ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 496, с. 64–67

МАТЕМАТИКА

УДК 517.98

ИЗОМЕТРИИ НЕКОММУТАТИВНЫХ СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ

© 2021 г. Ф. А. Сукочев[1,2,*], Джингхао Хуанг[1,]**

Представлено академиком РАН Б.С. Кашиным 30.10.2020 г.
Поступило 02.11.2020 г.
После доработки 02.11.2020 г.
Принято к публикации 24.11.2020 г.

Пусть $\mathcal{M}$ – неатомическая полуконечная алгебра фон Неймана (или атомическая алгебра фон Неймана со всеми атомами, имеющими один и тот же след), действующая в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, снабженная точным нормальным полуконечным следом τ. Пусть $E(\mathcal{M},\tau)$ – сепарабельное симметричное пространство τ-измеримых операторов, норма которого не пропорциональна гильбертовой норме $\|\cdot\|_2$ на $L_2(\mathcal{M},\tau)$. Получено общее описание всех ограниченных эрмитовых операторов на $E(\mathcal{M},\tau)$ и всех сюръективных изометрий этого пространства.

Ключевые слова: сюръективные изометрии, эрмитовы операторы, полуконечная алгебра фон Неймана, симметричные пространства

DOI: 10.31857/S2686954321010124

1. ЭРМИТОВЫ ОПЕРАТОРЫ

Пусть X – банахово пространство. Напомним, что полускалярное произведение (сокращенно п.с.п.) на X – это отображение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ из $X\times X$ в поле комплексных чисел такое, что:

1. $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$ для $x,y,z\in X$;
2. $\langle \lambda x,y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle$ для $x,y\in X$ и $\lambda\in\mathbb{C}$;
3. $\langle x,x\rangle > 0$ для $0\neq x\in X$;
4. $|\langle x,y\rangle|^2 \le \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$ для всех $x,y\in X$.

Когда п.с.п определено на $X\times X$, то мы называем X пространством с полускалярным произведением (сокращенно п.п.с.п.). Если X п.п.с.п., тогда $\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$ является нормой в X. С другой стороны, каждое банахово пространство можно превратить в п.п.с.п. (в общем, бесконечно многими способами) так, что п.с.п. согласуется с нормой, т.е. $\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}} = \|x\|$ для любого $x\in X$ [1]. В силу теоремы Хана–Банаха это может быть достигнуто формулой $\langle x,y\rangle = f_y(x)$, $x,y\in X$, где для каждого $x\in X$ выбран ограниченный линейный функционал f_x такой, что $\|f_x\| = \|x\|$ и $f_x(x) = \|x\|^2$ [1]. Для линейного преобразования T, отображающего п.п.с.п. в себя, мы обозначим $W(T)$ скалярный ранг T, т.е. множество скаляров $\{\langle Tx,x\rangle \mid \langle x,x\rangle = 1, x\in X\}$. Пусть T – это линейный оператор в банаховом пространстве $(X,\|\cdot\|)$. Хотя, вообще говоря, существует много разных п.с.п., согласующихся с нормой $\|\cdot\|$, тем не менее, если скалярный ранг T относительно одного такого п.с.п. содержится в поле вещественных чисел, то тогда скалярный ранг относительно любого п.с.п. также содержится в поле вещественных чисел, см., например, [1, с. 107]. В этом случае T называется эрмитовым оператором на X.

Пусть $\mathcal{M}$ – полуконечная алгебра фон Неймана, действующая на сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ с точным нормальным полуконечным следом τ. Пусть $\mathbf{1}$ – это единица алгебры $\mathcal{M}$, а $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ – это семейство всех проекторов в $\mathcal{M}$. Плотно определенный замкнутый оператор x, присоединенный к $\mathcal{M}$, называется τ-измеримым тогда и только тогда, когда

$$\tau(e^{|x|}(n,\infty)) \to 0, \quad n\to\infty,$$

где $e^{|x|}(n,\infty)$ – спектральный проектор оператора $|x|$, соответствующий интервалу (n,∞). Семейство всех τ-измеримых операторов относительно $\mathcal{M}$ обо-

[1] *Школа математики и статистики, Университет Нового Южного Уэльса, Кенсингтон, Австралия*
[2] *Северо-Осетинский государственный университет им. К.Л. Хетагурова, Владикавказ, Россия*
**E-mail: f.sukochev@unsw.edu.au*
***E-mail: jinghao.huang@unsw.edu.au*

значается через $S(\mathcal{M}, \tau)$. Пусть $x \in S(\mathcal{M}, \tau)$. Функция обобщенных сингулярных чисел $\mu(x)$: $t \to \mu(t; x)$, $t > 0$, оператора x определена формулой

$$\mu(t; x) = \inf\{\|xp\|_\infty: p \in \mathcal{P}(\mathcal{M}), \tau(1 - p) \le t\},$$

где $\|\cdot\|_\infty$ обозначает обычную операторную норму [2].

Пусть $E(\mathcal{M}, \tau)$ – линейное подмножество в $S(\mathcal{M}, \tau)$, снабженное банаховой нормой $\|\cdot\|_E$. Мы говорим, что $E(\mathcal{M}, \tau)$ является симметричным пространством, если для $x \in E(\mathcal{M}, \tau)$, $y \in S(\mathcal{M}, \tau)$ и $\mu(y) \le \mu(x)$ мы имеем $y \in E(\mathcal{M}, \tau)$ и $\|y\|_E \le \|x\|_E$ [3].

Частным случаем этого определения является известный класс некоммутативных L_p-пространств $L_p(\mathcal{M}, \tau)$, снабженных банаховой нормой $\|\cdot\|_p$, $1 \le p < \infty$.

Если алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ совпадает с пространством $L_\infty(\Omega, \Sigma, \nu)$ всех существенно ограниченных комплекснозначных функций на неатомическом σ-конечном пространстве с мерой (Ω, Σ, ν), то любое симметричное пространство $E(\mathcal{M}, \tau)$ идентифицируется с симметричным функциональным пространством $E(\Omega, \Sigma, \nu)$.

Описание эрмитовых операторов на симметричных пространствах было известно только для некоторых частных случаев. А именно, в случае, когда $\mathcal{M} = L_\infty(\Omega, \Sigma, \nu)$, описание эрмитовых операторов на сепарабельных симметричных пространствах функций $E(\mathcal{M}, \tau)$ было получено Зайденбергом [4] (более полная история вопроса содержится в [1]). Когда $E(\mathcal{M}, \tau) = \mathcal{M}$, общий вид эрмитовых операторов на $\mathcal{M}$ был найден Синклером [5]. Когда $\mathcal{M}$ совпадает с алгеброй $B(\mathcal{H})$ всех ограниченных линейных операторов на $\mathcal{H}$ (соответственно, гиперфинитным фактором типа II), эрмитовы операторы на сепарабельном пространстве $E(\mathcal{M}, \tau)$ описаны в [6] (соответственно, в [7]).

Следующая теорема дает описание эрмитовых операторов на некоммутативном симметричном пространстве $E(\mathcal{M}, \tau)$ для общей полуконечной алгебры фон Неймана.

Т е о р е м а 1. *Пусть $E(\mathcal{M}, \tau)$ – сепарабельное симметричное пространство на неатомической полуконечной алгебре фон Неймана (или атомической алгебре фон Неймана, у которой все атомы имеют один и тот же след) $\mathcal{M}$, действующей на сепарабельном гильбертовом пространство $\mathcal{H}$ с точным нормальным полуконечным следом τ. Предположим, что норма $\|\cdot\|_E$ не пропорциональна гильбертовой норме $\|\cdot\|_2$. Ограниченный оператор T на $E(\mathcal{M}, \tau)$ является эрмитовым оператором на $E(\mathcal{M}, \tau)$ тогда и только тогда, когда существуют самосопряженные операторы a и b в $\mathcal{M}$, такие что*

$$Tx = ax + xb, \quad x \in E(\mathcal{M}, \tau).$$

В частности, T может быть расширен до ограниченного эрмитова оператора на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$.

2. ИЗОМЕТРИИ

Одним из фундаментальных вопросов теории симметричных функциональных пространств $E(\Omega, \Sigma, \nu)$ является описание общего вида изометрий этих пространств. Изучение этого вопроса было начато Стефаном Банахом [8], который в 1930-х гг. описал общий вид изометрий в L_p-пространствах на пространствах конечной меры. Представления изометрий между более общими комплексными симметричными функциональными пространствами были позже получены Зайденбергом [4] (более полную историю см. в [1]). В частности, Зайденберг показал, что при слабых условиях на функциональные пространства $E_1(\Omega_1, \Sigma_1, \nu_1)$ и $E_2(\Omega_2, \Sigma_2, \nu_2)$ на неатомических σ-конечных пространствах с мерой $(\Omega_1, \Sigma_1, \nu_1)$ и (a_2, Σ_2, ν_2), соответственно, любая изометрия T между двумя комплексными симметричными функциональными пространствами $E_1(\Omega_1, \Sigma_1, \nu_1)$ и $E_2(\Omega_2, \Sigma_2, \nu_2)$ имеет следующую элементарную форму:

$$(Tf)(t) = h(t)(T_1 f)(t), \quad f \in E_1, \tag{1}$$

где T_1 – это оператор, индуцированный изоморфизмом регулярных множеств из Ω_1 в Ω_2, и где h – это измеримая функция на Ω_2[1, Theorem 5.3.5].

Некоммутативный вариант теоремы Банаха–Стоуна был получен Кадисоном [9] в 1950-х гг., который показал, что сюръективная изометрия между двумя алгебрами фон Неймана может быть записана как комбинация иорданова *-изоморфизма с последующим умножением на унитарный оператор. Полное описание (для полуконечного случая) изометрий некоммутативных L_p-пространств $1 \le p \ne 2 < \infty$ было получено в 1981 г. Едоном [10]. Суроур [6] описал изометрии сепарабельных симметрично нормированных идеалов в алгебре $B(\mathcal{H})$ всех ограниченных линейных операторов на $\mathcal{H}$. Пользуясь техникой Суроура, описание изометрий на сепарабельных симметричных операторных пространствах, присоединенных к гиперфинитном II факторам, получено в [7]. Однако подход, использованный в [6], опирается на матричное представление компактных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и неприменим в случае произвольной полуконечной алгебры фон Неймана. В последнем случае были получены лишь частичные результаты. В дополнение к уже цитированным результатам Едона для некоммутативных L_p-пространств общий вид изометрий пространств Лоренца на конечной алгебре фон Неймана был получен в [11] (см. также [12, 13]).

Общее описание сюръективных изометрий между симметричными операторными пространствами получается следующим образом.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ — алгебры фон Неймана, не имеющие атомов (или же атомические алгебры фон Неймана, атомы которых имеют одинаковый след), с точными нормальными полуконечными следами τ_1 и τ_2 соответственно. Пусть $E(\mathcal{M}_1,\tau_1)$ и $F(\mathcal{M}_2,\tau_2)$ — два сепарабельных симметричных операторных пространства, нормы которых не пропорциональны гильбертовой норме $\|\cdot\|_2$. Если $T\colon E(\mathcal{M}_1,\tau_1)\to F(\mathcal{M}_2,\tau_2)$ — сюръективная изометрия, то существуют две последовательности элементов $\{A_n\}_{1\le n<\infty}\subset F(\mathcal{M}_2,\tau_2)$ с попарно дизъюнктными правыми носителями и $\{B_n\}_{1\le n<\infty}\subset F(\mathcal{M}_2,\tau_2)$ с попарно дизъюнктными левыми носителями, сюръективный иорданов $*$-изоморфизм $J\colon \mathcal{M}_1\to\mathcal{M}_2$ и центральный проектор $z\in\mathcal{M}_2$ такие, что для любого $x\in E(M_1,\tau_1)\cap\mathcal{M}_1$ имеем*

$$T(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_nJ(x)z+J(x)(1-z)B_n),$$

где ряд сходится по норме пространства $F(\mathcal{M}_2,\tau_2)$.

Если $\mathcal{M}$ имеет атомы с разными следами, то существует симметричное пространство $E(\mathcal{M},\tau)$ (норма которого не пропорциональна $\|\cdot\|_2$) и изометрия на $E(\mathcal{M},\tau)$, которые не имеют форму (1). Это показывает, что предположение, наложенное на алгебру фон Неймана в теореме 2 является точным.

3. СИММЕТРИЧНАЯ СТРУКТУРА

Пусть C_E — это идеал в $B(\mathcal{H})$, порожденный симметричным пространством последовательностей E. Мы говорим, что C_E имеет единственную симметричную структуру, если из изоморфизма C_E некоторому идеалу C_F, порожденному симметричным пространством последовательностей F, следует, что $E=F$ с эквивалентными нормами. На Международной конференции по теории банаховых пространств и ее приложениям в Кенте, Огайо (август 1979 г.), А. Пелчинский поставил следующий вопрос о строении идеалов компактных операторов в $B(H)$ (см. также [14, Вопрос (B)]): Имеет ли идеал C_E, порожденный произвольным сепарабельным симметричным пространством последовательностей E, единственную симметричную структуру?

Предположим, дополнительно, что $\|e\|_E=1$ для любого атома $e\in\mathcal{M}$, если $\mathcal{M}=B(\mathcal{H})$ со стандартным следом; $\|\mathbf{1}\|_E=1$, если $\mathcal{M}$ — это II_1-фактор с единственным следовым состоянием. Рассмотрим аналог вопроса Пелчинского для изоморфизмов задаваемых изометриями. Будем говорить, что симметричное пространство $E(\mathcal{M},\tau)$ имеет единственную симметричную структуру с точностью до изометрии, если наличие линейной изометрии между симметричными пространствами $E(\mathcal{M},\tau)$ и $F(\mathcal{M},\tau)$ влечет совпадение пространств $E(\mathcal{M},\tau)$ и $F(\mathcal{M},\tau)$. Следующий результат является некоммутативным аналогом [15, Theorem 1] и отвечает на аналог вопроса Пелчинского сформулированного выше.

Следствие 1. *Пусть $\mathcal{M}=B(\mathcal{H})$ со стандартным следом* Tr *или же $\mathcal{M}$ — это II_1-фактор с единственным точным следовым состоянием τ. Любое сепарабельное симметричное пространство $E(\mathcal{M},\tau)$ на алгебре $(\mathcal{M},\tau)$ имеет единственную симметричную структуру с точностью до изометрии.*

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят Е.М. Семенова и М.Г. Зайденберга за интерес к работе.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования частично выполнены за счет средств Австралийского исследовательского совета.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fleming R., Jamison J.* Isometries on Banach spaces: function spaces. Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. V. 129. Boca Raton (FL): Chapman & Hall/CRC, 2003.
2. *Овчинников В. s*-числа измеримых операторов // Функц. анализ и его прил. 1970. Т. 4. № 3. С. 78–85.
3. *Овчинников В.* Симметричные пространства измеримых операторов // ДАН СССР. 1970. Т. 191. С. 769–771.
4. *Зайденберг М.* К изометрической классификации симметричных пространств // ДАН СССР. 1977. Т. 234. № 2. С. 283–286.
5. *Sinclair A.* Jordan homomorphisms and derivations on semisimple Banach algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 1970. V. 24. P. 209–214.
6. *Sourour A.* Isometries of norm ideals of compact operators // J. Funct. Anal. 1981. V. 43. V. 69–77.
7. *Sukochev F.* Isometries of symmetric operator spaces associated with AFD factors of type II and symmetric vector-valued spaces // Integr. Equat. Oper. Th. 1996. V. 26. P. 102–124.
8. *Банах С.* Теория линейных операций. М.–Ижевск: РХД, 2001.
9. *Kadison R.* Isometries of operator algebras // Ann. of Math. 1951. V. 54. P. 325–338.

10. *Yeadon F.* Isometries of non-commutative L^p spaces // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1981. V. 90. P. 41–50.
11. *Chilin V., Medzhitov A., Sukochev F.* Isometries of non-commutative Lorentz spaces // Math. Z. 1989. V. 200. P. 527–545.
12. *Браверман М., Семенов Е.* Изометрии симметричных пространств // ДАН СССР. 1974. Т. 217. С. 257–259.
13. *Меджитов А., Сукочев Ф.* Изометрии некоммутативных пространств Лоренца // Докл. АН УзССР. 1988. Т. 4. С. 11–12.
14. *J. Arazy* Isomorphisms of unitary matrix spaces / Banach Space Theory and Its Applications (Bucharest, 1981) // Lecture Notes in Math. 991, B.; N.Y.: Springer–Verlag, 1983. P. 1–6.
15. *Abramovich Yu., Zaidenberg M.* A rearrangement invariant space isometric to L_p coincides with L_p / Interaction between functional analysis, harmonic analysis, and probability (Columbia, MO, 1994) // Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 175, N.Y.: Dekker, 1996. P. 13–18.

ISOMETRIES OF NONCOMMUTATIVE SYMMETRIC SPACES

F. A. Sukochev[a,b] and Jinghao Huang[a]

[a] *School of Mathematics and Statistics, University of New South Wales, Kensington, Australia*

[b] *Department of Mathematics, North-Ossetian State University, Vladikavkaz, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS B.S. Kashin

Let $\mathcal{M}$ be an atomless semifinite von Neumann algebra equipped with a faithful normal semifinite trace τ (or else, an atomic von Neumann algebra with all atoms having the same trace) acting on separable Hilbert space $\mathcal{H}$. Let $E(\mathcal{M},\tau)$ be a separable symmetric space of τ-measurable operators, whose norm is not proportional to the Hilbert norm $\|\cdot\|_2$ on $L_2(\mathcal{M},\tau)$. We provide a description of all bounded Hermitian operators on $E(\mathcal{M},\tau)$ and all surjective isometries of this space.

Keywords: surjective isometries, Hermitian operators, semifinite von Neumann algebra, symmetric spaces