ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 496, с. 59–63

МАТЕМАТИКА

УДК 517.958

ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ И СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛАХ

© 2021 г. А. Б. Самохин[1,*], Ю. Г. Смирнов[2]

Представлено академиком РАН Е. Е. Тыртышниковым 09.09.2020 г.
Поступило 09.09.2020 г.
После доработки 09.09.2020 г.
Принято к публикации 18.01.2021 г.

Доказаны теоремы единственности и существования решения для задач рассеяния электромагнитных волн на ограниченных трехмерных неоднородных анизотропных телах, в том числе без потерь и с разрывами параметров среды.

Ключевые слова: задачи рассеяния электромагнитных волн, уравнения Максвелла, среды без потерь, анизотропные среды, объемные сингулярные интегральные уравнения

DOI: 10.31857/S2686954321010148

Вопросы существования и единственности решения задач рассеяния электромагнитных волн на ограниченных трехмерных прозрачных, в том числе неоднородных и анизотропных, телах, находящихся в свободном пространстве, имеют принципиальное значение в электродинамике. Были доказаны теоремы единственности для некоторых классов задач рассеяния [1–7]. Наибольшие трудности возникают при исследовании задач в средах без потерь, с разрывами параметров, с анизотропией.

Будем рассматривать следующий класс задач электродинамики. В области Q среда характеризуется тензорами диэлектрической и магнитной проницаемости $\hat{\varepsilon}(x)$ и $\hat{\mu}(x)$, причем компоненты этих тензоров являются кусочно-дифференцируемыми функциями координат. Точнее, пусть область Q состоит из конечного числа подобластей Q_n с кусочно-гладкими границами ∂Q_n; $\overline{Q} = \bigcup\limits_n \overline{Q}_n$, $Q_n \cap Q_m = \varnothing$ при $n \neq m$. Будем полагать, что $\hat{\varepsilon}(x)$ и $\hat{\mu}(x)$ являются сужениями на Q_n функций, заданных на более широком множестве, т.е. $\hat{\varepsilon}(x) = \hat{\varepsilon}_n(x)$, $\hat{\mu}(x) = \hat{\mu}_n(x)$ при $x \in Q_n$, $\hat{\varepsilon}_n \in C^3(\overline{B})$, $\hat{\mu}_n \in C^3(\overline{B})$, где B – шар, содержащий Q. Вне области Q среда изотропна с постоянными параметрами ε_0 и μ_0.

Требуется найти векторные функции электромагнитного поля, удовлетворяющие в областях гладкости параметров среды уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = -i\omega\hat{\varepsilon}\mathbf{E} + \mathbf{J}^0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = i\omega\hat{\mu}\mathbf{H} \tag{1}$$

и условию излучения на бесконечности

$$\lim_{r\to\infty}\left(r\frac{\partial u}{\partial r} - ik_0 ru\right) = 0, \quad r := |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \tag{2}$$

где $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$, $\operatorname{Im}\varepsilon_0 = 0$, $\operatorname{Im}\mu_0 = 0$, $\operatorname{Re}\varepsilon_0 > 0$, $\operatorname{Re}\mu_0 > 0$, а u – любая из декартовых компонент полей. В (1) $\mathbf{J}^0$ – заданный электрический ток, создающий внешнее поле $\mathbf{E}^0$, $\mathbf{H}^0$. Далее, на гладких частях поверхностей разрыва проницаемостей ∂Q_n функции $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ должны удовлетворять условию непрерывности тангенциальных компонент полей. Такие решения задачи будем называть классическими.

Введем ограничения на параметры среды в Q. Будем полагать, что эрмитовы тензор-функции $(\hat{\varepsilon}_n(x) - \hat{\varepsilon}_n^*(x))/i$ и $(\hat{\mu}_i(x) - \hat{\mu}_i^*(x))/i$ неотрицательно определены (нет генерации энергии в среде), а эрмитовы тензоры $(\hat{\varepsilon}_n(x) + \hat{\varepsilon}_n^*(x))$ и $(\hat{\mu}_i(x) + \hat{\mu}_i^*(x))$ положительно определены. Символ * обозначает сопряженный тензор, т.е. транспонированный тензор с комплексно-сопряженными элементами.

Доказывается [5, 6], что для однородной задачи (1), (2), т.е. $\mathbf{J}^0 = 0$, электромагнитное поле в

[1] *МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, Россия*
[2] *Пензенский государственный университет, Пенза, Россия*
**E-mail: absamokhin@yandex.ru*

$\mathbf{R}^3\backslash\overline{Q}$ равно нулю и тангенциальные компоненты полей на ∂Q также равны нулю. Обозначим эту однородную задачу через А. Предположим, что в области Q электромагнитное поле не равно тождественно нулю. Очевидно, что найдется такое m, что $\partial Q_m \cap \partial Q \neq \varnothing$, т.е. у Q_m и Q имеется общий гладкий кусок границы.

Определим функцию-срезку со свойствами: $\zeta(t;\ a,b) \in C^{\infty}(\mathbf{R}^1)$, $0 \le \zeta(t;a,b) \le 1$, $\zeta(t;a,b) = 1$ при $t \le a$, $\zeta(t;a,b) = 0$ при $t \ge b$, $\zeta(t;a,b) > 0$ при $a < t < b$. Пусть шар B, содержащий Q, имеет центр в точке $x_0 \in Q$ и радиус $2d$, где d – диаметр области Q, т.е. максимальное расстояние между точками границы ∂Q. Определим функции

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}^c_m(x) &:= (\hat{\varepsilon}_m(x) - \varepsilon_0\hat{I})\zeta(|x - x_0|; d, 2d)\hat{I} + \varepsilon_0\hat{I}, \\ \hat{\mu}^c_m(x) &:= (\hat{\mu}_m(x) - \mu_0\hat{I})\zeta(|x - x_0|; d, 2d)\hat{I} + \mu_0\hat{I}. \end{aligned} \tag{3}$$

Ясно, что $\hat{\varepsilon}^c_m, \hat{\mu}^c_m \in C^3(\mathbf{R}^3)$ и $\hat{\varepsilon}^c_m(x) = \varepsilon_0\hat{I}$, $\hat{\mu}^c_m(x) = \mu_0\hat{I}$ при $x \notin B$.

Рассмотрим вспомогательную однородную задачу С. Задача С описывается однородными уравнениями (1), (2), в которых проницаемости $\hat{\varepsilon}^c$, $\hat{\mu}^c$ в области Q совпадают с проницаемостями из задачи А, а вне области Q проницаемости описываются формулами (3). Опишем множество решений задачи С. Ясно, что в области $\mathbf{R}^3\backslash\overline{B}$ электромагнитное поле равно нулю. Обозначим $Q^m := Q\backslash\overline{Q_m}$. Из построения функций (3) следует, что проницаемости $\hat{\varepsilon}^c, \hat{\mu}^c \in C^3(\mathbf{R}^3\backslash\overline{Q^m})$.

Из работ [2, 3] следует, что однородные уравнения (1) в области гладкости проницаемостей сводятся в декартовой системе координат к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered} \varepsilon_{lm}\frac{\partial^2 E_k}{\partial x_l \partial x_m} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial \varepsilon_{lm}}{\partial x_l}E_m\right) + \frac{\partial \varepsilon_{lm}}{\partial x_k}\frac{\partial E_m}{\partial x_l} + \\ + i\omega\varepsilon_{lm}L_{kmn}\frac{\partial}{\partial x_l}(\mu_{np}H_p) = 0, \quad k = 1,2,3, \\ \mu_{lm}\frac{\partial^2 H_k}{\partial x_l \partial x_m} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial \mu_{lm}}{\partial x_l}H_m\right) + \frac{\partial \mu_{lm}}{\partial x_k}\frac{\partial H_m}{\partial x_l} - \\ - i\omega\mu_{lm}L_{kmn}\frac{\partial}{\partial x_l}(\varepsilon_{np}E_p) = 0, \quad k = 1,2,3. \end{gathered} \tag{4}$$

В (4) используется правило суммирования по повторяющимся индексам, а L_{kmn} – символ Леви-Чивиты. Из уравнений (4) следует, что детерминант главного символа дифференциального оператора определяется формулой

$$\det P^0(\xi) = \left[\sum_{l,m=1}^{3}\varepsilon_{lm}\xi_l\xi_m\right]^3\left[\sum_{l,m=1}^{3}\mu_{lm}\xi_l\xi_m\right]^3. \tag{5}$$

Поскольку $(\hat{\varepsilon}_n(x) + \hat{\varepsilon}^*_n(x))$ и $(\hat{\mu}_n(x) + \hat{\mu}^*_n(x))$ положительно определены, то получим, что $\det P^0(\xi) \neq 0$, $|\xi| \neq 0$ в $\mathbf{R}^3\backslash\overline{Q^m}$. Следовательно, система уравнений (4) является эллиптической в этой области. Все коэффициенты в уравнениях (4) являются дифференцируемыми функциями в $\mathbf{R}^3\backslash\overline{Q^m}$. Поэтому можно применить принцип продолжения решения уравнений (4) по непрерывности [7] из области $\mathbf{R}^3\backslash\overline{B}$ в область $\mathbf{R}^3\backslash\overline{Q^m}$. Получаем, что электромагнитное поле в подобласти Q_m равно нулю, а тангенциальные компоненты полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ на ∂Q также равны нулю.

Электромагнитное поле в задачах А и С удовлетворяет одним и тем же однородным уравнениям (1) в области Q и одинаковым граничным условиям на ∂Q. Поэтому множества решений задач А и С совпадают в области Q. Но решение задачи С в подобласти Q_m только тривиальное, что противоречит предположению о нетривиальности решения задачи А в этой же области. Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 1. *Пусть область Q состоит из конечного числа подобластей Q_n с кусочно-гладкой границей ∂Q_n; $\overline{Q} = \bigcup_n \overline{Q}_n$, $Q_n \cap Q_m = \varnothing$ при $n \neq m$. Положим, что $\hat{\varepsilon} = \varepsilon_0\hat{I}$, $\hat{\mu} = \mu_0\hat{I}$ в $\mathbf{R}^3\backslash\overline{Q}$, а $\hat{\varepsilon}(x)$ и $\hat{\mu}(x)$ в Q задаются сужениями на Q_n функций $\hat{\varepsilon}_n$, $\hat{\mu}_n \in C^3(\overline{B})$ ($\hat{\varepsilon}(x) = \hat{\varepsilon}_n(x)$ и $\hat{\mu}(x) = \hat{\mu}_n(x)$ при $x \in Q_n$), где B – шар, содержащий Q. Пусть эрмитовы тензор-функции $(\hat{\varepsilon}_n(x) + \hat{\varepsilon}^*_n(x))$ и $(\hat{\mu}_n(x) + \hat{\mu}^*_n(x))$ положительно определены, а тензор-функции $(\hat{\varepsilon}_n(x) - \hat{\varepsilon}^*_n(x))/i$ и $(\hat{\mu}_n(x) - \hat{\mu}^*_n(x))/i$ неотрицательно определены в B. Тогда задача* (1), (2) *имеет только тривиальное решение.*

Рассматриваемые задачи могут быть сведены к системе объемных сингулярных интегральных уравнений относительно электромагнитного поля в конечной области $B \supseteq Q$ [3, 4]

$$\begin{gathered} \mathbf{E}(x) + \frac{1}{3}(\hat{\varepsilon}_r(x) - \hat{I})\mathbf{E}(x) - \\ - p.v.\int_B ((\hat{\varepsilon}_r(y) - \hat{I})\mathbf{E}(y), \operatorname{grad})\operatorname{grad} G(R)dy - \\ - k_0^2\int_B (\hat{\varepsilon}_r(y) - \hat{I})\mathbf{E}(y)G(R)\,dy - \\ - i\omega\mu_0\int_B (\hat{\mu}_r(y) - \hat{I})\mathbf{H}(y) \times \operatorname{grad} G(R)dy = \mathbf{E}^0(x), \\ x \in B, \end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{H}(x)+\frac{1}{3}(\hat{\mu}_r(x)-\hat{I})\mathbf{H}(x)-\\ -p.v.\int_B((\hat{\mu}_r(y)-\hat{I})\mathbf{H}(y),\mathrm{grad})\mathrm{grad}\,G(R)dy-\\ -k_0^2\int_B(\hat{\mu}_r(y)-\hat{I})(y)G(R)dy+\\ +i\omega\varepsilon_0\int_B(\hat{\varepsilon}_r(y)-\hat{I})\mathbf{E}(y)\times\mathrm{grad}\;G(R)dy=\mathbf{H}^0(x),\\ x\in B.\end{gathered}\tag{7}$$

В (6), (7) $\hat{\varepsilon}_r=\dfrac{\hat{\varepsilon}}{\varepsilon_0}$, $\hat{\mu}_r=\dfrac{\hat{\mu}}{\mu_0}$; G – функция Грина для уравнения Гельмгольца

$$G(R)=\frac{\exp(ik_0R)}{(4\pi R)},\tag{8}$$

$R=|x-y|$; $x=(x_1,x_2,x_3)$; $y=(y_1,y_2,y_3)$, $\times$ – векторное произведение. Из (6), (7) ясно, что электромагнитное поле в Q не зависит от формы и размеров области B.

Ниже будем предполагать, что выполняются условия теоремы 1. Для исследования решений уравнений (6), (7) будем использовать гильбертово пространство шестимерных интегрируемых с квадратом вектор-функций $\mathbf{L}_2$. Сначала рассмотрим вопрос о единственности решения.

Возьмем область B в виде шара с радиусом $3d$ и центром в точке $x_0\in Q$. Для однородной задачи (6)–(8) электромагнитное поле в области $B\backslash\overline{Q}$ равно нулю. Предположим, что в области Q решение (6)–(8) не равно нулю. Обозначим эту задачу через А1.

Рассмотрим вспомогательную задачу С1. Задача С1 описывается однородными уравнениями (6)–(8), в которых проницаемости $\hat{\varepsilon}^c$, $\hat{\mu}^c$ в области Q совпадают с проницаемостями из задачи А1, а вне области Q проницаемости описываются формулами (3), где индекс m связан с подобластью Q_m, имеющей общий гладкий кусок границы с Q.

Опишем множество решений задачи С1. Обозначит через B_0 шар радиуса $2d$ и с центром, совпадающим с центром шара B. Из (3) ясно, что в области $B\backslash\overline{B_0}$ электромагнитное поле равно нулю. Обозначим $Q^m:=Q\backslash\overline{Q_m}$. Из построения функций (3) следует, что проницаемости $\hat{\varepsilon}^c,\hat{\mu}^c\in C^3(B\backslash\overline{Q^m})$. В областях гладкости параметров среды решение однородных уравнений (6)–(8) из $\mathbf{L}_2(B)$ удовлетворяет уравнениям Максвелла (1). Поэтому в области $B\backslash\overline{Q^m}$ решение удовлетворяет уравнениям (4), которые, поскольку функции (3) подчиняется условиям теоремы 1, являются эллиптическими. Применяя принцип продолжения решения уравнений (4) по непрерывности из области $B\backslash\overline{B}_0$ в область $B\backslash\overline{Q^m}$, получим, что электромагнитное поле в $B\backslash\overline{Q^m}$ равно нулю.

Далее, электромагнитное поле в задачах А1 и С1 удовлетворяет одним и тем же однородным уравнениям (6)–(8) в области Q. Поэтому множества решений задач А1 и С1 совпадают в области Q. Но решение задачи С1 в подобласти Q_m только тривиальное, что противоречит предположению о нетривиальности решения задачи А1 в этой же области. Следовательно, при выполнении условий теоремы 1, объемные сингулярные интегральные уравнения (6)–(8) имеют только тривиальное решение в $\mathbf{L}_2(Q)$.

Рассмотрим вопрос о фредгольмовости системы интегральных уравнений (6)–(8). Линейный ограниченный оператор A, действующий в гильбертовом пространстве, будет фредгольмовым оператором, если размерности подпространства нулей оператора $n(A)$ и сопряженного оператора $n(A^*)$ конечны и их разность (индекс) равна нулю.

Сначала рассмотрим интегральное уравнение в анизотропной диэлектрической среде, т.е. магнитная проницаемость всюду постоянна и равна μ_0. Тогда система интегральных уравнений (6), (7) сводится к объемному сингулярному интегральному уравнению относительно электрического поля в области Q:

$$\begin{gathered}\mathbf{E}(x)+\frac{1}{3}(\hat{\varepsilon}_r(x)-\hat{I})\mathbf{E}(x)-\\ -p.v.\int_Q((\hat{\varepsilon}_r(y)-\hat{I})\mathbf{E}(y),\mathrm{grad})\mathrm{grad}\,G(R)dy-\\ -k_0^2\int_Q(\hat{\varepsilon}_r(y)-\hat{I})\mathbf{E}(y)G(R)dy=\mathbf{E}^0(x),\\ x\in Q,\quad \hat{\varepsilon}_r=\hat{\varepsilon}/\varepsilon_0.\end{gathered}\tag{9}$$

Обозначим через A оператор уравнения (9). Тогда

$$\begin{gathered}(A\mathbf{W})(x)=\left(\hat{I}+\frac{1}{3}\hat{\eta}(x)\right)\mathbf{W}(x)-\\ -\int_Q\hat{G}_0(x,y)(\hat{\eta}(y)\mathbf{W}(y))\,dy-\\ -p.v.\int_Q\hat{G}_1(x,y)(\hat{\eta}(y)\mathbf{W}(y))dy,\quad x\in Q.\end{gathered}\tag{10}$$

В (10) тензор-функция $\hat{\eta}(x)=(\hat{\varepsilon}_r(x)-\hat{I})$, а $\hat{G}_0(x,y)$ и $\hat{G}_1(x,y)$ – тензорные функции, очевидным образом определяемые из (9).

Тогда оператор, сопряженный к A в пространстве $\mathbf{L}_2(Q)$, будет иметь вид

$$(A^*\mathbf{W})(x) = \left(\hat{I} + \frac{1}{3}\hat{\eta}^*(x)\right)\mathbf{W}(x) - \\ - \hat{\eta}^*(x)\int_Q \hat{G}_0^*(y,x)\mathbf{W}(y)dy - \\ - \hat{\eta}^*(x)p.v.\int_Q \hat{G}_1^*(y,x)\mathbf{W}(y)dy, \quad x \in Q. \tag{11}$$

Ниже будем полагать, что тензор-функция $\hat{\eta}(x)$ может не иметь обратную в Q лишь на множестве точек меры ноль, например, на границе области Q. Из (9), (10) следует, что $\hat{G}_k(x,y) = \hat{G}_k(y,x)$, $\hat{G}_k = \hat{G}_k^t$, $k = 0, 1$. Учитывая эти свойства тензоров, возьмем комплексное сопряжение в (11), получим

$$(A^*\mathbf{W})^*(x) = \left(\hat{I} + \frac{1}{3}\hat{\eta}^t(x)\right)\mathbf{W}^*(x) - \\ - \hat{\eta}^t(x)\int_Q \hat{G}_0(x,y)\mathbf{W}^*(y)dy - \\ - \hat{\eta}^t(x)p.v.\int_Q \hat{G}_1(x,y)\mathbf{W}^*(y)dy, \quad x \in Q. \tag{12}$$

В (12) символы t и $*$ обозначают, соответственно, транспонированный тензор и комплексно сопряженный вектор.

Пусть $\mathbf{W} \in \mathbf{L}_2(Q)$ – нуль оператора (11), т.е. $A^*\mathbf{W} = 0$. Обозначим

$$\mathbf{V}(x) = -\frac{1}{3}\mathbf{W}^*(x) + \int_Q \hat{G}_0(x,y)\mathbf{W}^*(y)dy + \\ + p.v.\int_Q \hat{G}_1(x,y)\mathbf{W}^*(y)dy.$$

Тогда из (12) получим $\mathbf{W}^* = \hat{\eta}^t\mathbf{V}$. Из (10), (12) имеем $(A^*\mathbf{W})^* = \hat{\eta}^t A(\hat{\varepsilon}^t)\mathbf{V} = 0$, где $A(\hat{\varepsilon}^t)$ – оператор уравнения (9) с тензором диэлектрической проницаемости в Q, равным $\hat{\varepsilon}^t$. Следовательно, размерности подпространств нулей операторов $A^*(\hat{\varepsilon})$ и $A(\hat{\varepsilon}^t)$ связаны неравенством $n(A^*(\hat{\varepsilon})) \le n(A(\hat{\varepsilon}^t))$. Теперь пусть $\mathbf{W}$ – нуль оператора (10) с диэлектрической проницаемостью $\hat{\varepsilon}^t$, т.е. $A(\hat{\varepsilon}^t)\mathbf{W} = 0$. Обозначим $\mathbf{V}^* = \hat{\eta}^t\mathbf{W}$. Тогда из (10), (12) имеем $\hat{\eta}^t A(\hat{\varepsilon}^t)\mathbf{W} = (A^*\mathbf{V})^* = 0$. Получаем, что $n(A(\hat{\varepsilon}^t)) \le n(A^*(\hat{\varepsilon}))$ и поэтому имеем

$$n(A(\hat{\varepsilon}^t)) = n\left(A^*(\hat{\varepsilon})\right). \tag{13}$$

Если какой-либо эрмитов тензор $\hat{\delta}$ неотрицательно/положительно определен, то и эрмитов тензор $\hat{\delta}^t$ будет также неотрицательно/положительно определен. Поэтому, при выполнении условий теоремы 1, получим $n(A(\hat{\varepsilon})) = n(A(\hat{\varepsilon}^t)) = 0$. Тогда из (13) следует $n(A(\hat{\varepsilon})) = n(A^*(\hat{\varepsilon})) = 0$. Таким образом, оператор уравнения (9) будет фредгольмовым в $\mathbf{L}_2(Q)$.

Теперь рассмотрим задачи рассеяния на магнитодиэлектрическом теле. Запишем систему сингулярных интегральных уравнений (6), (7) в символической форме

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{S} & -i\omega\mu_o\hat{F} \\ i\omega\varepsilon_0\hat{F} & \hat{S} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (\hat{\varepsilon}_r - \hat{I})\mathbf{E} \\ (\hat{\mu}_r - \hat{I})\mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}^0 \\ \mathbf{H}^0 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

где вид операторов $\hat{S}$ и $\hat{F}$ ясен из (6), (7). Очевидно, что оператор $\hat{S}$ является сингулярным оператором в $\mathbf{L}_2(Q)$, а оператор $\hat{F}$ компактным.

Рассмотрим следующее уравнение:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{S} & 0 \\ 0 & \hat{S} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (\hat{\varepsilon}_r - \hat{I})\mathbf{E} \\ (\hat{\mu}_r - \hat{I})\mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}^0 \\ \mathbf{H}^0 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Из вида уравнения (15) очевидно, что при выполнении вышеприведенных условий для тензор-функций $\hat{\varepsilon}(x)$ и $\hat{\mu}(x)$ оператор уравнения (15) будет фредгольмовым в $\mathbf{L}_2(Q)$. Оператор уравнения (14) отличается от оператора уравнения (15) прибавлением компактных операторов. Следовательно, оператор уравнения (14) также является фредгольмовым.

Т е о р е м а 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1 *и, кроме того, тензор-функции* $(\hat{\varepsilon}_r(x) - \hat{I})$ *и* $(\hat{\mu}_r(x) - \hat{I})$ *могут не иметь обратные функции в* Q *лишь на множестве точек меры ноль. Тогда существует и единственно решение системы сингулярных интегральных уравнений* (6), (7) *в пространстве* $\mathbf{L}_2(Q)$.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект 20-11-20087).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Colton D., Kress R.* Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory. Applied Mathematical Sciences. V. 93. B.: Springer-Verlag, 1992.
2. *Potthast R.* Integral equation methods in electromagnetic scattering from anisotropic media // J. of Integral Equations and Applications. 1999. V. 11. № 2. P. 197–215.
3. *Самохин А.Б.* Объемные сингулярные интегральные уравнения для задач рассеяния на трехмерных диэлектрических структурах // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 9. С. 1215–1230.
4. *Самохин А.Б.* Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии. М.: Радио и связь, 1998.

5. *Ball J.M., Capdeboscq Y., Tsering Xiao B.* On uniqueness for time harmonic anisotropic Maxwell's equations with piecewise regular coefficients // Mathematical Models and Methods in Applied Science. 2012. V. 22. № 11. P. 1–34.
6. *Смирнов Ю.Г., Цупак А.А.* О существовании и единственности классического решения задачи дифракции электромагнитной волны на неоднородном диэлектрическом теле без потерь // ЖВМиМФ. 2017. Т. 57. № 4. С. 702–709.
7. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 3. Псевдодифференциальные операторы. М.: Мир, 1987.

UNIQUENESS AND EXISTENCE THEOREMS FOR SOLVING PROBLEMS OF SCATTERING OF ELECTROMAGNETIC WAVES ON ANISOTROPIC BODIES

A. B. Samokhin[a] and Yu. G. Smirnov[b]

[a] *MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russian Federation*

[b] *Penza State University, Penza, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS E.E. Tyrtyshnikov

Theorems on the uniqueness and existence of solutions for the problems of scattering of electromagnetic waves by bounded three-dimensional inhomogeneous anisotropic bodies, including those without losses and with discontinuities in the parameters of the medium, are proved.

Keywords: problems of scattering of electromagnetic waves, Maxwell's equations, media without losses, anisotropic media, volume singular integral equations