

УДК 517+531.01

НОВЫЕ СЛУЧАИ ОДНОРОДНЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ

© 2021 г. М. В. Шамолин^{1,*}

Представлено академиком РАН В. В. Козловым 27.01.2021 г.

Поступило 27.01.2021 г.

После доработки 27.01.2021 г.

Принято к публикации 14.02.2021 г.

В работе показана интегрируемость некоторых классов однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким четырехмерным многообразиям. При этом силовые поля приводят к появлению диссипации переменного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Ключевые слова: динамическая система, интегрируемость, диссипация, трансцендентный первый интеграл

DOI: 10.31857/S2686954321020041

Изучение интегрируемости автономных систем на четырехмерном конфигурационном многообразии M^4 приводит к изучению систем восьмого порядка на касательном расслоении TM^4 . При этом ключевым, наряду с геометрией многообразия M^4 , является структура силового поля, присутствующего в системе. Например, задача о движении пятимерного маятника на обобщенном сферическом шарнире в неконсервативном поле сил приводит к динамической системе на касательном расслоении к четырехмерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительными группами симметрий [1, 2]. Системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций [2, 3].

Известны также задачи о движении точки по четырехмерным поверхностям вращения, в пространстве Лобачевского той же размерности и т.д. Но иногда в системах с диссипацией все-таки удается найти полный список первых интегралов, состоящий из трансцендентных, в смысле комплексного анализа, функций, поскольку полный список даже непрерывных автономных первых интегралов найти не удастся. Данные результаты

важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного силового поля.

В работе показана интегрируемость некоторых классов однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким четырехмерным многообразиям. При этом силовые поля приводят к появлению диссипации переменного знака и обобщают ранее рассмотренные [2, 3].

1. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

Как известно, в случае четырехмерного риманова многообразия M^4 с координатами (α, β) , $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, и аффинной связностью $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$ уравнения геодезических линий на касательном расслоении $TM^4\{\alpha^\bullet, \beta_1^\bullet, \beta_2^\bullet, \beta_3^\bullet; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ $\alpha = x^1$, $\beta_1 = x^2$, $\beta_2 = x^3$, $\beta_3 = x^4$, $x = (x^1, x^2, x^3, x^4)$, примут следующий вид (дифференцирование берется по натуральному параметру):

$$x^{i\bullet\bullet} + \sum_{j,k=1}^4 \Gamma_{jk}^i(x) x^{j\bullet} x^{k\bullet} = 0, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (1)$$

Изучим структуру уравнений (1) при изменении координат на касательном расслоении TM^4 . Для этого рассмотрим замену координат касательного пространства:

$$x^{i\bullet} = \sum_{j=1}^4 R^{ij} z_j, \quad (2)$$

¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: shamolin@imec.msu.ru

которую можно обратить: $z_j = \sum_{i=1}^4 T_{ji} x^{i*}$, при этом R^{ij} , T_{ji} , $i, j = 1, \dots, 4$, — функции от x , а также $RT = E$, где $R = (R^{ij})$, $T = (T_{ji})$. Назовем также уравнения (2) новыми кинематическими соотношениями, т.е. линейными соотношениями на касательном расслоении TM^4 . Справедливы равенства:

$$\dot{z}_i = \sum_{j,k=1}^4 T_{ij,k} x^{j*} x^{k*} - \sum_{j,p,q=1}^4 T_{ij} \Gamma_{pq}^j x^{p*} x^{q*}, \quad (3)$$

где $T_{ji,k} = \frac{\partial T_{ji}}{\partial x^k}$, $j, i, k = 1, \dots, 4$, при этом в системе

(3) вместо x^{i*} , $i = 1, \dots, 4$, надо подставить формулы (2), и правые части составной системы (2), (3) являются однородными формами соответствующих степеней по квазискоростям $z_1, \dots, z_4$.

Предложение 1. Система (1) в той области, где $\det R(\alpha, \beta) \neq 0$, эквивалентна составной системе (2), (3).

Таким образом, результат перехода от уравнений геодезических (1) к эквивалентной системе (2), (3) зависит как от замены (2) (т.е. вводимых кинематических соотношений), так и от аффинной связности $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$.

Рассмотрим далее достаточно общий случай задания кинематических соотношений в следующем виде:

$$\begin{aligned} \alpha^* &= z_4 f_4(\alpha), & \beta_1^* &= z_3 f_1(\alpha), \\ \beta_2^* &= z_2 f_2(\alpha) g_1(\beta_1), & \beta_3^* &= z_1 f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2), \end{aligned} \quad (4)$$

где $f_k(\alpha)$, $k = 1, 2, 3$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, 2$, $h(\beta_2)$ — гладкие функции, не равные тождественно нулю. Такие координаты $z_1, \dots, z_4$ в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются следующие уравнения геодезических [4, 5], например, с 13 ненулевыми коэффициентами связности (в частности, на четырехмерных поверхностях вращения, в пространстве Лобачевского и т.д.):

$$\begin{aligned} \alpha^{**} + \Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha, \beta) \alpha^{*2} + \Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha, \beta) \beta_1^{*2} + \Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha, \beta) \beta_2^{*2} + \\ + \Gamma_{33}^{\alpha}(\alpha, \beta) \beta_3^{*2} &= 0, \\ \beta_1^{**} + 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) \alpha^* \beta_1^* + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \beta_2^{*2} + \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) \beta_3^{*2} &= 0, \\ \beta_2^{**} + 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) \alpha^* \beta_2^* + 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) \beta_1^* \beta_2^* + \\ + \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) \beta_3^{*2} &= 0, \\ \beta_3^{**} + 2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) \alpha^* \beta_3^* + 2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) \beta_1^* \beta_3^* + \\ + 2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) \beta_2^* \beta_3^* &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

т.е. остальные коэффициенты связности равны нулю. В случае (4) уравнения (3) примут вид

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -f_4(\alpha) [2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) + Df_3(\alpha)] z_1 z_4 - \\ &- f_1(\alpha) [2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) + Dg_2(\beta_1)] z_1 z_3 - \\ &- f_2(\alpha) g_1(\beta_1) [2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) + Dh(\beta_2)] z_1 z_2, \\ \dot{z}_2 &= -f_4(\alpha) [2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + Df_2(\alpha)] z_2 z_4 - \\ &- f_1(\alpha) [2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + Dg_1(\beta_1)] z_2 z_3 - \\ &- \frac{f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1)}{f_2(\alpha) g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) z_1^2, \\ \dot{z}_3 &= -f_4(\alpha) [2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha)] z_3 z_4 - \\ &- \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) z_2^2 - \\ &- \frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) z_1^2, \\ \dot{z}_4 &= -f_4(\alpha) [\Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha, \beta) + Df_4(\alpha)] z_4^2 - \\ &- \frac{f_1^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} \Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha, \beta) z_3^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha, \beta) z_2^2 - \\ &- \frac{f_3^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^{\alpha}(\alpha, \beta) z_1^2, \end{aligned} \quad (6)$$

$Dj(\gamma) = \frac{d \ln |j(\gamma)|}{d\gamma}$, и уравнения (5) геодезических почти всюду эквивалентны составной системе (4), (6) на многообразии $TM^4\{z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$.

Для полного интегрирования системы (4), (6) необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. При этом первые интегралы (в частности, и для уравнений геодезических) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее.

Предложение 2. Если всюду справедлива система дифференциальных равенств

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha, \beta) + Df_4(\alpha) &\equiv 0, \\ f_4^2(\alpha) [2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha)] + f_1^2(\alpha) \Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha, \beta) &\equiv 0, \\ f_4^2(\alpha) [2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + Df_2(\alpha)] + \\ + f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha, \beta) &\equiv 0, \\ f_4^2(\alpha) [2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) + Df_3(\alpha)] + \\ + f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^{\alpha}(\alpha, \beta) &\equiv 0, \\ f_1^2(\alpha) [2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + Dg_1(\beta_1)] + \\ + f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) &\equiv 0, \\ f_1^2(\alpha) [2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) + Dg_2(\beta_1)] + \\ + f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) &\equiv 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\left[2\Gamma_{23}^3(\alpha,\beta)+Dh(\beta_2)\right]+ \\ +f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^2(\alpha,\beta)\equiv 0,$$

то система (4), (6) имеет аналитический первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_1(z_4,\dots,z_1)=z_1^2+\dots+z_4^2=C_1^2=\text{const.} \quad (8)$$

Примеры. Уравнения (5) геодезических в четырехмерном пространстве Лобачевского в модели Клейна примут вид

$$\alpha''-\frac{1}{\alpha}(\alpha'^2-\beta_1'^2-\beta_2'^2-\beta_3'^2)=0, \\ \beta_k''-\frac{2}{\alpha}\alpha'\beta_k'=0, \quad k=1, 2, 3. \quad (9)$$

Можно выписать 7-параметрическую систему, эквивалентную уравнениям (9) геодезических и имеющая первый интеграл вида (8). Аналогичными свойствами обладают уравнения геодезических и на четырехмерных поверхностях вращения.

Система равенств (7) может трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики многообразия к каноническому виду с законом сохранения энергии (8) (или см. ниже (21)) в зависимости от рассматриваемой задачи. История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работы [5, 6]). Поиск же как первого интеграла (8), так и других (см. далее) опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий.

Можно доказать отдельную теорему существования решения $f_k(\alpha)$, $k=1, 2, 3$, $g_l(\beta_1)$, $l=1, 2$, $h(\beta_2)$ системы (7) для наличия аналитического интеграла (8) для исследуемой системы (4), (6) уравнений геодезических. Но в дальнейшем при изучении динамических систем с диссипацией не всегда все условия (7) нам потребуются. Тем не менее, в дальнейшем будем предполагать в уравнениях (4) выполнение условия

$$f_1(\alpha)\equiv f_2(\alpha)\equiv f_3(\alpha)=f(\alpha), \quad (10)$$

при этом функции $g_l(\beta_1)$, $l=1, 2$, $h(\beta_2)$ должны удовлетворять, вообще говоря, преобразованным уравнениям из (7):

$$2\Gamma_{12}^2(\alpha,\beta)+Dg_1(\beta_1)+g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha,\beta)\equiv 0, \\ 2\Gamma_{13}^3(\alpha,\beta)+Dg_2(\beta_1)+g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^1(\alpha,\beta)\equiv 0, \\ g_1^2(\beta_1)\left[2\Gamma_{23}^3(\alpha,\beta)+Dh(\beta_2)\right]+ \\ +g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^2(\alpha,\beta)\equiv 0. \quad (11)$$

Таким образом, функции $g_l(\beta_1)$, $l=1, 2$, $h(\beta_2)$ зависят от коэффициентов связности, а ограничения на функции $f(\alpha)$, $f_4(\alpha)$ будут даны ниже.

Предложение 3. Если выполнены свойства (10), (11), при этом справедливы равенства

$$\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha,\beta)\equiv \Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha,\beta)\equiv \Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha,\beta)=\Gamma_1(\alpha), \quad (12)$$

то система (4), (6) имеет гладкий первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_2(z_3,z_2,z_1;\alpha)= \\ =\sqrt{z_1^2+z_2^2+z_3^2}\Phi_0(\alpha)=C_2=\text{const}, \quad (13) \\ \Phi_0(\alpha)=f(\alpha)\exp\left\{2\int_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\}.$$

Предложение 4. Если выполнены условия предложения 3, а также

$$g_1(\beta_1)\equiv g_2(\beta_1)=g(\beta_1), \quad (14)$$

при этом справедливы равенства

$$\Gamma_{12}^2(\alpha,\beta)\equiv \Gamma_{13}^3(\alpha,\beta)=\Gamma_2(\beta_1), \quad (15)$$

то система (4), (6) имеет гладкий первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_3(z_2,z_1;\alpha,\beta_1)= \\ =\sqrt{z_1^2+z_2^2}\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)=C_3=\text{const}, \quad (16) \\ \Psi_1(\beta_1)=g(\beta_1)\exp\left\{2\int_{\beta_{10}}^{\beta_1}\Gamma_2(b)db\right\}.$$

Предложение 5. Если выполнены условия предложений 3, 4, при этом справедливо равенство

$$\Gamma_{23}^3(\alpha,\beta)=\Gamma_3(\beta_2), \quad (17)$$

то система (4), (6) имеет гладкий первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_4(z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2)= \\ =z_1\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\Psi_2(\beta_2)=C_4=\text{const}, \quad (18) \\ \Psi_2(\beta_2)=h(\beta_2)\exp\left\{2\int_{\beta_{20}}^{\beta_2}\Gamma_3(b)db\right\}.$$

Предложение 6. Если выполнены условия предложений 3–5, то система (4), (6) имеет первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_5(\beta_2,\beta_3)= \\ =\beta_3\pm\int_{\beta_{20}}^{\beta_2}\frac{C_4h(b)}{\sqrt{C_3^2\Psi_2^2(b)-C_4^2}}db=C_5=\text{const}, \quad (19)$$

где, после взятия интеграла (19), вместо постоянных C_3 , C_4 можно подставить левые части равенств (16), (18) соответственно.

Теорема 1. Если выполнены условия предложений 2–6, то система (4), (6) обладает пятью независимыми первыми интегралами вида (8), (13), (16), (18), (19).

То, что полный набор при некоторых условиях состоит из пяти, а не из семи первых интегралов, будет показано ниже.

2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ

Модифицируем (4), (6), получив систему консервативную. А именно, введем гладкое (внешнее) силовое поле в проекциях на оси z_k^* , $k = 1, \dots, 4$, соответственно: $F_1(\beta_3)f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2)$, $F_2(\beta_2)f_2(\alpha)g_1(\beta_1)$, $F_3(\beta_1)f_1(\alpha)$, $F_4(\alpha)f_4(\alpha)$. Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^4\{z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ примет вид

$$\begin{aligned}\alpha^* &= z_4 f_4(\alpha), \\ z_4^* &= F_4(\alpha)f_4(\alpha) - f_4(\alpha)\left[\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + Df_4(\alpha)\right]z_4^2 - \\ &\quad - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}\Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta)z_3^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta)z_2^2 - \\ &\quad - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta)z_1^2, \\ z_3^* &= F_3(\beta_1)f_1(\alpha) - f_4(\alpha)[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha)]z_3z_4 - \\ &\quad - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)z_2^2 - \\ &\quad - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^1(\alpha, \beta)z_1^2, \\ z_2^* &= F_2(\beta_2)f_2(\alpha)g_1(\beta_1) - \\ &\quad - f_4(\alpha)\left[2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + Df_2(\alpha)\right]z_2z_4 - \\ &\quad - f_1(\alpha)\left[2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + Dg_1(\beta_1)\right]z_2z_3 - \\ &\quad - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\frac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)}h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^2(\alpha, \beta)z_1^2, \\ z_1^* &= F_1(\beta_3)f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2) - \\ &\quad - f_4(\alpha)\left[2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) + Df_3(\alpha)\right]z_1z_4 - \\ &\quad - f_1(\alpha)\left[2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) + Dg_2(\beta_1)\right]z_1z_3 - \\ &\quad - f_2(\alpha)g_1(\beta_1)\left[2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) + Dh(\beta_2)\right]z_1z_2, \\ \beta_1^* &= z_3f_1(\alpha), \quad \beta_2^* = z_2f_2(\alpha)g_1(\beta_1), \\ \beta_3^* &= z_1f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2),\end{aligned}\tag{20}$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{aligned}\alpha^{**} &- F_4(\alpha)f_4^2(\alpha) + \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta)\alpha^{*2} + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta)\beta_1^{*2} + \\ &+ \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta)\beta_2^{*2} + \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta)\beta_3^{*2} = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_1^{**} &- F_3(\beta_1)f_1^2(\alpha) + 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta)\alpha^*\beta_1^* + \\ &+ \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)\beta_2^{*2} + \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta)\beta_3^{*2} = 0, \\ \beta_2^{**} &- F_2(\beta_2)f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1) + 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta)\alpha^*\beta_2^* + \\ &+ 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta)\beta_1^*\beta_2^* + \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta)\beta_3^{*2} = 0, \\ \beta_3^{**} &- F_1(\beta_3)f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2) + 2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta)\alpha^*\beta_3^* + \\ &+ 2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta)\beta_1^*\beta_3^* + 2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta)\beta_2^*\beta_3^* = 0.\end{aligned}$$

Предложение 7. Если всюду справедлива система равенств (7), то система (20) имеет гладкий первый интеграл следующего вида:

$$\begin{aligned}\Phi_1(z_4, \dots, z_1; \alpha, \beta) &= \\ &= z_1^2 + \dots + z_4^2 + V(\alpha, \beta) = C_1 = \text{const}, \\ V(\alpha, \beta) &= V_4(\alpha) + \sum_{k=1}^3 V_{4-k}(\beta_k) = \\ &= -2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} F_4(a) da - 2 \sum_{k=1}^3 \int_{\beta_{k0}}^{\beta_k} F_{4-k}(b) db.\end{aligned}\tag{21}$$

Следующие утверждения справедливы в более общем виде, но мы ограничимся следующим.

Предложение 8. Пусть $F_{4-k}(\beta_k) \equiv 0$, $k = 1, 2, 3$. Если выполнены условия предложений 3–5, то система (20) имеет четыре гладких первых интеграла вида (13), (16), (18), (19).

Теорема 2. Пусть $F_{4-k}(\beta_k) \equiv 0$, $k = 1, 2, 3$. Если выполнены условия предложений 7, 8, то система (20) обладает пятью независимыми первыми интегралами вида (21), (13), (16), (18), (19).

То, что полный набор при некоторых условиях состоит из пяти, а не из семи первых интегралов, будет показано ниже.

3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ В СИЛОВОМ ПОЛЕ С ДИССИПАЦИЕЙ

Теперь несколько модифицируем (20) при условиях (10)–(12), (14), (15), (17), а также при $F_{4-k}(\beta_k) \equiv 0$, $k = 1, 2, 3$. При этом получим систему со знакопеременной диссипацией, наличие которой характеризует не только коэффициент $b\delta(\alpha)$, $b > 0$, в первом уравнении (22), но и следующая зависимость (внешнего) силового поля в проекциях на оси z_k^* , $k = 1, \dots, 4$, соответственно: $z_1F^1(\alpha)$, $z_2F^1(\alpha)$, $z_3F^1(\alpha)$, $F_4(\alpha)f_4(\alpha) + z_4F^1(\alpha)$. Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^4\{z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ примет вид

$$\begin{aligned}\alpha^* &= z_4 f_4(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ z_4^* &= F_4(\alpha)f_4(\alpha) - f_4(\alpha)\left[\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + Df_4(\alpha)\right]z_4^2 -\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}\Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta)z_3^2 - \frac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta)z_2^2 - \\
 & -\frac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta)z_1^2 + z_4F_4^1(\alpha), \\
 & \dot{z}_3 = -f_4(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\right]z_3z_4 - \\
 & -f(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)z_2^2 - \\
 & -f(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^1(\alpha, \beta)z_1^2 + z_3F^1(\alpha), \\
 & \dot{z}_2 = -f_4(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\right]z_2z_4 - \\
 & -f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)\right]z_2z_3 - \\
 & -f(\alpha)g(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^2(\alpha, \beta)z_1^2 + z_2F^1(\alpha), \\
 & \dot{z}_1 = -f_4(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\right]z_1z_4 - \\
 & -f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)\right]z_1z_3 - \\
 & -f(\alpha)g(\beta_1)\left[2\Gamma_3(\beta_2) + Dh(\beta_2)\right]z_1z_2 + z_1F^1(\alpha), \\
 & \beta_1^* = z_3f(\alpha), \quad \beta_2^* = z_2f(\alpha)g(\beta_1), \\
 & \beta_3^* = z_1f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2),
 \end{aligned} \tag{22}$$

и она почти всюду эквивалентна системе на вторые производные от α, β , в которой явно выделяется знакопеременная диссипация [2, 3].

Перейдем теперь к интегрированию системы восьмого порядка (22) при выполнении группы условий (11) и при выполнении равенств

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) & \equiv \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta)g^2(\beta_1) \equiv \\
 & \equiv \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2) = \Gamma_4(\alpha).
 \end{aligned}$$

Пусть при этом функция $f_4(\alpha)$ удовлетворяет первому из группы равенств (7). Введем также (по аналогии с (11)) ограничение и на функцию $f(\alpha)$: она должна удовлетворять следующему преобразованному равенству из (7):

$$f_4^2(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\right] + \Gamma_4(\alpha)f^2(\alpha) \equiv 0,$$

и происходит отделение независимой подсистемы седьмого порядка:

$$\begin{aligned}
 \alpha^* & = z_4f_4(\alpha) + b\delta(\alpha), \\
 \dot{z}_4 & = F_4(\alpha)f_4(\alpha) - \frac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}\Gamma_4(\alpha)(z_3^2 + z_2^2 + z_1^2) + z_4F_4^1(\alpha), \\
 \dot{z}_3 & = -f_4(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\right]z_3z_4 - \\
 & -f(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\beta_1)z_2^2 - \\
 & -f(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^1(\beta_1, \beta_2)z_1^2 + z_3F^1(\alpha), \\
 \dot{z}_2 & = -f_4(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\right]z_2z_4 - \\
 & -f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)\right]z_2z_3 -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -f(\alpha)g(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^2(\beta_1, \beta_2)z_1^2 + z_2F^1(\alpha), \\
 \dot{z}_1 & = -f_4(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)\right]z_1z_4 - \\
 & -f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)\right]z_1z_3 - \\
 & -f(\alpha)g(\beta_1)\left[2\Gamma_3(\beta_2) + Dh(\beta_2)\right]z_1z_2 + z_1F^1(\alpha), \\
 \beta_1^* & = z_3f(\alpha), \quad \beta_2^* = z_2f(\alpha)g(\beta_1), \\
 \beta_3^* & = z_1f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2).
 \end{aligned}$$

Для полного интегрирования данной системы необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных $w_4 = z_4, w_3 = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}, w_2 = \frac{z_2}{z_1}, w_1 = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}$, последняя система распадается следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \alpha^* & = w_4f_4(\alpha) + b\delta(\alpha), \\
 \dot{w}_4 & = F_4(\alpha)f_4(\alpha) - \frac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}\Gamma_4(\alpha)w_3^2 + w_4F_4^1(\alpha),
 \end{aligned} \tag{23}$$

$$\dot{w}_3 = \frac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}\Gamma_4(\alpha)w_3w_4 + w_3F^1(\alpha),$$

$$\begin{aligned}
 \dot{w}_2 & = (\pm)w_3\sqrt{1 + w_2^2}f(\alpha)g(\beta_1)\left[2\Gamma_3(\beta_2) + Dh(\beta_2)\right], \\
 \beta_2^* & = (\pm)\frac{w_2w_3}{\sqrt{1 + w_2^2}}f(\alpha)g(\beta_1),
 \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{w}_1 & = (\pm)w_3\sqrt{1 + w_1^2}f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)\right], \\
 \beta_1^* & = (\pm)\frac{w_1w_3}{\sqrt{1 + w_1^2}}f(\alpha),
 \end{aligned} \tag{25}$$

$$\beta_3^* = (\pm)\frac{w_3}{\sqrt{1 + w_2^2}}f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2). \tag{26}$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (23)–(26) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (23), по одному – для систем (24) и (25) (меняя в них независимые переменные), и дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (26) (т.е. всего пять).

Будем также предполагать, что для некоторого $\kappa \in \mathbf{R}$ выполнено равенство

$$\begin{aligned}
 \frac{f^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)}\Gamma_4(\alpha) & = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln |\Delta(\alpha)|, \\
 \Delta(\alpha) & = \frac{\delta(\alpha)}{f_4(\alpha)},
 \end{aligned} \tag{27}$$

а для некоторых $\lambda_4^0, \lambda_k^1 \in \mathbf{R}$ выполнены равенства

$$\begin{aligned} F_4(\alpha) &= \lambda_4^0 \frac{d}{d\alpha} \frac{\Delta^2(\alpha)}{2}, \\ F_k^1(\alpha) &= \lambda_k^1 f_4(\alpha) \frac{d}{d\alpha} \Delta(\alpha), \\ k &= 1, \dots, 4. \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь $F_1^1(\alpha) = F_2^1(\alpha) = F_3^1(\alpha) = F^1(\alpha)$, т.е. $\lambda_1^1 = \lambda_2^1 = \lambda_3^1 = \lambda^1$. Условие (27) назовем “геометрическим”, а условия из группы (28) — “энергетическими”.

Условие (27) названо геометрическим, в том числе, потому, что накладывает условие на коэффициент связности $\Gamma_4(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции $\Delta(\alpha)$. Условия же группы (28) названы энергетическими, в том числе, потому, что силы становятся, в некотором смысле, “потенциальными” по отношению к функциям $\Delta^2(\alpha)/2$ и $\Delta(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду (опять же относительно функции $\Delta(\alpha)$). При этом функция $\Delta(\alpha)$ и вводит в систему диссипацию разных знаков.

Теорема 3. Пусть выполняются условия (27) и (28). Тогда система (23)–(26) обладает полным набором — пятью независимыми, вообще говоря, трансцендентными [7, 8] первыми интегралами.

В общем случае первые интегралы выписываются громоздко (поскольку приходится интегрировать уравнение Абеля [9]). В частности, если $\kappa = -1$, явный вид ключевого первого интеграла таков:

$$\begin{aligned} \Theta_1(w_4, w_3; \alpha) &= G_1 \left(\frac{w_4}{\Delta(\alpha)}, \frac{w_3}{\Delta(\alpha)} \right) = \\ &= \frac{f_4^2(\alpha)(w_4^2 + w_3^2) + (b - \lambda^1)w_4\delta(\alpha)f_4(\alpha) - \lambda_4^0\delta^2(\alpha)}{w_3\delta(\alpha)f_4(\alpha)} = \\ &= C_1 = \text{const}. \end{aligned} \quad (29)$$

При этом дополнительный первый интеграл системы (23) имеет следующий структурный вид:

$$\begin{aligned} \Theta_2(w_4, w_3; \alpha) &= \\ &= G_2 \left(\Delta(\alpha), \frac{w_4}{\Delta(\alpha)}, \frac{w_3}{\Delta(\alpha)} \right) = C_2 = \text{const}. \end{aligned} \quad (30)$$

Первые интегралы для систем (24) и (25) будут иметь вид

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\Psi_s(\beta_s)} = C_{s+2} = \text{const}, \quad s = 1, 2, \quad (31)$$

о функциях $\Psi_s(\beta_s)$, $s = 1, 2$, см. (16), (18). А дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (26), находится по аналогии с (19):

$$\begin{aligned} \Theta_5(\beta_2, \beta_3) &= \beta_3 \pm \int_{\beta_{20}}^{\beta_2} \frac{C_4 h(b)}{\sqrt{C_3^2 \Psi_2^2(b) - C_4^2}} db = \\ &= C_5 = \text{const}, \end{aligned} \quad (32)$$

при этом после взятия этого интеграла вместо постоянных C_3, C_4 можно подставить соответствующие левые части равенств (31).

Выражение первых интегралов (29)–(32) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\Delta(\alpha)$. Действительно, при $\kappa = -1$ дополнительный первый интеграл системы (23) найдется из квадратуры

$$\begin{aligned} d \ln |\Delta(\alpha)| &= \frac{(b - u_4) du_4}{2W(u_4) - C_1 \{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4W(u_4)}\}/2}, \\ W(u_4) &= u_4^2 + (b - \lambda^1)u_4 - \lambda_4^0, \quad u_4 = \frac{w_4}{\Delta(\alpha)}. \end{aligned}$$

При этом после интегрирования вместо C_1 можно подставить (29). Правая часть данной квадратуры выражается через конечную комбинацию элементарных функций, а левая — в зависимости от функции $\Delta(\alpha)$.

Справедлива и теорема, в некотором смысле обратная к теореме 3.

Теорема 4. Условия (27), (28) (например, при $\kappa = -1$) являются необходимыми условиями существования первого интеграла (29) для системы (23)–(26).

4. СТРУКТУРА ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ ДЛЯ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ

Если α — периодическая координата периода 2π , то система (23)–(26) в условиях теоремы 3 становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним [2, 10]. При этом при $b = -\lambda^1$ она превращается в систему консервативную, которая обладает двумя гладкими первыми интегралами:

$$\begin{aligned} \Phi_1(-b; w_4, w_3; \alpha) &= w_3^2 + w_4^2 + 2bw_4\Delta(\alpha) - \\ &- \lambda_4^0\Delta^2(\alpha) = \text{const}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\Phi_2(w_3; \alpha) = w_3\Delta(\alpha) = \text{const}. \quad (34)$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (33), (34) также является первым интегралом

системы (23)–(26) при $b = -\lambda^1$. Но при $b \neq -\lambda^1$ каждая из функций

$$\begin{aligned} \Phi_1(\lambda^1; w_4, w_3; \alpha) = \\ = w_3^2 + w_4^2 + (b - \lambda^1)w_4\Delta(\alpha) - \lambda_4^0\Delta^2(\alpha) \end{aligned} \quad (35)$$

и (34) по отдельности не является первым интегралом системы (23)–(26). Однако отношение функций (35), (34) является первым интегралом системы (23)–(26) (при $\kappa = -1$) при любом b .

Вообще же, для систем любого порядка с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств [11, 12].

5. СИСТЕМЫ НА РАССЛОЕНИИ К ЧЕТЫРЕХМЕРНОЙ СФЕРЕ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Выше уже были выделены в качестве примеров два класса многообразий (поверхности вращения и пространства Лобачевского), для которых применима предлагаемая методика интегрирования систем с диссипацией. Теперь отметим однопараметрическое семейство функций $f(\alpha)$ и $f_4(\alpha)$, определяющей метрику на четырехмерной сфере:

$$\begin{aligned} f(\alpha) = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sqrt{1 + \mu_1 \sin^2 \alpha}}, \quad \mu_1 \in \mathbf{R}, \\ f_4(\alpha) \equiv -1, \end{aligned}$$

при этом выделим два существенных подслучая:

$$\mu_1 = 0, \quad (36)$$

$$\mu_1 = -1. \quad (37)$$

Случай (36) формирует класс систем, соответствующих движению динамически симметричного пятимерного твердого тела на нулевых уровнях циклических интегралов, вообще говоря, в неконсервативном поле сил, при дополнительной зависимости силового поля от (тензора второго ранга) угловой скорости [2, 10]. Случай (37) формирует класс систем, соответствующих движению точки на четырехмерной сфере с естественной метрикой, индуцированной метрикой всеобъемлющего пятимерного евклидова пространства. В частности, при $\delta(\alpha) = F_4(\alpha) \equiv 0$ рассматриваемая система описывает геодезический поток на четырехмерной сфере. В случае (36) если $\delta(\alpha) = F_4(\alpha)/\cos \alpha$, то система описывает движение пятимерного твердого тела в силовом поле $F_4(\alpha)$ под действием следящей силы [2, 3]. В частности, если $F_4(\alpha) = \sin \alpha \cos \alpha$, $\delta(\alpha) = \sin \alpha$, то система описывает обобщенный сферический маятник, помещенный в поток набегающей среды в пяти-

мерном пространстве, и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций [2, 3, 10, 11].

Если функция $\delta(\alpha)$ не является периодической, то рассматриваемая диссипативная система является системой с переменной диссипацией с ненулевым средним (т.е. она является собственно диссипативной). Тем не менее, и в этом случае (благодаря теоремам 3 и 4) можно получить явный вид трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Последнее также определяет новые нетривиальные случаи интегрируемости динамических систем с диссипацией на касательном расслоении гладкого четырехмерного многообразия в явном виде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шамолин М.В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук. 1998. Т. 53. Вып. 3. С. 209–210.
2. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере // ДАН. 2017. Т. 474. № 2. С. 177–181.
3. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия // ДАН. 2018. Т. 479. № 3. С. 270–276.
4. Козлов В.В. Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем // Прикл. матем. и механ. 2015. Т. 79. № 3. С. 307–316.
5. Клейн Ф. Неевклидова геометрия. Пер. с нем. Изд. 4, испр., обновл. М.: URSS, 2017. 352 с.
6. Вейль Г. Симметрия. М.: URSS, 2007.
7. Козлов В.В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи матем. наук. 1983. Т. 38. Вып. 1. С. 3–67.
8. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.-Л.: ОГИЗ, 1947.
9. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.
10. Трофимов В.В., Шамолин М.В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундам. и прикл. матем. 2010. Т. 16. Вып. 4. С. 3–229.
11. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия // ДАН. 2018. Т. 482. № 5. С. 527–533.
12. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1987.

NEW CASES OF HOMOGENEOUS INTEGRABLE SYSTEMS WITH DISSIPATION ON THE TANGENT BUNDLES OF THREE-DIMENSIONAL MANIFOLDS

M. V. Shamolin^a

^a Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

The integrability of certain classes of homogeneous dynamical systems is shown on the tangent bundles to four-dimensional manifolds. In this case, the force fields have the so-called variable dissipation and generalize the previously considered fields.

Keywords: dynamical system, integrability, dissipation, transcendental first integral