

УДК 517.938.5

СИЛОВЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ БИЛЛИАРДЫ И БИЛЛИАРДНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ СЛУЧАЯ ЭЙЛЕРА И СЛУЧАЯ ЛАГРАНЖА

© 2021 г. В. В. Ведюшкина^{1,*}, академик РАН А. Т. Фоменко^{1,**}

Поступило 23.01.2021 г.

После доработки 23.01.2021 г.

Принято к публикации 26.01.2021 г.

Обнаружен класс силовых эволюционных бильярдных систем, реализующих, оказывается, важные интегрируемые гамильтоновы системы сразу на всех регулярных изоэнергетических 3-поверхностях одновременно, т.е. на фазовом 4-пространстве. Доказано, что известные интегрируемые системы Эйлера и Лагранжа бильярдно эквивалентны, хотя обладают интегралами разных степеней — квадратичным и линейным.

Ключевые слова: интегрируемая система, бильярд, бильярдная книжка, лиувиллева эквивалентность, инвариант Фоменко–Цишанга, эволюционные силовые бильярды, динамика твердого тела

DOI: 10.31857/S268695432101015X

Неоднократно возникал общий вопрос: можно ли реализовать интегрируемую гамильтонову систему с двумя степенями свободы (ИГС) с помощью одной бильярдной системы сразу на всем фазовом 4-многообразии M^4 ?

Как известно, многие ИГС из механики и физики и их аналоги на алгебрах Ли ранее удалось охарактеризовать “кодом” — инвариантами Фоменко–Цишанга [1] слоеных Лиувилля системы в ограничении на упорядоченный (по возрастанию энергии H) набор изоэнергетических 3-поверхностей Q^3 , представляющих регулярные зоны энергии системы (см. [1–3]).

Такие системы были затем реализованы с помощью нескольких бильярдных систем (см. [4–6]): для регулярной зоны энергии системы (любой Q^3 из нее) подбирались свой бильярд с таким же инвариантом Фоменко–Цишанга. Так, для геодезических потоков римановых метрик (например, на кониках [7]) и для введенных В.В. Ведюшкиной бильярдных систем на CW -комплексах (бильярдных книжек [8] и топологических бильярдных систем [9]) энергия частицы $H = |v|^2$ являлась лишь масштабным параметром. Эти классы оказались важны для приложений.

Добавление к бильярду или геодезическому потоку на 2-поверхности потенциала, делаая не-

тривиальной зависимость топологии слоения от энергии, меняет не только “код” системы, но и ее инварианты, чисто четырехмерные инварианты. Среди них — топологию ее 4-особенностей. Многие ИГС содержат 4-особенности, как невырожденные (классифицированы Н.Т. Зунгом, см. [1]), так и вырожденные (см. [10] для параболических особенностей). Их изучение — отдельная непростая тема. Инварианты систем с потенциалами изучались в [11–13]. В то же время добавление потенциала, например, к локально евклидовому бильярду, усложняет траектории материальной частицы — они перестают быть прямолинейными. Мы же хотим реализовать ИГС бильярдами с классическим движением частицы по геодезическим.

Требуется найти класс локально плоских бильярдных систем, подходящий для реализации “кода” ИГС, т.е. топологии ее слоений Лиувилля (замканий ее решений) во всех регулярных зонах энергии, причем не вводя потенциалы и без дополнительных условий на четырехмерную топологию системы.

Ответ оказался положительным: А.Т. Фоменко предложил новый класс бильярдных систем — силовые (или эволюционные) бильярды. В них с изменением скорости шара (“силы” удара о стенку-границу) может меняться как топология бильярдного стола, так и закон отражения шара. Следующие определения введены А.Т. Фоменко.

Определение 1. Носителем силового бильярда назовем конечный связный двумерный локально-плоский (с евклидовой метрикой внутри 2-клеток) клеточный комплекс X . Его 2-листы L_i гомеоморфны замкнутому односвяз-

¹Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: arinir@yandex.ru

**E-mail: atfomenko@mail.ru

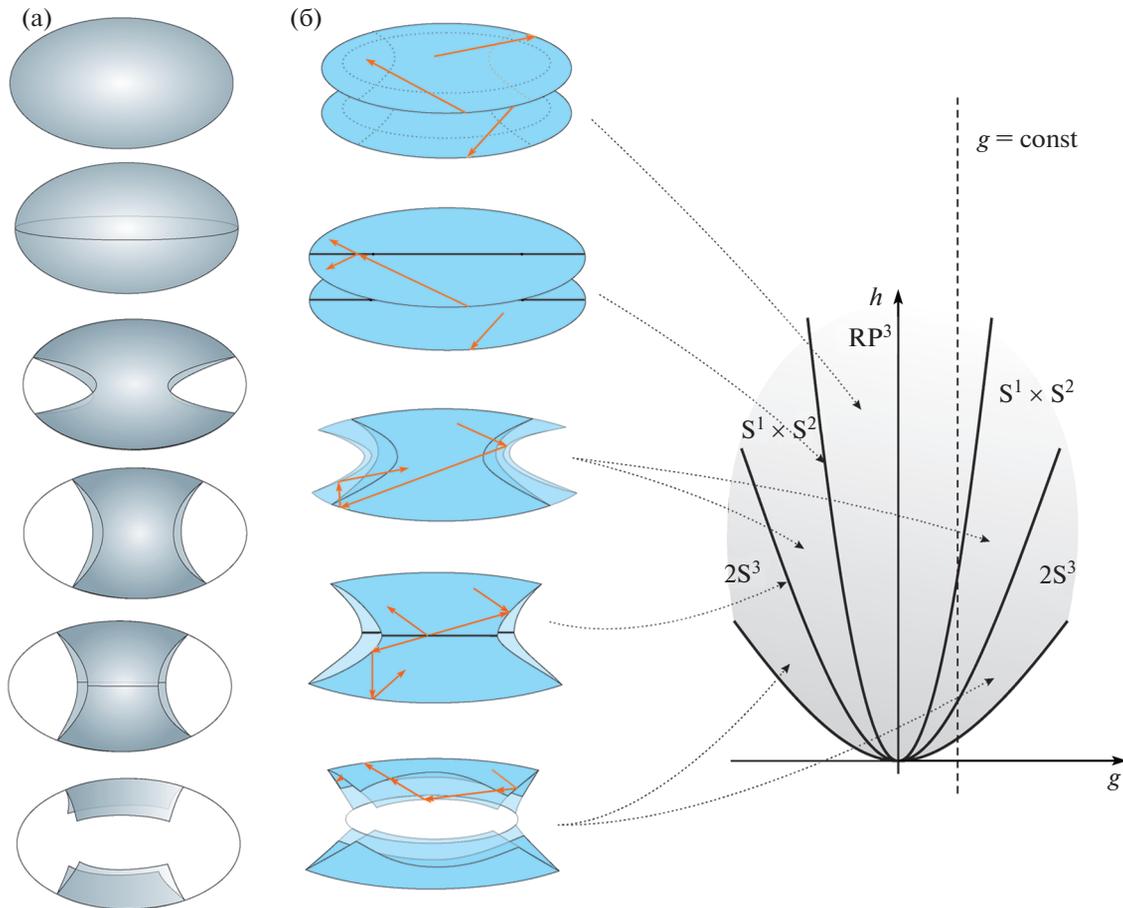


Рис. 1. Реализация случая Эйлера силовых билиардов: а – состояния силового билиарда как подмножества эллипсоида, б – состояния силового билиарда как плоские области и бифуркационная диаграмма интеграла площадей и энергии системы Эйлера.

ным областям R^2 и ограничены кусочно-гладкой кривой. Ее углы излома равны $\pi/2$. Склейка нескольких 2-листов происходит по изометрии их общей гладкой граничной дуги (корешка книжки).

Определение 2. Для каждого значения параметра-энергии $H = h \geq 0$ рассмотрим в носителе X замкнутый подкомплекс $X(h)$, возможно не связный. Назовем его состоянием силового билиарда, отвечающим значению h . При этом $X(h_1) \subseteq X(h_2)$ для любых $h_1 < h_2$ и $X = \cup X(h)$ по всем h . Тем самым с ростом h состояние $X(h)$ “разрастается”. На рис. 1а состояния силового билиарда изображены как подмножества эллипсоида E^2 .

Определение 3. Конечное количество значений $h = 1, \dots, N$ энергии H , при которых меняется топология стола или закон отражения–преломления на ребрах границы, назовем особыми (сингулярными), а остальные – регулярными. Напомним, что 1-ребрами (корешками) билиарда $X(h)$ являются дуги софокусных квадрик- или концентрических окружностей.

На рис. 1б особые значения 1 и 2 энергии соответствуют двум переходам (между состояниями).

Определение 4. Закон отражения–преломления на ребре-корешке r в состоянии $X(h)$ обозначим через $Z(h, r)$. Он задается циклической перестановкой на n листах, склеиваемых по ребру r , и определяет динамику частицы после удара о границу. Пусть $Z(h) = \{Z(h, r)\}$ – набор таких законов – есть кусочно-постоянная функция энергии, изменения которой могут быть лишь при особых значениях h .

Определение 5. Разрешим ребрам-корешкам состояния $X(h)$ гладко меняться в классе софокусных квадрик без вырождений. Как известно из теории интегрируемых билиардов [14], это задает эквивалентные билиарды [4]. При особых h ребра могут склеиваться с другими ребрами, вырождаться или превращаться в отрезки фокусных прямых. Склейка листов вдоль границ происходит вдоль дуги одной и той же квадрики. На “новом корешке” появляется новый цикл-перестановка. В момент скачка мы разрешаем бил-

лиардам менять свой класс эквивалентности. Например, сегмент границы при особом h может лечь на фокальную прямую или “сложиться пополам”. Скачком угол $\pi/2$ может стать равным π . Разрешается склеивать в граничных точках корешки одного состояния $X(h)$, если они легли на одну граничную дугу, т.е. если угол между ними стал равен π . В круговых бильярдах граничные окружности могут стягиваться в точки.

Так, на рис. 1б при каждом из двух особых значениях h соответствующее ребро r становится “проницаемым” (“прозрачным”). После этого бильярдный шар начинает проходить сквозь него, а до этого — он отражался. При этом пара тождественных перестановок на эллиптических дугах меняется на транспозиции на отрезке фокальной прямой.

О п р е д е л е н и е 6. Итак, носитель X мы считаем неизменным, “неподвижным”. В нем “разрастаются” состояния $X(h)$, причем X совпадает с последним состоянием $X(N)$. Интегрируемую систему с двумя степенями свободы, задаваемую динамикой бильярдного шара на меняющихся состояниях $X(h)$, назовем с и л о в ы м (э в о л ю ц и о н н ы м) б и л л и а р д о м .

Пусть h — регулярное значение энергии из некоего интервала $D_i = (i, i + 1)$. Соответствующий бильярд-состояние обозначим через $X(D_i)$.

О п р е д е л е н и е 7. Точкой фазового комплекса $TX(D_i)$ является пара (x, v) , где x — точка бильярдного стола $X(D_i)$, а v — вектор скорости материальной частицы в точке x . Когда точка x оказывается на границе листа L_i , соседствующего с листом L_k , то склейка соответствующих пар (x, v) и (x, w) происходит по закону отражения—преломления $Z(h, r)$, действующего на данном ребре r при данном h .

О п р е д е л е н и е 8. Регулярной изоэнергетической 3-поверхностью Q_h назовем подмножество в четырехмерном фазовом комплексе $TX(D_i)$, задаваемое уравнением: $H = h$; т.е. “уровень постоянной энергии”. Для интегрируемых бильярдных книжек регулярные Q_h являются топологическими 3-многообразиями [15].

Рассмотрим знаменитый случай Эйлера (1750) динамики тяжелого твердого тела, закрепленного в центре масс [1]. Он обладает первым интегралом, квадратичным по компонентам импульса. Топология симплектического листа M_g^4 системы не зависит от выбора ненулевого значения g интеграла площадей f_2 . На рис. 1б справа M_g^4 соответствует прообраз вертикальной прямой при отображении (f_2, H) . Особые изоэнергетические Q отображаются в точки трех парабол. Каждой 2-области

приписан класс гомеоморфности прообраза любой ее точки — регулярной $Q_{g,h}^3$.

Построим силовой бильярд для такого M_g^4 , см. рис. 1. Его носитель склеен из двух областей, ограниченных эллипсом, и гомеоморфен 2-эллипсоиду E^2 . Состояния бильярда изображены на рис. 1а как подмножества E^2 и на рис. 1б как склейка плоских областей. Состояния с меньшей энергией изображены ниже, с большей — выше. Начальным (стартовым) состоянием является несвязный бильярд, не имеющий общих точек с фокальной прямой (внизу). Он гомеоморфен двум дискам и реализует систему Эйлера на паре 3-сфер $2S^3$. Затем он превращается в кольцо, реализующее произведение 2-сферы и окружности $S^1 \times S^2$. Затем кольцо превращается в сферу (эллипсоид), и реализует проективное пространство RP^3 . На рис. 1б также показаны траектории бильярдного шара и склейка корешков. Интегрируемость бильярда в каждый момент эволюции следует из принадлежности его стенок дугам софокусных квадрик.

Т е о р е м а 1. Построенный интегрируемый силовой бильярд, носитель которого гомеоморфен эллипсоиду, реализует (в смысле лиувиллевой эквивалентности) интегрируемый случай Эйлера сразу на всем фазовом многообразии M_g^4 , т.е. на всех его регулярных изоэнергетических 3-поверхностях для всех регулярных значений g и h .

Случай Лагранжа, допускающий линейный интеграл, описывает движение осесимметричного тяжелого твердого тела с закрепленной точкой на оси симметрии. Известно, что в зависимости от значений параметров, существует четыре типа бифуркационных диаграмм, см. [1]. Оказалось, что здесь есть ровно пять различных типов симплектических 4-листов. Для всех них мы обнаружили силовые бильярды. На рис. 2 показан один из них.

Т е о р е м а 2. Интегрируемый случай Лагранжа на каждом своем регулярном симплектическом 4-листе M_g^4 реализуется (в смысле лиувиллевой эквивалентности) одним из построенных нами пяти силовых бильярдов, у которых бильярды—состояния ограничены концентрическими окружностями (и потому интегрируемы в каждый момент эволюции).

Продеформируем семейство софокусных эллипсов и гипербол в семейство концентрических окружностей и радиальных лучей (устремляя фокусы друг к другу).

Т е о р е м а 3. Указанная деформация софокусных бильярдов в круговые переводит силовой бильярд, реализующий случай Эйлера, в новый силовой бильярд, полный набор лиувиллевых слоений которого совпадает с полным набором лиувиллевых слое-

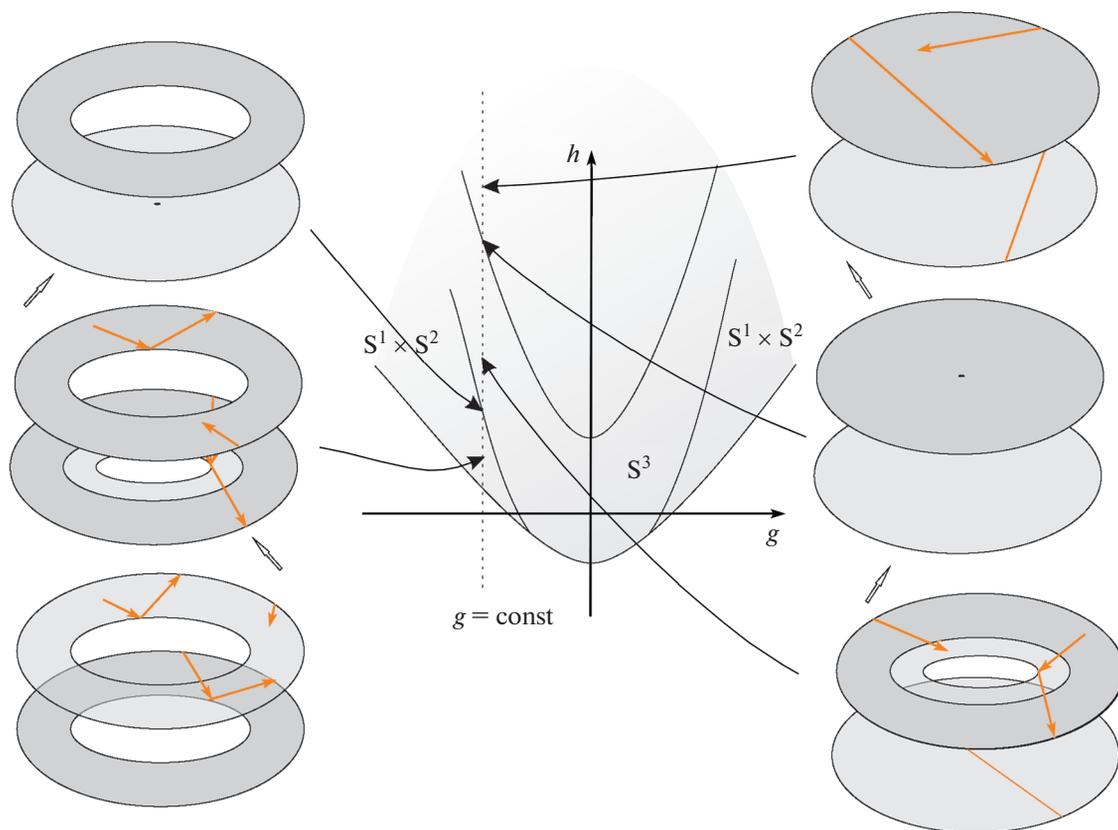


Рис. 2. Силовой бильярд реализует симплектический лист системы Лагранжа.

ний случая Лагранжа (для всех его трех типов изоэнергетических 3-поверхностей). Такие системы мы называем “бильярдно эквивалентными”.

Обнаруженное “превращение” случая Эйлера в случай Лагранжа не переводит симплектический лист случая Эйлера в какой-либо из пяти типов симплектических листов случая Лагранжа. Оно устроено сложнее. Именно это не позволяло ранее заметить превращение этих систем друг в друга. Тем не менее, оказалось, что полный набор лиувиллевых слоений случая Эйлера превращается в полный набор лиувиллевых слоений случая Лагранжа. Сначала потребовалось обнаружить в случае Эйлера “скрытые софокусные квадратики”, а в случае Лагранжа — “скрытые концентрические окружности”. В итоге, именно деформация софокусных квадратики в окружности (при слиянии фокусов) и “превращает” случай Эйлера в случай Лагранжа.

Также мы обнаружили силовые бильярды, реализующие интегрируемый случай Горячева–Чаплыгина–Сретенского одновременно в нескольких регулярных зонах энергии.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ (проект 19-01-00775-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Ижевск: Изд. дом “Удмуртский университет”, 1999. Т. 1. 444 с.
2. Кибкало В.А. // Матем. сб. 2019. Т. 210. № 5. С. 3–40.
3. Kibkalo V. // Topol. Appl. 2020. V. 275. P. 107028.
4. Ведюшкина В.В., Фоменко А.Т. // Изв. РАН. Серия матем. 2017. Т. 81. № 4. С. 20–67.
5. Ведюшкина В.В., Фоменко А.Т. // ДАН. 2019. Т. 486. № 2. С. 151–155.
6. Ведюшкина В.В., Фоменко А.Т. // Изв. РАН. Серия матем. 2019. Т. 83. № 6. С. 63–103.
7. Белозеров Г.В. // Матем. сб. 2020. Т. 211. № 11. С. 3–40.
8. Ведюшкина В.В., Харчева И.С. // Матем. сб. 2018. Т. 209. № 12. С. 17–56.
9. Ведюшкина В.В. // Матем. сб. 2019. Т. 210. № 3. С. 17–74.
10. Bolsinov A., Guglielmi L., Kudryavtseva E. // Phil. Trans. R. Soc. A. 2018. V. 376. P. 20170424
11. Кобцев И.Ф. // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2018. № 2. С. 27–33.

12. *Кобцев И.Ф.* // Матем. сб. 2020. Т. 211. № 7. С. 93–120.
13. *Пустовойтов С.Е.* // Фунд. прикл. мат. 2019. Т. 22. № 6. С. 201–225.
14. *Козлов В.В., Трещёв Д.В.* Генетическое введение в динамику систем с ударами. М.: Изд-во МГУ, 1991.
15. *Харчева И.С.* // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2020. № 4. С. 12–22.

FORCE EVOLUTIONARY BILLIARDS AND BILLIARD EQUIVALENCE OF EULER AND LAGRANGE CASES

V. V. Vedyushkina^a and Academician of the RAS A. T. Fomenko^a

^a *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

A class of force evolutionary billiards is discovered that realizes important integrable Hamiltonian systems on all regular isoenergy 3-surfaces simultaneously, i.e. on the phase 4-space. It is proved that well-known Euler and Lagrange integrable cases are billiard equivalent, although degrees of their integrals are different (one and two).

Keywords: integrable system, billiard, billiard book, Liouville equivalence, Fomenko–Zieschang invariant, evolutionary force billiards, rigid body dynamics