson J.* Fractals and self-similarity // Indiana Univ. Math. J. 1981. V. 30. № 5. P. 713–747.

5. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

6. *Zerner M.P.W.* Weak separation properties for self-similar sets // Proc. Amer. Math. Soc. 1996. V. 124. № 11. P. 3529–3539.

7. *Асеев В.В., Тетенов А.В., Кравченко А.С.* О самоподобных жордановых кривых на плоскости // Сиб. матем. журн. 2003. Т. 44. № 3. С. 481–492.

8. *Асеев В.В., Тетенов А.В.* О жордановых самоподобных дугах, допускающих структурную параметризацию // Сиб. матем. журн. 2005. Т. 46. № 4. С. 733–748.

9. *Тетенов А.В.* Самоподобные жордановы дуги и граф-ориентированные системы подобий // Сиб. матем. журн. 2006. Т. 47. № 5. С. 1147–1153.

10. *Tetenov A.V.* On the rigidity of one-dimensional systems of contraction similitudes // Siberian Electr. Math. Rep. 2006. V. 3. P. 342–345.

RIGIDITY THEOREM FOR SELF-AFFINE ARCS

A. V. Tetenov[a,b,c] and O. A. Chelkanova[b]

[a] *Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation*

[b] *Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation*

[c] *Gorno-Altaisk State University, Gorno-Altaisk, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS Yu.G. Reshetnyak

In is known for more than a decade that if a self-similar arc γ can be shifted along itself by similarity maps which are arbitrarily close to identity then it is a straight line segment. We extend this statement to the class of self-affine arcs and prove that each self-affine arc, admitting affine shifts which may be arbitrarily close to identity, is a segment of a parabola or a straight line.

Keywords: self-affine arc, attractor, weak separation property, rigidity theorem