

УДК 517.954; 517.982

ПОВЫШЕННАЯ СУММИРУЕМОСТЬ ГРАДИЕНТА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЗАРЕМБЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

© 2021 г. Ю. А. Алхутов^{1,*}, Г. А. Чечкин^{2,3,4,**}

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 25.01.2021 г.

Поступило 18.02.2021 г.

После доработки 18.02.2021 г.

Принято к публикации 24.02.2021 г.

Получена оценка повышенной суммируемости градиента решения задачи Зарембы в ограниченной области на плоскости с липшицевой границей и быстрой сменой краевых условий Дирихле и Неймана с повышенным показателем суммируемости, не зависящим от частоты смены краевых условий.

Ключевые слова: оценки Мейерса, теоремы вложения, быстро меняющийся тип краевого условия

DOI: 10.31857/S2686954321020028

В настоящей работе обсуждаются интегральные свойства обобщенных решений уравнения Пуассона с быстро чередующимся краевым условием (Дирихле и Неймана). Устанавливается, что в ограниченной области на плоскости с липшицевой границей модуль градиента решения принадлежит пространству $L_{2+\delta}$ при достаточно малом $\delta > 0$.

Повышенная суммируемость градиента решений дивергентных равномерно эллиптических уравнений с измеримыми коэффициентами на плоскости вытекает из результатов работы [1]. Позже в многомерном случае для уравнений такого же вида повышенная суммируемость градиента решения задачи Дирихле в области с достаточно регулярной границей была установлена в [2]. Отметим еще, что повышенная суммируемость градиента решений задачи Дирихле в области с липшицевой границей для уравнения p -Лапласа с переменным показателем p , обладающим

логарифмическим модулем непрерывности, получена в [3].

Установленный в настоящей работе результат позволяет улучшить ранее известные оценки решений задач с быстрой сменой типа краевых условий (см. [4–6]).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для простоты рассмотрим модельный случай области $D \subset \mathbb{R}^2$, такой, что $D = \{(x, y): 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$. Отрезок на оси абсцисс $[0, 1]$ разделим на равные чередующиеся отрезки длины ε , которые обозначим через Γ_1^j и Γ_2^j соответственно, где $j = 1, \dots, N$, $\varepsilon = \frac{1}{N}$ и N – нечетно. Ниже Γ_1 означает объединение внутренностей отрезков Γ_1^j и полагается $\Gamma_2 = \partial D \setminus \Gamma_1$.

Рассмотрим в области D задачу Зарембы вида

$$\begin{aligned} \Delta u &= \operatorname{div} f \quad \text{в } D, \quad u = 0 \quad \text{на } \Gamma_2, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad \text{на } \Gamma_1. \end{aligned} \quad (1)$$

Стандартным методом с помощью теоремы Рисса о представлении линейного функционала можно показать, что если вектор-функция $f = (f_1, f_2)$ имеет компоненты из $L_2(D)$, то существует единственное решение задачи (1) из соболевского пространства функций $W_2^1(D)$, имеющих нулевой след на Γ_2 .

¹ Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых, Владимир, Россия

² Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

³ Институт математики с компьютерным центром – подразделение Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, Уфа, Россия

⁴ Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

*E-mail: yurij-alkhutov@yandex.ru

**E-mail: chechkin@mech.math.msu.su

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Имеет место следующая

Т е о р е м а. Если $f \in L_{2+\delta_0}(D)$, где $\delta_0 > 0$, то существуют положительные постоянные $\delta < \delta_0$ и C , зависящие только от δ_0 , такие, что для решения задачи (1) справедлива оценка

$$\int_D |\nabla u|^{2+\delta} dx \leq C \int_D |f|^{2+\delta} dx. \quad (2)$$

Доказательство. Ниже $B_r^{x_0}$ означает открытый круг радиуса r с центром в точке x_0 , $|B_r^{x_0}|$ — мера данного круга и полагается

$$\oint_{B_r^{x_0}} f dx = \frac{1}{|B_r^{x_0}|} \int_{B_r^{x_0}} f dx.$$

Продолжим решение u задачи (1) четно относительно оси абсцисс, оставив за продолжением предыдущее обозначение, и положим

$$\tilde{D} = \{(x, y): 0 < x < 1, -1 < y < 1\} \setminus \Gamma_2.$$

Продолженная функция u является решением задачи Дирихле

$$\Delta u = \operatorname{div} \tilde{f} \text{ в } \tilde{D}, \quad u = 0 \text{ на } \partial \tilde{D}, \quad (3)$$

где $\tilde{f} = f$ в D и $\tilde{f}(x, y) = (f_1(x, -y), -f_2(x, -y))$ в $\tilde{D} \setminus (D \cup \Gamma_2)$. Далее полагаем $u = 0$ и $\tilde{f} = 0$ вне области $\tilde{D}$. Ясно, что продолженная нулем функция u принадлежит соболевскому пространству $W_2^1(\mathbb{R}^2)$.

Следующий шаг — доказательство обратного неравенства Гёльдера для градиента u решения задачи (3), которое удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_D \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_D \tilde{f} \cdot \nabla \varphi dx \quad (4)$$

на всех пробных функциях $\varphi \in W_2^1(\tilde{D})$ с нулевым следом на $\partial \tilde{D}$.

Сначала рассмотрим случай, когда $B_{\frac{3R}{4}}^{x_0} \subset \tilde{D}$, и выберем в интегральном тождестве (4) пробную функцию $\varphi = (u - \lambda)\eta^2$, где

$$\lambda = \oint_{B_{\frac{3R}{4}}^{x_0}} u dx,$$

а срезающая функция $\eta \in C_0^\infty(B_{\frac{3R}{4}}^{x_0})$ такова, что $0 < \eta < 1$, $\eta = 1$ в $B_{\frac{R}{2}}^{x_0}$ и $|\nabla \eta| \leq \frac{3}{R}$. В результате получим

$$\begin{aligned} \int_{B_{\frac{3R}{4}}^{x_0}} |\nabla u|^2 \eta^2 dx &= -2 \int_{B_{\frac{3R}{4}}^{x_0}} \eta(u - \lambda) \nabla u \cdot \nabla \eta dx + \\ &+ \int_{B_{\frac{3R}{4}}^{x_0}} \eta^2 \tilde{f} \cdot \nabla u dx + 2 \int_{B_{\frac{3R}{4}}^{x_0}} \eta(u - \lambda) \tilde{f} \cdot \nabla \eta dx. \end{aligned}$$

Поскольку $0 \leq \eta \leq 1$, то в силу неравенства Коши

$$|\eta(u - \lambda) \nabla u \cdot \nabla \eta| \leq \frac{1}{8} |\nabla u|^2 \eta^2 + 4(u - \lambda)^2 |\nabla \eta|^2,$$

$$|\eta^2 \tilde{f} \cdot \nabla u| \leq \frac{1}{8} |\nabla u|^2 \eta^2 + 4|\tilde{f}|^2,$$

$$|\eta(u - \lambda) \tilde{f} \cdot \nabla \eta| \leq \frac{1}{8} |\tilde{f}|^2 + 4(u - \lambda)^2 |\nabla \eta|^2.$$

Таким образом,

$$\int_{B_{\frac{3R}{4}}^{x_0}} |\nabla u|^2 \eta^2 dx \leq C \left(\int_{B_{\frac{3R}{4}}^{x_0}} (u - \lambda)^2 |\nabla \eta|^2 dx + \int_{B_{\frac{3R}{4}}^{x_0}} |\tilde{f}|^2 dx \right).$$

В итоге, так как $\eta = 1$ в $B_{R/2}^{x_0}$ и $|\nabla \eta| \leq \frac{C}{R}$, то

$$\int_{B_{\frac{R}{2}}^{x_0}} |\nabla u|^2 dx \leq C \left(\frac{1}{R^2} \int_{B_{\frac{3R}{4}}^{x_0}} (u - \lambda)^2 dx + \int_{B_R^{x_0}} |\tilde{f}|^2 dx \right). \quad (5)$$

Далее воспользуемся неравенством Пуанкаре—Соболева (см., например, [7, теорема 5.6])

$$\left(\oint_{B_{\frac{3R}{4}}^{x_0}} (u - \lambda)^2 dx \right)^{1/2} \leq C(p) R \left(\oint_{B_{\frac{3R}{4}}^{x_0}} |\nabla u|^p dx \right)^{1/p},$$

где $p \in [1, 2]$. Для определенности считаем $p = \frac{3}{2}$ и из (5) вытекает

$$\begin{aligned} &\left(\oint_{B_{\frac{R}{2}}^{x_0}} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2} \leq \\ &\leq C(p) \left(\left(\oint_{B_R^{x_0}} |\nabla u|^{\frac{3}{2}} dx \right)^{2/3} + \left(\oint_{B_R^{x_0}} |\tilde{f}|^2 dx \right)^{1/2} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Пусть теперь x_0 принадлежит замыканию $\tilde{D}$ и $B_{\frac{3R}{4}}^{x_0} \cap \partial\tilde{D} \neq \emptyset$. Выберем в интегральном тождестве (4) пробную функцию $\varphi = u\eta^2$ с такой же срезающей функцией, что и ранее. В результате получаем оценку (5) с $\lambda = 0$, в силу которой

$$\int_{B_{\frac{R}{2}}^{x_0}} |\nabla u|^2 dx \leq C \left(\frac{1}{R^2} \int_{B_R^{x_0}} u^2 dx + \int_{B_R^{x_0}} |\tilde{f}|^2 dx \right). \quad (7)$$

Сначала рассмотрим случай, когда $B_{\frac{3R}{4}}^{x_0} \cap \Gamma_2 \neq \emptyset$. Поскольку функция u продолжена нулем вне области $\tilde{D}$, то отсюда с учетом структуры множества Γ_2 вытекает, что для линейной меры l_R тех точек пересечения $B_R^{x_0}$ с осью абсцисс, где $u = 0$, выполнено неравенство $l_R \geq CR$ с константой C , не зависящей от ε . Теперь из неравенства теоремы [8, § 10.1] и оценки предложения 4 [8, § 9.1] будем иметь

$$\left(\int_{B_R^{x_0}} u^2 dx \right)^{1/2} \leq C(p)R \left(\int_{B_R^{x_0}} |\nabla u|^2 dx \right)^{3/2}. \quad (8)$$

Осталось предположить, что $B_{\frac{3R}{4}}^{x_0} \cap (\partial\tilde{D} \setminus \Gamma_2) \neq \emptyset$. Тогда для двумерной меры Лебега L_R множества $B_R^{x_0} \cap (R^2 \setminus \tilde{D})$ справедлива оценка $L_R \geq CR^2$. Так как $u = 0$ вне $\tilde{D}$, то хорошо известно, что неравенство (8) выполнено и в этом случае.

Таким образом, в силу (7) и (8) вновь приходим к (6). Ясно, что оценка (6) выполнена и для кругов с центрами, лежащими вне $\tilde{D}$. Итак, соотношение (6) имеет место для любых кругов. Поскольку $|f| \in L_{2+\delta_0}(D)$ и мы пользовались продолжением, сохраняющим норму, то по модифицированной лемме Геринга (см. [9; 10, гл. VII]) получаем искомое неравенство (2). Теорема доказана.

Приведем простое следствие установленного результата, основанного на теореме вложения.

Следствие. Если выполнены условия теоремы, то решение задачи (1) непрерывно по Гёльдеру в замыкании области D с показателем Гёльдера, равным $\delta/(2+\delta)$, и нормой Гёльдера, зависящей только от постоянной C в оценке (2) и нормы f в $L_{2+\delta_0}(D)$.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В работе рассмотрена модельная область с периодическим чередованием типа краевых усло-

вий. Однако те же результаты могут быть получены и для произвольной плоской ограниченной области D с липшицевой границей. Чередование типа краевых условий может быть как локально периодическим, так и непериодическим, но при этом требуется выполнение следующего условия: если $x_0 \in \bar{D}$ и $B_{\frac{3R}{4}}^{x_0} \cap \Gamma_2 \neq \emptyset$, то для меры l_R пересечения $B_R^{x_0} \cap \Gamma_2$ должна быть выполнена оценка $l_R \geq CR$ с константой C , не зависящей от ε .

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Первый автор поддержан грантом РФФИ (проект 19-01-00184), второй автор — грантом РНФ (проект 20-11-20272).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боярский Б.В. Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами // Матем. сб. 1957. Т. 43(85). № 4. С. 451–503.
2. Meyers N.G. An L^p -estimate for the gradient of solutions of second order elliptic divergence equations // Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3-e serie. 1963. V. 17. № 3. P. 189–206.
3. Zhikov V.V. On some Variational Problems // Russian J. of Mathematical physics. 1997. V. 5. № 1. P. 105–116.
4. Чечкин Г.А. Усреднение краевых задач с сингулярным возмущением граничных условий // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 6. С. 99–150.
5. Борисов Д.И. Асимптотики и оценки собственных элементов лапласиана с частой непериодической сменой граничных условий // Известия РАН. Серия матем. 2003. Т. 67. № 6. С. 23–70.
6. Chechkina A.G., Sadovnichy V.A. Degeneration of Steklov Type Boundary Conditions in One Spectral Homogenization Problem // Eurasian Mathematical J. 2015. V. 6. № 3. P. 13–29.
7. Назаров А.И., Поборчий С.В. Неравенство Пуанкаре и его приложения. СПб: Изд-во СПбГУ, 2012.
8. Мазья В.Г. Пространства С.Л. Соболева. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.
9. Gehring F.W. The L^p -integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping // Acta Math. 1973. V. 130. P. 265–277.
10. Скрытник И.В. Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. М.: Наука, 1990.

INCREASED SUMMABILITY OF THE GRADIENT OF THE SOLUTION OF THE ZAREMBA PROBLEM FOR THE POISSON EQUATION

Yu. A. Alkhutov^a and G. A. Chechkin^{b,c,d}

^a *A.G. and N.G. Stoletov Vladimir State University, Vladimir, Russian Federation*

^b *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

^c *Institute of Mathematics with Computing Center — Subdivision of the Ufa Federal Research Center of Russian Academy of Science, Ufa, Russian Federation*

^d *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

In this paper, an estimate is obtained for the increased integrability of the gradient of the solution to the Zarembo problem in a plane bounded domain with a Lipschitz boundary and a fast change of the Dirichlet and Neumann boundary conditions, with an increased summability exponent, independent of the frequency of the boundary conditions change.

Keywords: the Meyers estimates, imbedding theorems, rapidly changing type of boundary conditions