ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 496, с. 16–20

МАТЕМАТИКА

УДК 517.968.72

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И РАЗРЕШИМОСТЬ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2021 г. В. В. Власов[1,*], Н. А. Раутиан[1,]**

Представлено академиком РАН В. А. Садовничим 10.11.2020 г.
Поступило 14.12.2020 г.
После доработки 13.01.2021 г.
Принято к публикации 18.01.2021 г.

Работа посвящена исследованию интегро-дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Изучаемые уравнения представляют собой абстрактные гиперболические уравнения, возмущенные слагаемыми, содержащими вольтерровы интегральные операторы. Эти уравнения являются операторными моделями интегро-дифференциальных уравнений с частными производными, возникающих в теории вязкоупругости, в теплофизике, в задачах усреднения в многофазных средах. Установлена корректная разрешимость указанных уравнений в весовых пространствах Соболева вектор-функций, а также проведен спектральный анализ оператор-функций, являющихся символами этих уравнений.

Ключевые слова: интегро-дифференциальные уравнения, оператор-функция, спектр, вольтерров оператор

DOI: 10.31857/S2686954321010173

Интегро-дифференциальные уравнения с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве могут быть реализованы как интегро-дифференциальные уравнения в частных производных, возникающие в теории вязкоупругости (см. [1–3]) а также как интегро-дифференциальные уравнения Гуртина–Пипкина (см. [4–7]), которые описывают процесс распространения тепла в средах с памятью с конечной скоростью, кроме того, указанные уравнения возникают в задачах усреднения в многофазных средах (закон Дарси) (см. [8]).

Перечисленные задачи можно объединить в достаточно широкий класс интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, поэтому более естественно рассматривать интегро-дифференциальные уравнения с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовых пространствах (абстрактные интегро-дифференциальные уравнения), которые могут быть реализованы как интегро-дифференциальные уравнения в частных производных.

В наших предшествующих работах [7, 9, 10] проводилось подробное исследование задачи (1), (2) в случае, когда ядра интегральных операторов $K(t)$ и $Q(t)$ представимы в виде рядов убывающих экспонент с положительными коэффициентами, а также в случае, когда оператор $B = 0$. Наш подход к исследованию основан на спектральном анализе оператор-функции $L(\lambda)$, являющейся символом уравнения (1), который также дает возможность получить результат о корректной разрешимости и представление решения указанной задачи в виде ряда по экспонентам, соответствующим точкам спектра оператор-функции $L(\lambda)$. Указанные результаты подытожены в главе 3 монографии [7].

ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, A — самосопряженный положительный оператор, $A^* = A \geq \kappa_0 I$ $(\kappa_0 > 0)$, действующий в пространстве H, имеющий ограниченный обратный. Пусть B — симметрический оператор, $(Bx, y) = (x, By)$, действующий в пространстве H с областью определения $Dom(B)$ $(Dom(A) \subseteq Dom(B))$, неотрицательный $(Bx, x) \geq 0$, для любых $x, y \in Dom(B)$ и удовлетворяющий неравенству $\|Bx\| \leq \kappa \|Ax\|$, $0 < \kappa < 1$ для любого $x \in Dom(A)$, I — тождественный оператор в пространстве H.

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия*

**E-mail: victor.vlasov@math.msu.ru*

***E-mail: nadezhda.rautian@math.msu.ru*

Рассмотрим следующую задачу для интегро-дифференциального уравнения второго порядка на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + Au(t) + Bu(t) - \int_0^t K(t-s)Au(s)ds - \\ - \int_0^t Q(t-s)Bu(s)ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

$$u(+0) = \varphi_0, \tag{2}$$

$$u^{(1)}(+0) = \varphi_1. \tag{3}$$

Предположим, что ядра интегральных операторов $K(t)$ и $Q(t)$ имеют следующее представление:

$$K(t) = \int_0^\infty e^{-t\tau}d\mu(\tau), \quad Q(t) = \int_0^\infty e^{-t\tau}d\eta(\tau), \tag{4}$$

где $d\mu$ и $d\eta$ – положительные меры, которым соответствуют возрастающие, непрерывные справа функции распределения μ и η, соответственно. Интеграл понимается в смысле Стилтьеса. Кроме того, будем считать, что выполнены условия

$$\int_0^\infty \frac{d\mu(\tau)}{\tau} < 1, \quad \int_0^\infty \frac{d\eta(\tau)}{\tau} < 1, \tag{5}$$

причем носители μ и η принадлежат полуоси $(d_0,+\infty)$, $d_0 > 0$. Условия (5) означают, что $K(t)$, $Q(t) \in L_1(\mathbb{R}_+)$, $\|K\|_{L_1} < 1, \|Q\|_{L_1} < 1$. Если к условиям (5) добавить также условия

$$K(0) = \int_0^\infty d\mu(\tau) \equiv \mathrm{Var}\mu|_0^\infty < +\infty, \\ Q(0) = \int_0^\infty d\eta(\tau) \equiv \mathrm{Var}\eta|_0^\infty < +\infty, \tag{6}$$

тогда ядра $K(t)$ и $Q(t)$ будут принадлежать пространству $W_1^1(\mathbb{R}_+)$.

Интегро-дифференциальное уравнение (1) представляет собой абстрактную форму динамического уравнения вязкоупругости (см. [1, 2]), где операторы A и B порождаются следующими дифференциальными выражениями:

$$A = -\rho^{-1}\mu\left(\Delta u + \mathrm{grad}(\mathrm{div}u)\right), \\ B = -\rho^{-1}\lambda \cdot \mathrm{grad}(\mathrm{div}u),$$

где $u = \mathbf{u}(x,t) \in \mathbb{R}^3$ – вектор перемещений вязкоупругой наследственной изотропной среды, среда заполняет ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, ρ – постоянная плотность, $\rho > 0$, коэффициенты Ламе λ и μ – положительные постоянные $R_k(s)$ релаксации, характеризующие наследственные свойства среды. На границе области Ω выполняется краевое условие Дирихле $u|_{\partial\Omega} = 0$. В качестве пространства H рассматривается пространство трехмерных вектор-функций $L_2(\Omega)$. Область определения $Dom(A)$ принадлежит векторному пространству Соболева $W_2^2(\Omega)$ и естественно выделяется краевым условием $u|_{\partial\Omega} = 0$.

Преобразование Лапласа сильного решения задачи (1), (2) с начальными условиями $u(+0) = 0$, $u^{(1)}(+0) = 0$ имеет следующее представление:

$$\hat{u}(\lambda) = L^{-1}(\lambda)\hat{f}(\lambda). \tag{7}$$

Здесь оператор-функция $L(\lambda)$ является символом уравнения (1) и имеет следующий вид:

$$L(\lambda) = \lambda^2 I + A + B - \hat{K}(\lambda)A - \hat{Q}(\lambda)B, \tag{8}$$

где $\hat{K}(\lambda)$ и $\hat{Q}(\lambda)$ – преобразования Лапласа ядер $K(t)$ и $Q(t)$, соответственно, имеющие представления

$$\hat{K}(\lambda) = \int_0^\infty \frac{d\mu(\tau)}{\lambda+\tau}, \quad \hat{Q}(\lambda) = \int_0^\infty \frac{d\eta(\tau)}{\lambda+\tau}, \tag{9}$$

$\hat{f}(\lambda)$ – преобразование Лапласа вектор-функции $f(t)$, I – тождественный оператор в пространстве H.

КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ

Согласно известному результату (теорема [14, с. 361]), оператор $A_0 := A + B$ является самосопряженным и положительным. Превратим область определения $Dom(A_0^\beta)$ оператора A_0^β, $\beta > 0$ в гильбертово пространство H_β, введя на $Dom(A_0^\beta)$ норму $\|\cdot\|_\beta = \|A_0^\beta \cdot\|$, эквивалентную норме графика оператора A_0^β.

Через $W_{2,\gamma}^n(\mathbb{R}_+, A_0)$ обозначим пространство Соболева вектор-функций на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$ со значениями в H, снабженное нормой

$$\|u\|_{W_{2,\gamma}^n(\mathbb{R}_+,A_0)} \equiv \left(\int_0^\infty e^{-2\gamma t}(\|u^{(n)}(t)\|_H^2 + \|A_0^{n/2}u(t)\|_H^2)dt\right)^{1/2}, \\ \gamma \geq 0.$$

Подробнее о пространствах $W_{2,\gamma}^n(\mathbb{R}_+, A_0)$, см. монографию [12, глава 1]. При $n = 0$ полагаем $W_{2,\gamma}^0(\mathbb{R}_+, A_0) \equiv L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, при $\gamma = 0$ будем писать $W_{2,0}^n = W_2^n$.

Определение 1. Будем называть вектор-функцию u *сильным решением задачи* (1)–(3), если она принадлежит пространству

$W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0)$, для некоторого $\gamma \geq 0$, удовлетворяет уравнению (1) почти всюду на полуоси $\mathbb{R}_+$ и начальному условию (2).

В нашей предшествующей работе [11] опубликована теорема о существовании и единственности сильного решения задачи (1)–(3).

Определение 2. Вектор-функцию $u(t) \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})$ назовем **обобщенным (слабым) решением задачи** (1)–(3), если $u(t)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$-\langle u^{(1)}(t), v^{(1)}(t)\rangle_{L_{2,\gamma}} +$$
$$+\langle (A+B)^{1/2}u(t), (A+B)^{1/2}v(t)\rangle_{L_{2,\gamma}} + 2\gamma\langle u^{(1)}(t), v(t)\rangle_{L_{2,\gamma}} -$$
$$-\left\langle \int_0^t K(t-s)(A+B)^{-1/2}Au(s)ds, (A+B)^{1/2}v(t)\right\rangle_{L_{2,\gamma}} -$$
$$-\left\langle \int_0^t Q(t-s)(A+B)^{-1/2}Bu(s)ds, (A+B)^{1/2}v(t)\right\rangle_{L_{2,\gamma}} -$$
$$-\langle f(t), v(t)\rangle_{L_{2,\gamma}} - \langle \varphi_1, v(0)\rangle = 0 \tag{10}$$

для любой вектор-функции $v(t) \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})$, а также условию (2).

Отметим, что по определению пространства $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})$ вектор-функции $u^{(1)}(t)$ и $A_0^{1/2}u(t)$ принадлежат пространству $L_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}_+, H)$, поскольку норма в этом пространстве определяется следующим образом:

$$\|u\|_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})} \equiv \left(\int_0^\infty e^{-2\gamma t}(\|u^{(1)}(t)\|^2_H + \|A_0^{1/2}u(t)\|^2_H)dt\right)^{1/2},$$
$$\gamma \geq 0.$$

Следующая теорема дает нам достаточное условие корректной разрешимости задачи (1)–(3) в смысле определения 2.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* (6), $f(t) \in L_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}_+, H)$ *для некоторого* $\gamma_0 \geq 0$, *векторы* $\varphi_0 \in H_{1/2}$, $\varphi_1 \in H$. *Тогда существует такое* $\gamma_1 \geq \gamma_0$, *что для любого* $\gamma > \gamma_1$ *задача* (1)–(3) *имеет обобщеное решение в пространстве* $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})$, *для которого справедлива следующая оценка*:

$$\|u\|_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})} \leq d\left(\|f(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \|A_0^{1/2}\varphi_0\|_H + \|\varphi_1\|_H\right), \tag{11}$$

где константа d не зависит от вектор-функции f и векторов φ_0, φ_1.

Доказательство теоремы 1 существенно опирается на теорему о существовании и единственности сильного решения задачи (1)–(3) (см. [11, теорема 1]) и следующую лемму.

Лемма 1. *При сделанных предположениях относительно операторов A и B справедливы неравенства*

$$\left\|A_0^{1/2}L^{-1}(\lambda)\right\| \leq \frac{\text{const}}{\text{Re}\lambda}, \tag{12}$$

$$\left\|\lambda L^{-1}(\lambda)\right\| \leq \frac{\text{const}}{\text{Re}\lambda}, \quad \text{Re}\lambda \geq \gamma > 0. \tag{13}$$

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Перейдем к изучению структуры спектра оператор-функции $L(\lambda)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (5), (6). *Тогда спектр оператор-функции $L(\lambda)$ лежит в открытой левой полуплоскости* $\{\lambda \in \mathbb{C}: \text{Re}\lambda < 0\}$.

Следующие теоремы 3 и 4 являются уточнением теорем 3 и 4 из нашей работы [11].

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (5), (6) *и носители мер* $\mu(\tau)$, $\nu(\tau)$ *принадлежат отрезку* $[d_1, d_2]$, *где* $(0 < d_1 < d_2 < +\infty)$. *Тогда для любого сколь угодно малого* $\theta_0 > 0$ *существует такое число* $R_0 > 0$, *что спектр оператор-функции $L(\lambda)$ принадлежит множеству*

$$\Omega = \{\lambda \in \mathbb{C}: \text{Re}\lambda < 0, |\lambda| < R_0\} \cup$$
$$\cup \{\lambda \in \mathbb{C}: \alpha_1 \leq \text{Re}\lambda \leq \alpha_2\},$$

где $\alpha_1 = \alpha_0 - \theta_0$, $R_0 \geq \max(d_2, -\alpha_0 + \theta_0)$,

$$\alpha_0 = -\frac{1}{2}\sup_{\|f\|=1}\frac{((K(0)A + Q(0)B)f, f)}{((A+B)f, f)},$$
$$f \in D(A).$$
$$\alpha_2 = -\frac{1}{2}\inf_{\|f\|=1}\frac{((K(0)A + Q(0)B)f, f)}{\left((A + B + d_2^2 I)f, f\right)} \tag{14}$$

При этом для оператор-функции $L^{-1}(\lambda)$ на множестве $\{\lambda: \text{Re}\lambda < -R_0\} \cup \{\lambda: \text{Re}\lambda > 0\}$ *справедлива оценка*

$$\left\|L^{-1}(\lambda)\right\| \leq \frac{\text{const}}{|\lambda||\text{Re}\lambda|}. \tag{15}$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда невещественная часть спектра оператор-функции $L(\lambda)$ симметрична относительно вещественной оси и состоит из собственных значений конечной алгебраической кратности, причем для любого* $\varepsilon > 0$ *в области* $\Omega_\varepsilon := \Omega \backslash \{\lambda \in \mathbb{C} : |\text{Im}\lambda| < \varepsilon\}$ *собственные значения являются изолированными, т.е. не имеют точек накопления.*

Замечание 1. Отметим, что оператор-функция вида (8) в случае, когда ядра интегральных операторов $K(t)$ и $Q(t)$ представимы в виде суммы конечного числа убывающих экспонент с положительными коэффициентами, изучалась

А.И. Милославским в работе [13]. Исследование оператор-функции вида (8) в случае, когда ядра интегральных операторов $K(t)$ и $Q(t)$ представимы в виде рядов убывающих экспонент с положительными коэффициентами, проводилось в работах [9, 10], соответствующие результаты содержатся также в монографии [7]. При этом в статье [10] получено обобщение некоторых результатов работы [13]. Теоремы 3, 4 представляют собой естественное развитие результатов, изложенных в монографии в [7], и обобщение соответствующих результатов, полученных в работе [13].

Обозначим через $N(\mu; L(\lambda))$ кратность характеристического числа $\lambda = \mu$ оператор-функции $L(\lambda)$. Введем $\nu(r;\Omega;L(\lambda))$ – функцию распределения характеристических чисел оператор-функции $L(\lambda)$. Предполагая $L(\lambda)$ аналитической оператор-функцией в области Ω, положим

$$\nu(r;\Omega;L(\lambda)) = \sum_{\mu\in\Omega,|\mu|<r} N(\mu;L(\lambda)),$$

Причем, если в области $\Omega \cap \{\lambda\colon |\lambda| < r\}$ лежит бесконечное число характеристических чисел $L(\lambda)$ либо $N(\mu;L(\lambda)) = \infty$ хотя бы в одной точке $\mu \in \Omega$ с $|\mu| < r$, то

$$\nu(r;\Omega;L(\lambda)) = \infty.$$

Обозначим область $\Psi_{\theta,\eta} = \{\lambda\colon |\lambda| > \eta, |\arg\lambda| < \theta\}$, $\pi/2 < \theta < \pi$, причем здесь $-\pi < \arg\lambda \le \pi$. В дальнейшем соотношение $\nu_1(t) \sim \nu_2(t)$ означает, что $\frac{\nu_1(t)}{\nu_2(t)} \to 1$ при $t \to \infty$.

Следуя [15], через $\Re$ обозначим множество таких неубывающих функций $\nu(r)$, определенных при достаточно больших вещественных r, что для каждой функции $\nu(r) \in \Re$ существует постоянная $a > 1$, для которой $\nu(ar) \ge 2\nu(r)$ при достаточно больших r. Пусть $\Im$ – множество неубывающих функций $\nu(r)$, обладающих свойством: для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$\nu(r + \delta r) \le (1 + \varepsilon)\nu(r).$$

Обозначим через $P(\lambda)$ оператор-функцию вида

$$P(\lambda) = \lambda^2 I + A + B.$$

Используя теорему 2.1 [15] и теорему 3, получаем следующий результат.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы* 3, $\nu(r;\Psi_{\theta,\eta};P(\lambda)) \in \Re \cap \Im$. *Тогда спектр оператор-функции* $L(\lambda)$ *в области* $\Psi_{\theta,\eta}$ *состоит из дискретных точек спектра и справедливо равенство*

$$\nu(r;\Psi_{\theta,\eta};P(\lambda)) \sim \nu(r;\Psi_{\theta,\eta};L(\lambda)).$$

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Теоремы 1 и 2 доказаны при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета “Математические методы анализа сложных систем”. Теоремы 3–5 доказаны при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 20-01-00288.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: “Наука”, 1970. 280 с.
2. *Christensen R.M.* Theory of viscoelasticity. An introduction. N.Y.; L.: Academic Press, 1971. 364 p.
3. *Amendola G., Fabrizio M., Golden J.M.* Thermodynamics of Materials with memory.Theory and applications. N.Y.; Dordrecht; Heidelberg; London: Springer, 2012. 576 p.
4. *Gurtin M.E., Pipkin A.C.* General theory of heat conduction with finite wave speed // Arch. Rat. Mech. Anal. 1968. V. 31. P. 113–126.
5. *Лыков А.В.* Тепломассообмен: (Справочник). 2-е изд., перераб. и доп. М.: Энергия, 1978. 480с.
6. *Eremenko A., Ivanov S.* Spectra of the Gurtin-Pipkin type equations // SIAM J. Math. Anal. 2011. V. 43. № 5. P. 2296–2306.
7. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. М.: МАКС Пресс, 2016. 488 с. ISBN 978-5-317-05443-4.
8. *Санче-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984. 472 с.
9. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ гиперболических вольтерровых интегродифференциальных уравнений // ДАН. 2015. Т. 464. № 6. С. 656–660.
10. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Корректная разрешимость и спектральный анализ интегродифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости // Современная математика. Фундаментальные направления. 2015. Т. 58. С. 22–42.
11. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Исследование вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости // ДАН. 2016. Т. 471. № 3. С. 259–262.
12. *Лионс Ж.П., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 371 с.
13. *Милославский А.И.* Спектральные свойства операторного пучка, возникающего в вязкоупругости // Деп. в Укр. НИИНТИ. 13.07.87. № 1229-УК87. Харьков, 1987. 53 с.
14. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.
15. *Радзиевский Г.В.* Асимптотика распределения характеристических чисел оператор-функций, аналитических в угле // Матем. сб. 1980. Т.112. № 3. С. 396–420.

SPECTRAL ANALYSIS AND SOLVABILITY OF VOLTERRA INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

V. V. Vlasov[a] and N. A. Rautian[a]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.A. Sadovnichii

The article is devoted to the study of integro-differential equations with unbounded operator coefficients in Hilbert space. The equations studied are abstract hyperbolic equations, perturbed by terms containing Volterra integral operators. These equations are operator models of integro-differential equations with partial derivatives arising in the theory of viscoelasticity, in thermophysics, in averaging problems in multiphase media. The correct solvability of the above equations in the weight Sobolev spaces of the vector-functions was established and a spectral analysis of the operator-functions that are the symbols of these equations was also carried out.

Keywords: integro-differential equations, operator-function, spectra, Volterra operator