ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 496, с. 56–58

МАТЕМАТИКА

УДК 517.984.52

РАВНОСХОДИМОСТЬ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С ПОТЕНЦИАЛОМ–РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ В ШКАЛАХ ПРОСТРАНСТВ

© 2021 г. А. М. Савчук[1,*], И. В. Садовничая[1,]**

Представлено академиком РАН Б.С. Кашиным 15.12.2020 г.
Поступило 18.12.2020 г.
После доработки 28.12.2020 г.
Принято к публикации 29.12.2020 г.

Изучается вопрос равносходимости спектральных разложений двух операторов Штурма–Лиувилля на отрезке $[0, \pi]$, порожденных дифференциальными выражениями $l_1(y) = -y'' + q_1(x)y$ и $l_2 = -y'' + q_2(x)y$ и одинаковыми регулярными по Биркгофу краевыми условиями. Потенциалы предполагаются сингулярными в том смысле, что $q_j(x) = u_j'(x)$, $u_j \in L_\varkappa[0,\pi]$ для некоторого $\varkappa \in [2,\infty]$ (производные здесь понимаются в смысле распределений). Доказано, что равносходимость по метрике пространства $L_\nu[0,\pi]$ имеет место для любой раскладываемой функции $f \in L_\mu[0,\pi]$ при условии $\frac{1}{\varkappa} + \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\nu} \le 1$, $\mu, \nu \in [1,\infty]$ за исключением случая $\varkappa = \nu = \infty$, $\mu = 1$.

Ключевые слова: оператор Штурма–Лиувилля, потенциалы–распределения, равносходимость спектральных разложений

DOI: 10.31857/S2686954321010112

Рассмотрим оператор Штурма–Лиувилля $\mathscr{L}_{q,U}$, порожденный дифференциальным выражением

$$l(y) = -y'' + q(x)y = -(y^{[1]})' - u(x)y^{[1]} - u^2(x)y,$$
где $\quad y^{[1]} = y' - u(x)y,$

и регулярными краевыми условиями

$$U_j(y) = a_{j1}y(0) + a_{j2}y^{[1]}(0) + b_{j1}y(\pi) + b_{j2}y^{[1]}(\pi) = 0, \quad j = 1, 2.$$

Предполагается, что $q = u'$, где комплекснозначная функция $u \in L_2[0,\pi]$, а производная понимается в смысле распределений. Оператор $\mathscr{L}_{q,U}$ мы определяем в $L_2[0,\pi]$ на области

$$\mathfrak{D}(\mathscr{L}_{q,U}) = \{y, y^{[1]} \in W_1^1[0,\pi] : l(y) \in L_2[0,\pi]\},$$

где W_1^1 – классическое пространство Соболева. Обозначим через J_{ij} определитель, составленный из i-го и j-го столбца матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Напомним, что условие регулярности (по Биркгофу) оператора $\mathscr{L}_{q,U}$ заключается в выполнении одного из следующих условий:

1) $J_{42} \ne 0$,

2) $J_{42} = 0$, $J_{14} + J_{32} \ne 0$,

3) $J_{42} = J_{14} = J_{32} = 0$, $J_{12} + J_{34} = 0$, $J_{13} \ne 0$.

При этом в случаях 1) и 3) всегда, а в случае 2) при дополнительном условии

$$J_{14} + J_{32} \ne \pm(J_{12} + J_{34})$$

оператор называется сильно регулярным. В противном случае будем называть оператор слабо регулярным.

В работе [1] доказаны следующие результаты.

Т е о р е м а 1. *Произвольный регулярный оператор $\mathscr{L}_{q,U}$ имеет компактную в $L_2[0,\pi]$ резольвенту и дискретный спектр $\{z_n\}_1^\infty$, лежащий в некоторой параболе $P_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}\sqrt{z}| \le r\}$. При этом в случае сильной регулярности найдется такой номер N и число $d > 0$, что $\left|\sqrt{z_n} - \sqrt{z_m}\right| \ge d$ при всех $n \ne m$, боль-*

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: savchuk@cosmos.msu.ru*
***E-mail: ivsad@yandex.ru*

ших N. В случае слабой регулярности выполнено $\left|\sqrt{z_{n+1}}-\sqrt{z_n}\right| = o(1)$ при $n\to\infty$.

Обозначим $\mathcal{P}_n$ — спектральные проекторы на двумерные собственные подпространства, отвечающие точкам спектра с номерами $2n$ и $2n-1$. Зафиксируем произвольный номер N и положим $\mathcal{H}_n = \mathrm{Rn}\mathcal{P}_n$, $n > N$, и определим дополнительно подпространство $\mathcal{H}_0 := \mathrm{Rn}\sum_{n\le N}\mathcal{P}_n$.

Теорема 2. *Система собственных и присоединенных функций $\{y_n\}_1^\infty$ сильно регулярного оператора $\mathcal{L}_{q,U}$ (мы нормируем собственные функции условием $\|y_n\| = 1$) образует базис Рисса в пространстве $L_2[0,\pi]$. В случае слабой регулярности система образует базис Рисса со скобками. А именно, найдется такой номер N, что система $\{\mathcal{H}_0,\mathcal{H}\}_{nn>N}$ образует базис Рисса из подпространств.*

Поставим задачу о равносходимости спектральных разложений.

Определение 1. Пусть

$$S_m(f) = \sum_{n=1}^{m}[\langle f, w_{2n}\rangle y_{2n} + \langle f, w_{2n-1}\rangle y_{2n-1}],\quad m = 1, 2, \ldots,$$

где $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — система собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}_{q,U}$, а $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — биортогональная к ней система. Положим также

$$S_m^0(f) = \sum_{n=1}^{m}[\langle f, w_{2n}^0\rangle y_{2n}^0 + \langle f, w_{2n-1}^0\rangle y_{2n-1}^0],\quad m = 1, 2, \ldots,$$

где $\{y_n^0\}_{n\in\mathbb{N}}$ — система собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ с нулевым потенциалом, а $\{w_n^0\}_{n\in\mathbb{N}}$ — биортогональная к ней система. Под равносходимостью этих разложений мы будем понимать утверждения вида

$$\|S_m(f) - S_m^0(f)\| \to 0 \quad \text{при} \quad m\to\infty.$$

Такое определение равносходимости позволяет нам вести рассуждения одновременно и в случае сильной, и в случае слабой регулярности. Сформулируем наш основной результат.

Теорема 3. *Рассмотрим оператор $\mathcal{L}_{q,U}$ с регулярными по Биркгофу краевыми условиями U. Пусть $q = u'$, где $u \in L_\kappa[0,\pi]$, $\kappa \ge 2$.*

Тогда для любой функции $f \in L_\mu[0,\pi]$ имеет место равномерная равносходимость

$$\left\|S_m(f) - S_m^0(f)\right\|_{L_\nu[0,\pi]} \to 0 \quad \text{при} \quad m\to+\infty,$$

если $\kappa\in[2,+\infty]$, $\mu\in[1,+\infty]$, $\nu\in[1,+\infty]$ и индексы κ, μ и ν удовлетворяют соотношению

$$\frac{1}{\kappa}+\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\nu}\le 1,$$

за исключением случая $\kappa = \nu = +\infty$, $\mu = 1$.

Естественно, спектральные разложения S_m^0 невозмущенного оператора здесь можно заменить на разложения $\tilde{S}_m$ произвольного другого оператора Штурма–Лиувилля $\mathcal{L}_{\tilde{q},U}$ с теми же краевыми условиями и потенциалом $\tilde{q}$ того же класса (т.е. $\tilde{q} = \tilde{u}$, где $\tilde{u} \in L_\kappa[0,\pi]$).

Следствие 1. *Взяв $\nu = \mu$, получаем, что система $\{y_n\}_1^\infty$ является условным базисом (в случае слабой регулярности — условным базисом со скобками) в пространстве $L_\mu[0,\pi]$ для любого $\mu\in(1,\infty)$.*

Доказательство основной теоремы проводится с помощью перехода к системе Дирака. Замена

$$y_1 = \frac{1}{2}(\lambda y - iy^{[1]}),\qquad y_2 = \frac{1}{2}(\lambda y + iy^{[1]})$$

сводит уравнение $l(y) = \mathbf{z}y + f$ к виду

$$B\mathbf{y}' + P(x,\lambda)\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y} + \mathbf{f},$$

где

$$B = \begin{pmatrix} -i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix},$$

$$P(x,\lambda) = \begin{pmatrix} -\dfrac{u^2(x)}{2\lambda} & iu(x) - \dfrac{u^2(x)}{2\lambda}\\ -iu(x) - \dfrac{u^2(x)}{2\lambda} & -\dfrac{u^2(x)}{2\lambda}\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} f\\ f\end{pmatrix}.$$

Новые краевые условия обозначим через $V(\mathbf{z})$ (они зависят от спектрального параметра $\mathbf{z}$). Получим, что матрица новых краевых условий имеет вид

$$\mathcal{V}(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} \sqrt{\mathbf{z}}a_{11}-ia_{12} & \sqrt{\mathbf{z}}a_{11}+ia_{12} & \sqrt{\mathbf{z}}b_{11}-ib_{12} & \sqrt{\mathbf{z}}b_{11}+ib_{12}\\ \sqrt{\mathbf{z}}a_{21}-ia_{22} & \sqrt{\mathbf{z}}a_{21}+ia_{22} & \sqrt{\mathbf{z}}b_{21}-ib_{22} & \sqrt{\mathbf{z}}b_{21}+ib_{22}\end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что в условиях регулярности определители $V_{14}(\mathbf{z})$ и $V_{23}(\mathbf{z})$ отличны от нуля при больших по модулю $\mathbf{z}$, т.е. оператор Дирака также оказывается регулярным при достаточно больших значениях спектрального параметра.

Для регулярного оператора Дирака с потенциалом $P(x)$ и краевыми условиями V, не зависящими от параметра $\mathbf{z}$, теорема о равносходимости доказана в [2]. Заметим теперь, что зависимость от $\mathbf{z}$ потенциала заключается в наличии в потенциале слагаемых вида $\frac{u^2(x)}{2\sqrt{\mathbf{z}}}$, т.е. является асимптотически слабой. То же справедливо и для краевых условий $V(\mathbf{z})$. Это позволяет перенести доказательство работы [2] на полученную систему.

С историей вопроса и близкими результатами можно ознакомиться в работах [3–9].

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 19–01–00240).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Савчук А.М., Шкаликов А.А.* // Труды ММО. 2003. Т. 64. С. 159–219.
2. *Садовничая И.В.* // Труды МИАН. 2016. Т. 293. С. 288–316.
3. *Ильин В.А.* // Дифф. уравнения. 1991. Т. 27. № 4. С. 577–597.
4. *Ломов И.С.* // Дифф. уравнения. 2001. Т. 37. № 3. С. 328–342; № 5. С. 648–660.
5. *Гомилко А.М., Радзиевский Г.В.* // ДАН. 1991. Т. 316. № 2. С. 265–270.
6. *Minkin A.* // J. Math. Sci. 1999. V. 96. P. 3631–3715.
7. *Винокуров В.А., Садовничий В.А.* // ДАН. 2001. Т. 380. № 6. С. 731–735.
8. *Djakov P., Mityagin B.* // J. of Diff. Eq. 2013. V. 255. № 10. P. 3233–3283.
9. *Nazarov A.I., Stolyarov D.M., Zatitskiy P.B.* // J. of Spectral Th. 2014. V. 4. № 2. P. 365–389.

EQUICONVERGENCE OF SPECTRAL DECOMPOSITIONS FOR STURM–LIOUVILLE OPERATOR WITH POTENTIAL–DISTRIBUTION IN THE SCALE OF SPACES

A. M. Savchuk[a] and I. V. Sadovnichaya[a]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS B.S. Kashin

In this paper, we study the problem of equiconvergence of spectral decompositions of two Sturm–Liouville operators on the segment $[0, \pi]$ generated by differential expressions $l_1(y) = -y'' + q_1(x)y$ and $l_2 = -y'' + q_2(x)y$ and the same Birkhoff regular boundary conditions. The potentials are assumed to be singular: $q_j(x) = u_j'(x)$, $u_j \in L_\varkappa[0, \pi]$ for some $\kappa \in [2, \infty]$ (derivatives are understood in the sense of distributions). It is proved that the equiconvergence in the space $L_\nu[0, \pi]$ holds for any function $f \in L_\mu[0, \pi]$, if $\frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\nu} \le 1$, $\mu, \nu \in [1, \infty]$, except case $\kappa = \nu = \infty$, $\mu = 1$.

Keywords: Sturm–Liouville operator, distributional potentials, equiconvergence of spectral decompositions