ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 496, с. 10–15

МАТЕМАТИКА

УДК 517.927 + 517.984

ОБ ОСЦИЛЛЯЦИОННЫХ СВОЙСТВАХ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

© 2021 г. А. А. Владимиров[1,2,*], член-корреспондент РАН А. А. Шкаликов[2,3,]**

Поступило 10.01.2021 г.
После доработки 10.01.2021 г.
Принято к публикации 19.01.2021 г.

DOI: 10.31857/S2686954321010161

1. В этом сообщении мы приведем некоторые результаты и методы, позволяющие проследить связь между числом внутренних нулей решения самосопряженной граничной задачи четвертого порядка и (отрицательным) индексом инерции этой задачи. Хорошо известны классические результаты такого рода для задачи Штурма–Лиувилля (см., например, [1]), однако для задачи четвертого порядка ситуация является существенно более сложной.

Мы будем рассматривать граничную задачу

$$(py'')'' - (qy')' + ry = 0, \tag{1}$$

$$By^{\wedge} + Cy^{\vee} = 0, \tag{2}$$

где B и C – блочно-диагональные вещественные матрицы порядка 4:

$$B = \begin{pmatrix} B_0 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_0 & 0 \\ 0 & C_1 \end{pmatrix}, \quad B_k, C_k \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad k = 0,1, \tag{3}$$

удовлетворяющие уравнению

$$B^{-1}\operatorname{im} C = \mathbb{R}^4 \ominus \ker C, \tag{4}$$

где символ B^{-1} обозначает взятие полного прообраза. Здесь также использованы вспомогательные обозначения

$$y^{\wedge} \rightleftharpoons \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ y(1) \\ y'(1) \end{pmatrix}, \quad y^{\vee} \rightleftharpoons \begin{pmatrix} y^{[3]}(0) \\ y^{[2]}(0) \\ -y^{[3]}(1) \\ -y^{[2]}(1) \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$y^{[2]} \rightleftharpoons py'', \quad y^{[3]} \rightleftharpoons -\left(y^{[2]}\right)' + qy'. \tag{6}$$

Возможны три основные степени общности исследования задачи (1), (2). Первая отвечает случаю, когда $p \in C^2[0,1]$, $q \in C^1[0,1]$ и $r \in C[0,1]$, причем функция p положительна. Здесь уравнение (1) понимается непосредственным образом, а решение y ищется среди функций из соболевского пространства $W_2^4[0,1]$. Именно в такой постановке до сих пор нередко рассматриваются задачи четвертого порядка.

Вторая степень общности отвечает случаю, когда $p, p^{-1} \in L_\infty[0,1]$ и $q, r \in L_1[0,1]$, причем функция p по-прежнему положительна. Здесь уравнение (1) понимается как условная запись уравнения $-(y^{[3]})' + ry = 0$, решения которого ищутся в классе функций, подчиненных условиям

$$y, y', y^{[2]}, y^{[3]} \in AC[0,1] = W_1^1[0,1].$$

Такая трактовка также является классической и изложена в [2, § 15].

Наконец, третья степень общности возникает в ситуации, когда функции $p, p^{-1} \in L_\infty[0,1]$ положительны, а прочие коэффициенты представляют собой обобщенные функции $q \in W_2^{-1}[0,1]$ и $r \in W_2^{-2}[0, 1]$. Здесь символом $W_2^{-k}[0,1]$, где $k = 1$, 2, обозначено пространство ограниченных линейных функционалов, действующих на соболевском пространстве $W_2^k[0,1]$. В этом случае, следуя [3], вводим в рассмотрение пространство

$$W_{2,B,C}^2[0,1] \rightleftharpoons \{y \in W_2^2[0,1]\colon By^{\wedge} \in \operatorname{im} C\}$$

[1] *Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Российской академии наук Федерального исследовательского центра “Информатика и управление” Российской академии наук, Москва, Россия*
[2] *Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[3] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: vladimirov@shkal.math.msu.su*
***E-mail: ashkaliko@yandex.ru*

и понимаем под решением задачи (1), (2) функцию $y \in W^2_{2,B,C}[0,1]$, удовлетворяющую тождеству

$$(\forall z \in W^2_{2,B,C}[0,1])$$
$$\int_0^1 py''z''\,dx + \langle q, y'z'\rangle + \langle r, yz\rangle + \langle \xi, z^\wedge\rangle_{\mathbb{R}^4} = 0. \quad (7)$$

Здесь $\xi \in \mathbb{R}^4$ – произвольно фиксированный вектор со свойством $C\xi = -By^\wedge$, где столбец $y^\wedge$ определен согласно (5). При этом слагаемые в (7) определены корректно, так как $y'z' \in W_2^1[0,\ 1]$ и $yz \in W_2^2[0,\ 1]$ для всех $y, z \in W^2_{2,B,C}[0,1]$. Можно показать, что в случае достаточной гладкости функций p, q и r такое понимание совпадает с указанными выше классическими определениями.

На языке теории операторов сказанное означает, что задаче (1), (2) ставится в соответствие оператор T: $W^2_{2,B,C}[0,1] \to W^{-2}_{2,B,C}[0,1]$, который всякую функцию $y \in W^2_{2,B,C}[0,1]$ переводит в ограниченный линейный функционал $Ty \in W^{-2}_{2,B,C}[0,1]$, действие которого на произвольную функцию $z \in W^2_{2,B,C}[0,1]$ задается правилом

$$\langle Ty, z\rangle \rightleftharpoons \int_0^1 py''z''\,dx + \\ + \langle q, y'z'\rangle + \langle r, yz\rangle + \langle \xi, z^\wedge\rangle_{\mathbb{R}^4}. \quad (8)$$

Здесь, как и ранее, $C\xi = -By^\wedge$, причем в силу условия (4) действие оператора T не зависит от выбора вектора ξ. Решениями задачи (1), (2) при этом являются в точности элементы ядра оператора T.

Отметим, что указанное общее понимание граничных задач четвертого порядка восходит к трактовкам граничных задач второго порядка, предложенным в работах [4, 5]. Далее задачу (1), (2) мы будем понимать в максимально общем, третьем смысле. Как следует из сказанного ранее, при этом все результаты оказываются справедливыми и для более узких классических постановок.

В дальнейшем рассматриваемые пространства предполагаем вещественными, а определенный равенством (8) оператор T предполагаем симметрическим, т.е., удовлетворяющим равенству $\langle Ty, z\rangle = \langle Tz, y\rangle$ для всех $y, z \in W^2_{2,B,C}[0,1]$. Оператор T будем называть положительным (либо неотрицательным), если при любом выборе не обращающейся тождественно в нуль функции $y \in W^2_{2,B,C}[0,\ 1]$ выполняется неравенство $\langle Ty, y\rangle > 0$ (либо $\langle Ty, y\rangle \ge 0$). Индексом инерции оператора T мы, как обычно (см., например, [6]), называем максимальную из размерностей подпространств $\mathfrak{M} \subset W^2_{2,B,C}[0,1]$, удовлетворяющих условию

$$(\forall y \in \mathfrak{M}\backslash\{0\}) \quad \langle Ty, y\rangle < 0.$$

2. В этом разделе мы рассмотрим вспомогательную задачу, отвечающую случаю $q \equiv 0$ и $r \le 0$. Последнее неравенство в случае сингулярности функции $r \in W_2^{-2}[0,1]$ означает, что для всякой неотрицательной функции $y \in W_2^2[0,1]$ выполняется неравенство $\langle r, y\rangle \le 0$. Нетрудно показать, что в этом случае существует неубывающая функция $R \in L_\infty[0,1]$, подчиняющаяся тождеству

$$(\forall y \in W_2^2[0,1]) \quad \langle r, y\rangle = \int_0^1 Ry'\,dx - (Ry)\big|_0^1.$$

Мы выделим класс граничных условий вида (2), характеризуемый следующими двумя предположениями:

А. Никакой набор вещественных чисел $a_0 > 0$, $a_1 < 0$, $a_2 > 0$ и $a_3 > 0$ не может удовлетворять равенству

$$B_0 \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} + C_0 \cdot \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Б. Никакой набор вещественных чисел $b_0 > 0$, $b_1 > 0$, $b_2 > 0$ и $b_3 < 0$ не может удовлетворять равенству

$$B_1 \cdot \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} - C_1 \cdot \begin{pmatrix} b_3 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Имеет место следующий результат.

Теорема 1. *Пусть* $q \equiv 0$ *и* $r \le 0$, *причем соответствующая функция* $R \in L_\infty[0,1]$ *непостоянна в окрестности точек* 0 *и* 1. *Пусть также граничные условия* (2) *удовлетворяют предположениям* А *и* Б. *Тогда пространство решений задачи имеет размерность не выше* 1. *При этом для всякого нетривиального решения* $y \in W^2_{2,B,C}[0,1]$ *ни в одной точке* $x \in (0,\ 1)$ *не может выполняться пара равенств* $y(x) = y'(x) = 0$, *а также пара равенств* $y'(x) = (py'')(x) = 0$.

3. Одним из основных понятий общей теории осцилляции является понятие ядра Келлога (см., например, [7, Гл. IV, § 3, Теорема 1] или [8]). В случае положительно определенных задач четвертого порядка с распадающимися граничными условиями известно [9], что функция Грина $K(x,s) \rightleftharpoons \langle \boldsymbol{\delta}_x, T^{-1}\boldsymbol{\delta}_s\rangle$ соответствующего оператора является ядром Келлога в том и только том случае, когда она положительна на открытом квадрате $(0,\ 1) \times (0,\ 1)$. Используя этот факт и привлекая общие результаты об интегральных уравнениях с

ядрами Келлога [7, Гл. IV, § 3, Теоремы 1, 2], получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть оператор T определен согласно* (8), *а* $H\colon W^2_{2,B,C}[0,1] \to W^{-2}_{2,B,C}[0,1]$ — *оператор умножения на некоторую положительную*[1] *обобщенную функцию* $h \in W_2^{-2}[0,1]$. *Пусть оператор* $T + H\colon W^2_{2,B,C}[0,1] \to W^{-2}_{2,B,C}[0,1]$ *при этом также положителен, а для всех точек* $x, s \in (0,1)$ *справедливы оценки* $\langle \boldsymbol{\delta}_x, (T + H)^{-1}\boldsymbol{\delta}_s\rangle > 0$. *Тогда размерность ядра оператора T не превосходит* 1, *а число перемен знака всякой нетривиальной функции из указанного ядра совпадает с индексом инерции оператора T.*

В общей ситуации проверка положительности функции Грина дифференциального оператора четвертого порядка представляет собой нетривиальную задачу. Для многих целей, однако, оказывается достаточным решение этого вопроса в случае $q \equiv 0$, $r \equiv 0$.

Теорема 3. *Пусть $q \equiv 0$ и $r \equiv 0$, граничные условия* (2) *подчинены условиям А и Б, а соответствующий оператор* $T\colon W^2_{2,B,C}[0,1] \to W^{-2}_{2,B,C}[0,1]$ *положителен. Тогда функция Грина* $K(x,s) \rightleftharpoons \langle \boldsymbol{\delta}_x, T^{-1}\boldsymbol{\delta}_s\rangle$ *положительна на квадрате* (0, 1) × (0, 1).

4. В случае, когда функция $h \in W_2^{-2}[0,1]$ не является положительной, утверждение теоремы 2, вообще говоря, теряет силу. Поэтому в ряде конкретных задач оказывается полезной комбинация теоремы 1 с некоторыми более широкими, нежели теорема 2, результатами об операторах, не понижающих числа перемен знака функций. Эти результаты и будут указаны в настоящем разделе.

Рассмотрим следующую ситуацию. Пусть $H\colon W^2_{2,B,C}[0,1] \to W^{-2}_{2,B,C}[0,1]$ — неотрицательный вполне непрерывный оператор, для которого соответствующий оператор $T + H$ положителен. Последовательности сосчитанных с учетом кратности собственных значений $-1 < \lambda_0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots$ линейного пучка $\lambda \mapsto T - \lambda H$ отвечает при этом некоторая последовательность $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ собственных функций. Пусть также задан некий ограниченный и ограниченно обратимый оператор $I\colon \mathfrak{H} \to W^2_{2,B,C}[0,1]$, где $\mathfrak{H}$ — некое гильбертово пространство, непрерывно вложенное в $C[0,1]$. Имеет место следующий результат.

Теорема 4. *Пусть оператор* $I^{-1}(T + H)^{-1}HI\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ *не повышает число перемен знака никакой функции, и пусть справедливы следующие предположения*:

(1) *Все неотрицательные собственные значения пучка* $\lambda \mapsto T - \lambda H$ *являются простыми.*

(2) *При любом* $m \in \mathbb{N}$ *со свойством* $\lambda_m \ge 0$ *внутри линейной оболочки набора* $\{f_k\}_{k=0}^{m}$ *найдется такая окрестность U функции f_m, что для любой функции $y \in U$ число перемен знака функции $I^{-1}y$ не превосходит таковое для функции $I^{-1}f_m$.*

(3) *При* $m \in \mathbb{N}$ *со свойством* $\lambda_m = 0$ *найдется подпространство* $\mathfrak{M} \subset W^2_{2,B,C}[0,1]$ *размерности* $m + 1$, *имеющее тривиальное пересечение с ядром оператора H и такое, что для любой функции* $y \in \mathfrak{M}$ *соответствующая функция $I^{-1}y$ имеет не более m перемен знака.*

Тогда для всякой нетривиальной функции $y \in \ker T$ *число перемен знака соответствующей функции* $I^{-1}y \in \mathfrak{H}$ *совпадает с индексом инерции оператора T.*

Кроме тривиального случая, когда оператор $I\colon W^2_{2,B,C}[0,1] \to W^2_{2,B,C}[0,1]$ представляет собой отображение тождества, типичными являются следующие две ситуации:

(1) Оператор I осуществляет замену переменной $[Iu](x) \equiv u(\tau(x))$, где функция $\tau \in W_2^2[0,1]$ имеет всюду положительную производную. Роль пространства $\mathfrak{H}$ при этом играет некоторое подпространство соболевского пространства $W_2^2[0,1]$.

(2) Пространство $W^2_{2,B,C}[0,1]$ не содержит нетривиальных постоянных функций, а оператор I^{-1} является оператором дифференцирования. Роль пространства $\mathfrak{H}$ при этом играет некоторое подпространство соболевского пространства $W_2^1[0,1]$.

Первая из указанных ситуаций возникает, в частности, в ходе проведения стандартной (см., например, [10, 11, 6, 12]) процедуры устранения второго слагаемого левой части уравнения (1). А именно, пусть существует имеющая всюду положительную производную функция $\tau \in W_2^2[0,1]$ со свойствами $\tau(0) = 0$, $\tau(1) = 1$ и

$$(\forall y \in W_2^1[0,1])$$

$$\int_0^1 p\tau'' y'\,dx + \langle q, \tau' y\rangle = \gamma_0 \cdot y(0) + \gamma_1 \cdot y(1),$$

где $\gamma_0, \gamma_1 \in \mathbb{R}$ — некоторые постоянные. Определим оператор $I\colon \mathfrak{H} \to W^2_{2,B,C}[0,1]$ как действующий согласно правилу $[Iu](x) \equiv u(\tau(x))$. Непосредственное вычисление показывает, что в таком случае опе-

[1] Обобщенная функция $h \in W_2^{-2}[0,1]$ считается положительной, если для всякой не равной нулю тождественно неотрицательной пробной функции $y \in W_2^2[0,1]$ выполняется неравенство $\langle h, y\rangle > 0$.

ратор $I^*TI\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}^*$ будет отвечать граничной задаче

$$(\hat{p}y'')'' + \hat{r}y = 0, \quad \hat{B}y^\wedge + \hat{C}y^\vee = 0,$$

где $\hat{p} \circ \tau = p \cdot (\tau')^3$ и $\hat{r} \circ \tau = r \cdot (\tau')^{-1}$, а также

$$\hat{B} = B \cdot \operatorname{diag}\{1, \tau'(0), 1, \tau'(1)\} - C \cdot \operatorname{diag}\{0, \gamma_0, 0, \gamma_1\},$$
$$\hat{C} = C \cdot \operatorname{diag}\{1, (\tau'(0))^{-1}, 1, (\tau'(1))^{-1}\}.$$

В качестве пространства $\mathfrak{H}$ в этом случае выступает $\mathfrak{H} = W^2_{2,\hat{B},\hat{C}}[0,1] \subseteq W^2_2[0,1]$.

Применительно ко второй из указанных выше ситуаций полезен следующий результат (ср. [12]).

Теорема 5. *Пусть для любой функции* $y \in W^2_{2,B,C}[0,1]$ *выполнено равенство* $y(0) = 0$, *оператор* $I^{-1}\colon W^2_{2,B,C}[0,1] \to \mathfrak{H}$ *есть оператор дифференцирования, а оператор* $H\colon W^2_{2,B,C}[0,1] \to W^{-2}_{2,B,C}[0,1]$ *действует согласно правилу*

$$(\forall y, z \in W^2_{2,B,C}[0,1])$$
$$\langle Hy, z\rangle = \langle h, yz\rangle + \alpha_0 \cdot (y'z')(0) + \alpha_1 \cdot (y'z')(1),$$

где $\alpha_0, \alpha_1 \geq 0$, *а обобщенная функция* $h \in W_2^{-2}[0,1]$ *неотрицательна. Пусть также оператор* $I^*(T+H)I\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ *представляет собой положительно определенный оператор Штурма–Лиувилля. Тогда оператор* $I^{-1}(T+H)^{-1}HI\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ *не повышает число перемен знака никакой функции.*

5. В качестве первого примера рассмотрим спектральную задачу

$$(py'')'' - (qy')' + [r - \lambda\varrho]y = 0,$$
$$\begin{pmatrix} 0 & -c_1 & 0 & 0 \\ 1 & -c_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 1 & d_0 \end{pmatrix} y^\wedge + \begin{pmatrix} c_0 & 1 & 0 & 0 \\ -c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_0 & -1 \\ 0 & 0 & -d_2 & 0 \end{pmatrix} y^\vee = 0,$$

являвшуюся предметом изучения в работе [13], где предполагались обычные условия на коэффициенты: $0 < p \in C^2[0,1]$, $0 \leq q \in C^1[0,1]$, $r \in C[0,1]$ и $0 < \varrho \in C[0,1]$. Коэффициенты c_k и d_k, где $k = 0, 1, 2$, при этом также предполагались неотрицательными.

Ввиду неотрицательности функции $q \in C[0,1]$, описанное в разделе 4 преобразование замены переменной $I\colon W^2_{2,\hat{B},\hat{C}}[0,1] \to W^2_{2,B,C}[0,1]$ приводит к задаче

$$(\hat{p}y'')'' + [\hat{r} - \lambda\hat{\varrho}]y = 0,$$
$$\begin{pmatrix} 0 & -c_1\tau'(0) - \gamma_0 & 0 & 0 \\ 1 & -c_0\tau'(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_1\tau'(1) + \gamma_1 \\ 0 & 0 & 1 & d_0\tau'(1) \end{pmatrix} y^\wedge +$$
$$+ \begin{pmatrix} c_0 & (\tau'(0))^{-1} & 0 & 0 \\ -c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_0 & -(\tau'(1))^{-1} \\ 0 & 0 & -d_2 & 0 \end{pmatrix} y^\vee = 0$$

с некоторыми коэффициентами $\gamma_0, \gamma_1 \geq 0$. Из теоремы 1 теперь немедленно следует, что все собственные значения $\lambda \in \mathbb{R}$, при которых функция $\lambda\varrho - r$ положительна, являются простыми, а соответствующие им собственные функции имеют внутри интервала $(0,1)$ только простые нули. Из теорем 2 и 3 при выборе $\hat{h} \rightleftharpoons \lambda\hat{\varrho} - \hat{r}$ также следует, что количество этих нулей совпадает с индексом инерции задачи. Эти результаты при указанных выше условиях гладкости коэффициентов и получены в указанной работе [13]. Помимо нового метода доказательства этого результата, приведенные выше теоремы дают возможность распространить его на случай сингулярных коэффициентов.

В качестве второго, более сложного примера рассмотрим спектральную задачу

$$y^{(4)} - (qy')' - \lambda y = 0,$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a\lambda + b \end{pmatrix} y^\wedge +$$
$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c\lambda - d \end{pmatrix} y^\vee = 0,$$

являвшуюся предметом изучения в работе [14], где предполагалась неотрицательность функции $q \in C^1[0,1]$, а также выполнение соотношений $\omega \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ и $\sigma \rightleftharpoons bc - ad > 0$. Применяя преобразование замены переменной из раздела 4, приходим к задаче

$$(\hat{p}y'')'' - \lambda\hat{r}y = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta\cdot(a\lambda+b)+\eta\cdot(c\lambda+d) \end{pmatrix} y^{\wedge} + \\ + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c\lambda-d \end{pmatrix} y^{\vee} = 0$$

с некоторыми коэффициентами $\theta > 0$ и $\eta \geq 0$. Теорема 1 при этом автоматически гарантирует простоту любого положительного собственного значения задачи. Положим теперь

$$\hat{h} \rightleftharpoons \begin{cases} \lambda\hat{r} & \text{при} \quad \omega = \pi, \\ \lambda\hat{r} - (\operatorname{ctg}\omega)\cdot\boldsymbol{\delta}_1 & \text{при} \quad \omega \neq \pi, \end{cases}$$

где $\boldsymbol{\delta}_1$ – дельта-функция с носителем в точке 1. В случае выполнения равенства $c\lambda + d = 0$ либо неравенства $(a\lambda + b)\cdot(c\lambda + d)^{-1} \geq -\eta\theta^{-1}$ из теорем 2 и 3 немедленно получаем факт совпадения количества нулей собственной функции на интервале (0, 1) с индексом инерции задачи.

В случае выполнения неравенства $(a\lambda + b)\cdot$ $\cdot(c\lambda + d)^{-1} < -\eta\theta^{-1}$ проведению указанной процедуры может помешать возможность для получаемого оператора $\hat{T} + \hat{H}$ не быть положительным. Поэтому в данном случае следует положить

$$\langle \hat{H}y, z\rangle \rightleftharpoons \\ \rightleftharpoons \begin{cases} \langle\lambda\hat{r}, yz\rangle - \left[\eta + \theta\cdot\dfrac{a\lambda+b}{c\lambda+d}\right]\cdot(y'z')(1) \\ \text{при} \quad \omega = \pi, \\ \langle\lambda\hat{r} - (\omega)\cdot\boldsymbol{\delta}_1, yz\rangle - \left[\eta + \theta\cdot\dfrac{a\lambda+b}{c\lambda+d}\right]\cdot(y'z')(1) \\ \text{при} \quad \omega \neq \pi. \end{cases}$$

При $\omega = \pi$ такой оператор $\hat{H}$ не повышает числа перемен знака никакой функции, что позволяет воспользоваться утверждением теоремы 4. При $\omega \neq \pi$ следует выбрать на роль оператора $\hat{I}: \mathfrak{H} \to W^2_{2,\hat{B},\hat{C}}[0, 1]$ оператор интегрирования и воспользоваться теоремами 5 и 4. В этом случае с индексом инерции задачи совпадет число внутренних нулей производной $y' \in W_2^1[0,1]$ собственной функции. Число же нулей самой собственной функции либо также совпадет с индексом инерции, либо будет меньшим его на 1, в зависимости от знака величины $y(1)y'(1)$.

Следует отметить, что теорема 2.2 работы [14], в которой излагаются результаты для рассматриваемого примера, содержит неточности. А именно, согласно этой теореме, количество положительных собственных значений, для которых число нулей соответствующих собственных функций отлично от индекса инерции, в случае $(a/c) \geq 0$ не может превосходить 2. В действительности же это не так. Например, спектральная задача

$$y^{(4)} - \lambda y = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^9 \end{pmatrix} y^{\wedge} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda + 10^6 \end{pmatrix} y^{\vee} = 0$$

имеет левее точки $\lambda = 10^6$ десять таких собственных значений. Это проверяется непосредственным анализом поведения решения

$$y(x,\lambda) = (\operatorname{sh}\sqrt[4]{\lambda} - \sin\sqrt[4]{\lambda})(\operatorname{sh}\sqrt[4]{\lambda}x - \sin\sqrt[4]{\lambda}x) - \\ - (\operatorname{ch}\sqrt[4]{\lambda} + \cos\sqrt[4]{\lambda})(\operatorname{ch}\sqrt[4]{\lambda}x - \cos\sqrt[4]{\lambda}x)$$

граничной задачи

$$y^{(4)} - \lambda y = 0, \quad y(0) = y'(0) = y'''(1) = 0$$

в зависимости от параметра $\lambda \in (0, 10^6)$.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование поддержано Российским фондом фундаментальных исследований, грант 19-01-00240.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рофе-Бекетов Ф.С., Холькин А.М.* Спектральный анализ дифференциальных операторов. Связь спектральных и осцилляционных свойств. Мариуполь, 2001. 331 стр.
2. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 стр.
3. *Владимиров А.А.* // Матем. заметки. 2004. Т. 75. № 6. С. 941–943.
4. *Нейман-заде М.И., Шкаликов А.А.* // Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 5. С. 723–733.
5. *Савчук А.М., Шкаликов А.А.* // Труды ММО. 2003. Т. 64. С. 159–212.
6. *Бен Амара Ж., Владимиров А.А., Шкаликов А.А.* // Матем. заметки. 2013. Т. 94. № 1. С. 55–67.
7. *Гантмахер Ф.Р., Крейн М.Г.* Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. М.–Л.: ГИТТЛ, 1950. 359 с.
8. *Боровских А.В., Покорный Ю.В.* // Успехи матем. наук. 1994. Т. 49. № 3. С. 3–42.
9. *Владимиров А.А.* // Матем. заметки. 2016. Т. 100. № 6. С. 800–806.
10. *Leighton W., Nehari Z.* // Trans. Amer. Math. Soc. 1958. V. 89. P. 325–377.
11. *Бен Амара Ж., Владимиров А.А.* // Фунд. и прикл. матем. 2006. Т. 12. № 4. С. 41–52.
12. *Владимиров А.А., Карулина Е.С.* // Матем. заметки. 2019. Т. 106. № 6. С. 854–859.
13. *Керимов Н.Б., Алиев З.С., Агаев Э.А.* // Докл. Акад. наук. 2012. Т. 444. № 3. С. 250–252.
14. *Aliev Z.* // Cent. Eur. J. Math. 2010. V. 8. № 2. P. 378–388.

ON OSCILLATORY PROPERTIES OF SELF-ADJOINT BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF THE FORTH ORDER

A. A. Vladimirov[a,b] **and Corresponding Member of the RAS A. A. Shkalikov**[b,c]

[a] *A.A Dorodnizin Computer Center of the Russian Academy of Sciences, Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

[b] *Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

[c] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

In this paper, we study the problem on the connection of the number of internal zeros of non-trivial solutions of the fourth order self-adjoint boundary value problem with the inertia index of the problem. We specify the types of problems for which such a connection can be established. In addition, we specify the types of problems for which a connection between the inertia index and the number of internal zeros of the derivatives of non-trivial solutions can be established. Examples demonstrating the effectiveness of the proposed new approach to the oscillatory problem are considered.

Keywords: boundary value problems for ordinary differential equations, spectral and oscillatory problems, the inertia index, Kellogg kernels