ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 496, с. 73–78

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977

СУБРИМАНОВЫ (2, 3, 5, 6)-СТРУКТУРЫ

© 2021 г. Ю. Л. Сачков[1,*], Е. Ф. Сачкова[1]

Представлено академиком РАН Р.В. Гамкрелидзе 25.10.2020 г.
Поступило 26.10.2020 г.
После доработки 28.12.2020 г.
Принято к публикации 28.12.2020 г.

Описаны все алгебры Карно с вектором роста (2, 3, 5, 6), их нормальные формы, различающий их инвариант, и замена базиса, переводящая такую алгебру в нормальную форму. Для каждой нормальной формы вычислены функции Казимира и симплектические слоения на коалгебре Ли. Описаны инвариант и нормальные формы левоинвариантных (2, 3, 5, 6)-распределений. Получена классификация, с точностью до изометрий, всех левоинвариантных субримановых структур на (2, 3, 5, 6)-группах Карно.

Ключевые слова: субриманова геометрия, алгебры Карно, группы Карно, левоинвариантные субримановы структуры

DOI: 10.31857/S2686954321010100

Субримановы структуры [1] стратифицированы по глубине, т.е. по минимальному порядку скобок Ли, необходимому для порождения касательного пространства из векторных полей базиса. Сложность субримановых (СР) структур существенно растет с ростом их глубины. В настоящее время сколь-нибудь детально исследованы СР структуры глубины не более трех [2–8]. Поэтому представляет большой интерес систематическое исследование СР структур глубины 4. Изучение простейшей из таких структур – нильпотентной СР структуры с вектором роста (2, 3, 5, 8), см. далее пример 2, – начато в работах [9–11]. В данной работе получена полная классификация нильпотентных СР структур и распределений с вектором роста (2, 3, 5, 6). Показано, что все такие структуры суть фактор-структуры нильпотентной СР структуры с вектором роста (2, 3, 5, 8).

1. СУБРИМАНОВЫ ФАКТОР-СТРУКТУРЫ

Все алгебры Ли в данной работе рассматриваются над полем $\mathbb{R}$.

Определение 1. Нильпотентная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется алгеброй Карно, если:

1) она градуирована:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(1)} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}^{(s)},$$

$$[\mathfrak{g}^{(i)}, \mathfrak{g}^{(j)}] \subset \mathfrak{g}^{(i+j)}, \quad \mathfrak{g}^{(k)} = \{0\} \quad \text{при} \quad k > s, \tag{1}$$

2) порождена первой компонентой:

$$\mathrm{Lie}(\mathfrak{g}^{(1)}) = \mathfrak{g}. \tag{2}$$

Соответствующая связная односвязная группа Ли называется группой Карно.

Условия 1) и 2) эквивалентны условию

$$[\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(i)}] = \mathfrak{g}^{(i+1)}, \quad \mathfrak{g}^{(k)} = \{0\} \quad \text{при} \quad k > s.$$

Определение 2. Вектором роста алгебры Карно $\mathfrak{g}$ называется вектор

$$(n_1, \ldots, n_s), \quad n_j = \sum_{i=1}^{j} \dim \mathfrak{g}^{(i)}.$$

Вектор $(n_1, \ldots, n_s)$ есть вектор роста левоинвариантного распределения на группе Ли алгебры Ли $\mathfrak{g}$, порожденного подпространством $\mathfrak{g}^{(1)} \subset \mathfrak{g}$.

Пусть M есть гладкое многообразие. Субриманова структура на M [1] есть пара (Δ, g), состоящая из векторного распределения $\Delta \subset TM$ и скалярного произведения g в Δ.

Пусть G – группа Ли и $\mathfrak{g}$ – ее алгебра Ли. Левоинвариантная СР структура на группе Ли G состоит из левоинвариантного распределения на G и левоинвариантного скалярного произведения в распределении. Такая структура задается подпространством $\Delta \subset \mathfrak{g}$ и скалярным произведением g в Δ. В этом случае будем говорить, что (Δ, g) есть СР структура в алгебре $\mathfrak{g}$.

[1] *Институт программных систем им. А.К. Айламазяна Российской академии наук, Переславль-Залесский, Ярославская обл., Россия*

**E-mail: yusachkov@gmail.com*

Левоинвариантные СР структуры на группах Карно возникают как нильпотентные аппроксимации общих СР структур на гладких многообразиях [1].

Определение 3. Пусть (Δ, g) есть СР структура в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, и пусть $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$ есть такой идеал, что $\Delta \cap \mathfrak{i} = \{0\}$. Пусть $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ есть фактор-алгебра, а $\pi\colon \mathfrak{g} \to \tilde{\mathfrak{g}}$ – каноническая проекция. Положим $\tilde{\Delta} = \pi(\Delta)$ и $\tilde{g}(\pi(X), \pi(Y)) = g(X, Y)$ для $X, Y \in \Delta$. Тогда $(\tilde{\Delta}, \tilde{g})$ есть СР структура в $\tilde{\mathfrak{g}}$, которую будем называть фактор-структурой СР структуры (Δ, g).

Пример 1. Пусть $\mathfrak{g}^5$ есть свободная нильпотентная алгебра Ли с двумя образующими, глубины 3 (алгебра Картана) – это алгебра Карно с вектором роста (2, 3, 5). Существует базис $\mathfrak{g}^5 = \operatorname{span}(X_1, \dots, X_5)$, в котором ненулевые скобки Ли суть

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = X_4, \quad [X_2, X_3] = X_5.$$

Рассмотрим СР структуру (Δ, g) в $\mathfrak{g}^5$ с ортонормированным репером (X_1, X_2) [8]. Последовательно выбирая в качестве идеала $i \subset \mathfrak{g}^5$ подпространства $\mathbb{R}X_5$, $\operatorname{span}(X_4, X_5)$, $\operatorname{span}(X_3, X_4, X_5)$, получим СР фактор-структуры в алгебре Энгеля (вектор роста (2, 3, 4)) [7], алгебре Гейзенберга (вектор роста (2, 3)) [2] и в двумерной коммутативной алгебре $\mathbb{R}^2$ (вектор роста (2)).

Пример 2. Пусть $\mathfrak{g}^8$ есть свободная нильпотентная алгебра Ли с двумя образующими, глубины 4 – это алгебра Карно с вектором роста (2, 3, 5, 8), назовем ее нильпотентной (2, 3, 5, 8)-алгеброй. Существует базис $\mathfrak{g}^8 = \operatorname{span}(X_1, \dots, X_8)$, в котором ненулевые скобки Ли суть

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = X_4, \quad [X_2, X_3] = X_5, \tag{3}$$

$$\begin{gathered}[X_1, X_4] = X_6, \quad [X_1, X_5] = [X_2, X_4] = X_7, \\ [X_2, X_5] = X_8.\end{gathered} \tag{4}$$

Рассмотрим СР структуру (Δ, g) в $\mathfrak{g}^8$ с ортонормированным репером (X_1, X_2) [9–11]. Легко видеть, что эта СР структура – единственная, с точностью до автоморфизма алгебры Ли, СР структура в $\mathfrak{g}^8$ ранга 2, удовлетворяющая условию $\operatorname{Lie}(\Delta) = \mathfrak{g}^8$, назовем ее нильпотентной СР (2, 3, 5, 8)-структурой. Будем далее использовать двойственный базис в коалгебре Ли $(\mathfrak{g}^8)^*$:

$$\omega_1, \dots, \omega_8 \in (\mathfrak{g}^8)^*, \quad \omega_i(X_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, 8.$$

Цель данной работы – описать для структуры (Δ, g) все СР фактор-структуры для двумерных идеалов $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}^8$. Это в точности нильпотентные СР структуры с вектором роста (2, 3, 5, 6).

Легко видеть, что двумерное подпространство $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}^8$ есть идеал тогда и только тогда, когда $\mathfrak{i} \subset Z(\mathfrak{g}) = \operatorname{span}(X_6, X_7, X_8)$. Поэтому любая фактор-алгебра $\mathfrak{g}^8/\mathfrak{i}$ по двумерному идеалу $\mathfrak{i}$ есть алгебра Карно с вектором роста (2, 3, 5, 6). Опишем такие алгебры.

2. АЛГЕБРЫ КАРНО С ВЕКТОРОМ РОСТА (2, 3, 5, 6)

Теорема 1. (1) *В любой алгебре Карно $\mathfrak{g}$ с вектором роста (2, 3, 5, 6) можно выбрать базис $\mathfrak{g} = \operatorname{span}(X_1, \dots, X_6)$, в котором все ненулевые скобки Ли имеют вид*

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = X_4, \quad [X_2, X_3] = X_5, \tag{5}$$

$$\begin{gathered}[X_1, X_4] = \alpha X_6, \quad [X_1, X_5] = [X_2, X_4] = \beta X_6, \\ [X_2, X_5] = \gamma X_6,\end{gathered} \tag{6}$$

$$(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

(2) *Любые две алгебры Карно с вектором роста (2, 3, 5, 6), имеющие пропорциональные тройки (α, β, γ) в (6), изоморфны между собой. Будем поэтому обозначать такие алгебры как $\mathfrak{g}^6_{\alpha:\beta:\gamma}$, $(\alpha : \beta : \gamma) \in \mathbb{R}P^2$.*

(3) *Имеет место изоморфизм алгебр Ли*

$$\begin{gathered}\mathfrak{g}^6_{\alpha:\beta:\gamma} \cong \mathfrak{g}^8/(\ker \omega \cap Z(\mathfrak{g}^8)), \\ \omega = \alpha\omega_6 + \beta\omega_7 + \gamma\omega_8 \neq 0.\end{gathered}$$

Каждому базису в алгебре $\mathfrak{g}^6_{\alpha:\beta:\gamma}$ с таблицей умножения (5), (6) соответствует квадратичная форма $Q(x, y) = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$. В зависимости от знака ее дискриминанта $\mathbf{s} = \operatorname{sgn}(\alpha\gamma - \beta^2) \in \{0, \pm 1\}$ будем называть алгебру $\mathfrak{g}^6_{\alpha:\beta:\gamma}$:

– параболической при $\mathbf{s} = 0$,

– эллиптической при $\mathbf{s} = 1$,

– гиперболической при $\mathbf{s} = -1$.

Замечание 1. *Отметим топологию множеств троек $(\alpha : \beta : \gamma) \in \mathbb{R}P^2$, в зависимости от числа $\mathbf{s} = \operatorname{sgn}(\alpha\gamma - \beta^2)$:*

$$\begin{aligned}A_P &= \{(\alpha : \beta : \gamma) \in \mathbb{R}P^2 \mid \mathbf{s} = 0\}, \\ A_E &= \{(\alpha : \beta : \gamma) \in \mathbb{R}P^2 \mid \mathbf{s} = 1\}, \\ A_H &= \{(\alpha : \beta : \gamma) \in \mathbb{R}P^2 \mid \mathbf{s} = -1\}.\end{aligned}$$

Топологически A_P есть окружность, A_E есть открытый диск, а $A_H = \mathbb{R}P^2 \setminus (A_P \cup A_E)$ есть проективная плоскость с вырезанной дыркой, т.е. лента Мёбиуса.

Приведем несколько примеров алгебр Карно с вектором роста (2, 3, 5, 6), вместе с ненулевыми скобками Ли в соответствующем базисе. Напомним также обозначения $N_{6,2,*}$ этих алгебр, используемые в работах [12, 13]. В диссертации М.-П. Гонг [12] получена классификация нильпотентных алгебр Ли размерности ≤ 7, а в препринте Э. Ле Донне и Ф. Трипальди [13] описаны все алгебры Карно размерности ≤ 7.

П р и м е р 3. Параболическая алгебра $\mathfrak{g}^6_{1:0:0} = N_{6,2,7} = \operatorname{span}(X_1, \ldots, X_6)$,

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = X_4,$$
$$[X_2, X_3] = X_5, \quad [X_1, X_4] = X_6.$$

П р и м е р 4. Гиперболическая алгебра $\mathfrak{g}^6_{1:0:(-1)} = N_{6,2,5} = \operatorname{span}(X_1, \ldots, X_6)$,

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = X_4,$$
$$[X_2, X_3] = X_5, \quad [X_1, X_4] = -[X_2, X_5] = X_6.$$

П р и м е р 5. Эллиптическая алгебра $\mathfrak{g}^6_{1:0:1} = N_{6,2,5a} = \operatorname{span}(X_1, \ldots, X_6)$,

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = X_4,$$
$$[X_2, X_3] = X_5, \quad [X_1, X_4] = [X_2, X_5] = X_6.$$

Т е о р е м а 2. (1) *Алгебры* $\mathfrak{g}^6_{1:0:0}, \mathfrak{g}^6_{1:0:(-1)}, \mathfrak{g}^6_{1:0:1}$ *попарно неизоморфны. Любая алгебра* $\mathfrak{g}^6_{\alpha:\beta:\gamma}$, $(\alpha : \beta : \gamma) \in \mathbb{R}P^2$, *изоморфна одной из этих алгебр*.

(2) *Число* $\mathbf{s} = \operatorname{sgn}(\alpha\gamma - \beta^2) \in \{0, \pm 1\}$ *есть инвариант алгебры Карно* $\mathfrak{g}$, *будем называть его сигнатурой алгебры* $\mathfrak{g}$.

(3) *Алгебры* $\mathfrak{g}^6_{\alpha:\beta:\gamma}$ *различаются сигнатурой* $\mathbf{s}$:

$$\mathfrak{g}^6_{\alpha:\beta:\gamma} \cong \mathfrak{g}^6_{1:0:0} \Leftrightarrow \mathbf{s} = 0 \quad \text{(параболическая алгебра)}, \tag{7}$$

$$\mathfrak{g}^6_{\alpha:\beta:\gamma} \cong \mathfrak{g}^6_{1:0:(-1)} \Leftrightarrow \mathbf{s} = -1 \quad \text{(гиперболическая алгебра)}, \tag{8}$$

$$\mathfrak{g}^6_{\alpha:\beta:\gamma} \cong \mathfrak{g}^6_{1:0:1} \Leftrightarrow \mathbf{s} = 1 \quad \text{(эллиптическая алгебра)}. \tag{9}$$

Таким образом, сигнатура $\mathbf{s} \in \{0, \pm 1\}$ есть инвариант, различающий три класса изоморфизма алгебр $\mathfrak{g}^6_{\alpha:\beta:\gamma}$.

З а м е ч а н и е 2. Пункт (1) теоремы 2 доказан впервые в работе Э. Ле Донне и Ф. Трипальди [13]. Нами он доказан независимо, вместе с алгоритмом приведения таблицы умножения в (2, 3, 5, 6)-алгебре к нормальной форме примеров 3–5.

Для отыскания замены базиса в алгебре $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^6_{\alpha:\beta:\gamma}$, приводящей его к одной из нормальных форм примеров 3–5, достаточно привести квадратичную форму $Q(x, y) = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$ к сумме квадратов, применить эту замену к базису (X_1, X_2) пространства $\mathfrak{g}^{(1)}$, и нормировать вектор X_6, порождающий пространство $\mathfrak{g}^{(4)}$.

3. НИЛЬПОТЕНТНЫЕ (2, 3, 5, 6)-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И СУБРИМАНОВЫ СТРУКТУРЫ

О п р е д е л е н и е 4. Пусть $\mathfrak{g}$ есть алгебра Карно с вектором роста (2, 3, 5, 6). Будем называть н и л ь п о т е н т н о й с у б р и м а н о в о й (2, 3, 5, 6)-с т р у к т у р о й субриманову структуру (Δ, g) в $\mathfrak{g}$, удовлетворяющую условиям:

$$\dim \Delta = 2, \quad \operatorname{Lie}(\Delta) = \mathfrak{g}, \tag{10}$$

или, что эквивалентно, равенству $\Delta \oplus \mathfrak{g}^{(2)} \oplus \mathfrak{g}^{(3)} \oplus \mathfrak{g}^{(4)} = \mathfrak{g}$. Соответствующую плоскость $\Delta \subset \mathfrak{g}$ будем называть н и л ь п о т е н т н ы м (2, 3, 5, 6)-распределением в $\mathfrak{g}$.

Вектор (2, 3, 5, 6) есть вектор роста левоинвариантного распределения на группе Ли G алгебры Ли $\mathfrak{g}$, заданного плоскостью $\Delta \subset \mathfrak{g}$.

Т е о р е м а 3. *Пусть* $\mathfrak{g}$ *есть алгебра Карно с вектором роста* (2, 3, 5, 6) *сигнатуры* $\mathbf{s} \in \{0, \pm 1\}$. *Для любого нильпотентного* (2, 3, 5, 6)*-распределения* $\Delta \subset \mathfrak{g}$ *существует репер* $\Delta = \operatorname{span}(X_1, X_2)$, *для которого выполняются следующие соотношения*:

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = X_4, \quad [X_2, X_3] = X_5,$$
$$[X_1, X_4] = X_6, \quad [X_1, X_5] = [X_2, X_4] = 0,$$
$$[X_2, X_5] = \mathbf{s} X_6.$$

Т е о р е м а 4. *Пусть* $\mathfrak{g}$ *есть алгебра Карно с вектором роста* (2, 3, 5, 6). *Для любой нильпотентной СР* (2, 3, 5, 6)*-структуры в алгебре* $\mathfrak{g}$ *существует ортонормированный репер* (X_1, X_2) *и число* $\nu \in [-1, 1]$, *для которых выполняются следующие соотношения*:

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = X_4, \quad [X_2, X_3] = X_5, \tag{11}$$

$$[X_1, X_4] = X_6, \quad [X_1, X_5] = [X_2, X_4] = 0, \quad [X_2, X_5] = \nu X_6. \tag{12}$$

Будем называть число $\nu \in [-1, 1]$ из равенств (12) каноническим параметром СР структуры (Δ, g). Легко видеть, что ν равно отношению меньшего по модулю собственного значения квадратичной формы Q к большему собственному значению. Более того, $\mathbf{s} = \operatorname{sgn} \nu$.

Т е о р е м а 5. *Канонический параметр* $\nu \in [-1, 1]$ *есть инвариант нильпотентной СР* (2, 3, 5, 6)*-структуры*.

Пусть (Δ, g) – СР структура на многообразии M. Соответствующее СР расстояние d [1] превращает M в метрическое пространство. Напомним, что изометрия между метрическими пространствами (M, d) и $(\tilde{M}, \tilde{d})$ – это такое отображение F: $M \to \tilde{M}$, что

$$d(x, y) = \tilde{d}(F(x), F(y)), \quad x, y \in M.$$

Метрической группой [15] называется группа Ли с левоинвариантным расстоянием, индуцирующим топологию многообразия на этой группе. В частности, любая группа Карно есть метрическая группа. В работе В. Кивиоя и Э. Ле Донне [15] доказано, что:

любая изометрия между метрическими группами есть аналитическое отображение,

любая изометрия между связными нильпотентными метрическими группами есть аффинное отображение (т.е. композиция левого сдвига и изоморфизма).

В следующей теореме получена классификация левоинвариантных СР (2, 3, 5, 6)-структур с точностью до изометрий соответствующих групп Карно.

Т е о р е м а 6. *Пусть* $\mathfrak{g}$ *и* $\tilde{\mathfrak{g}}$ *– нильпотентные* (2, 3, 5, 6)*-алгебры Карно, и пусть* G *и* $\tilde{G}$ *– соответствующие группы Карно. Пусть* (Δ, g) *и* $(\tilde{\Delta}, \tilde{g})$ *– нильпотентные СР* (2, 3, 5, 6)*-структуры в* g *и* $\tilde{\mathfrak{g}}$, ν *и* $\tilde{\nu}$ *– соответствующие канонические параметры, а* d *и* $\tilde{d}$ *– соответствующие левоинвариантные СР метрики на* G *и* $\tilde{G}$.

Метрические пространства (G, d) *и* $(\tilde{G}, \tilde{d})$ *изометричны тогда и только тогда, когда* $\nu = \tilde{\nu}$.

Т е о р е м а 7. *Пусть* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^8$ *есть* (2, 3, 5, 8)*-алгебра из примера* 2 *с базисом* $(X_1, \ldots, X_8)$ *согласно* (3), (4), *и пусть* (Δ, g) *есть СР структура в* $\mathfrak{g}$ *с ортонормированным репером* (X_1, X_2). *Пусть* $\mathfrak{i} = \ker \omega \cap Z(\mathfrak{g})$, $\omega = \alpha\omega_6 + \beta\omega_7 + \gamma\omega_8 \neq 0$, *есть любое* 2*-мерное подпространство в* $Z(\mathfrak{g})$. *Тогда СР фактор-структура* $(\tilde{\Delta}, \tilde{g})$ *есть одна из СР* (2, 3, 5, 6)*-структур в* $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$:

(1) *в параболическом случае* $\mathbf{s} = 0$ *выполнено* $\tilde{\mathfrak{g}} \cong \mathfrak{g}^6_{1:0:0}$,

(2) *в гиперболическом случае* $\mathbf{s} = -1$ *выполнено* $\tilde{\mathfrak{g}} \cong \mathfrak{g}^6_{1:0:(-1)}$,

(3) *в эллиптическом случае* $\mathbf{s} = 1$ *выполнено* $\tilde{\mathfrak{g}} \cong \mathfrak{g}^6_{1:0:1}$.

Обратно, любая нильпотентная (2, 3, 5, 6)*-структура в каждой из этих алгебр реализуется как фактор-структура нильпотентной* (2, 3, 5, 8)*-структуры* (Δ, g).

З а м е ч а н и е 3. В работе Н. Боизо и Ж.-П. Готье [14] рассмотрена СР структура в эллиптической алгебре $\mathfrak{g}^6_{1:0:1}$ с каноническим параметром $\nu = 1$. Доказано, что для этой структуры вертикальная подсистема гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина [1] интегрируема по Лиувиллю. В работе [11] эта гамильтонова система проинтегрирована.

4. ФУНКЦИИ КАЗИМИРА И СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ СЛОЕНИЯ

Напомним некоторые базовые понятия симплектической геометрии. Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли, а $\mathfrak{g}^*$ – коалгебра Ли (двойственное пространство к $\mathfrak{g}$).

Любая функция $h \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ называется гамильтонианом. Для любых гамильтонианов f, g определена скобка Пуассона

$$\{f, g\}(\lambda) = \langle \lambda, [df_\lambda, dg_\lambda] \rangle, \quad \lambda \in \mathfrak{g}^*.$$

Функцией Казимира (на подмногообразии $M \subset \mathfrak{g}^*$) называется любой гамильтониан f, коммутирующий в смысле скобки Пуассона со всеми гамильтонианами:

$$\{f, h\}(\lambda) = 0, \quad h \in C^\infty(\mathfrak{g}^*),$$
$$\lambda \in \mathfrak{g}^* \quad (\text{соответственно } \lambda \in M).$$

Симплектическим слоением на $\mathfrak{g}^*$ называется разбиение $\mathfrak{g}^*$ на симплектические листы $L(\lambda)$ – орбиты коприсоединенного действия группы Ли G алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в коалгебре $\mathfrak{g}^*$:

$$L(\lambda) = \{(Ad_x^*)(\lambda) \mid x \in G\}, \quad \lambda \in \mathfrak{g}^*.$$

Рангом скобки Пуассона $\{\cdot, \cdot\}$ в точке $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ называется размерность симплектического листа, проходящего через точку λ, обозначение: $\operatorname{rank}(\lambda)$. Симплектические листы и функции Казимира – инварианты гамильтонова векторного поля

$$\dot{\lambda} = \mathbf{h}(\lambda), \quad \lambda \in \mathfrak{g}^*,$$

для любого гамильтониана h, поэтому они важны для анализа левоинвариантных гамильтонианов на группе Ли алгебры Ли $\mathfrak{g}$, в частности, для исследования левоинвариантных задач оптимального управления на этой группе Ли.

Опишем для коалгебр $\mathfrak{g}^*$ всех алгебр Карно $\mathfrak{g}$ с вектором роста (2, 3, 5, 6) их функции Казимира и симплектические слоения. В каждой из алгебр $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^6_{1:0:0}, \mathfrak{g}^6_{1:0:(-1)}, \mathfrak{g}^6_{1:0:1}$ будем использовать канонический базис $\mathfrak{g} = \operatorname{span}(X_1, \ldots, X_6)$ согласно примерам 3–5, а также соответствующие линейные гамильтонианы $h_1, \ldots, h_6 \in \mathfrak{g}^{**}$, $h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i \rangle$. В каждом случае ниже симплектический лист $L(\lambda)$ есть компонента связности совместных поверхностей уровня функций Казимира на соответствующих подмногообразиях в $\mathfrak{g}^*$.

4.1. Параболическая алгебра $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^6_{1:0:0}$

(1) Если $h_5 h_6 \neq 0$, то $\operatorname{rank}(\lambda) = 4$.

Функции Казимира: h_5, h_6.

(2) Если $h_6 = 0$ и $h_3^2 + h_4^2 + h_5^2 \neq 0$, то $\operatorname{rank}(\lambda) = 2$.

Функции Казимира: h_4, h_5, $\frac{h_3^2}{2} + h_1 h_5 - h_2 h_4$.

(3) Если $h_5 = 0$ и $h_3^2 + h_4^2 + h_6^2 \neq 0$, то $\operatorname{rank}(\lambda) = 2$.

Функции Казимира: h_6, $C_1 = h_3 h_6 - \frac{h_4^2}{2}$, $C_2 = h_2 h_6^2 - C_1 h_4 - \frac{h_4^3}{6}$.

(4) Если $h_3 = \dots = h_6 = 0$, то $\operatorname{rank}(\lambda) = 0$.

Функции Казимира: h_1, h_2.

4.2. Гиперболическая алгебра $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^6_{1:0:(-1)}$

(1) Если $h_6 \neq 0$, то $\operatorname{rank}(\lambda) = 4$.

Функции Казимира: h_6, $h_3 h_6 + \frac{h_4^2 - h_5^2}{2}$.

(2) Если $h_6 = 0$ и $h_3^2 + h_4^2 + h_5^2 \neq 0$, то $\operatorname{rank}(\lambda) = 2$.

Функции Казимира: h_4, h_5, $\frac{h_3^2}{2} + h_1 h_5 - h_2 h_4$.

(3) Если $h_3 = \dots = h_6 = 0$, то $\operatorname{rank}(\lambda) = 0$.

Функции Казимира: h_1, h_2.

4.3. Эллиптическая алгебра $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^6_{1:0:1}$

(1) Если $h_6 \neq 0$, то $\operatorname{rank}(\lambda) = 4$.

Функции Казимира: h_6, $h_3 h_6 - \frac{h_4^2 + h_5^2}{2}$.

(2) Если $h_6 = 0$ и $h_3^2 + h_4^2 + h_5^2 \neq 0$, то $\operatorname{rank}(\lambda) = 2$.

Функции Казимира: h_4, h_5, $\frac{h_3^2}{2} + h_1 h_5 - h_2 h_4$.

(3) Если $h_3 = \dots = h_6 = 0$, то $\operatorname{rank}(\lambda) = 0$.

Функции Казимира: h_1, h_2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены следующие результаты.

Описаны алгебры Карно с вектором роста (2, 3, 5, 6) – фактор-алгебры свободной нильпотентной алгебры Карно $\mathfrak{g}^8$ с двумя образующими, глубины 4. Ранее было известно, что существуют три нормальные формы таких алгебр – параболическая, гиперболическая и эллиптическая. Отыскан различающий эти алгебры инвариант – сигнатура $\mathbf{s} \in \{0, \pm 1\}$, и описана замена базиса, приводящая таблицу умножения в нем к одной из трех нормальных форм.

Исследованы левоинвариантные субримановы структуры с вектором роста (2, 3, 5, 6) – фактор-структуры (единственной) субримановой структуры с вектором роста (2, 3, 5, 8) по двумерному подпространству центра алгебры $\mathfrak{g}^8$. Получена классификация (2, 3, 5, 6)-структур с точностью до изометрий: все они однозначно параметризуются каноническим параметром $\nu \in \{0, \pm 1\}$, таким что $\mathbf{s} = \operatorname{sgn}\nu$. Также получена классификация левоинвариантных (2, 3, 5, 6)-распределений: в каждой из (2, 3, 5, 6)-алгебр (параболической, гиперболической, эллиптической) существует единственное такое распределение, с точностью до изоморфизма.

Для каждой алгебры Карно $\mathfrak{g}$ с вектором роста (2, 3, 5, 6) вычислены ранг скобки Пуассона, функции Казимира и симплектическое слоение в коалгебре Ли $\mathfrak{g}^*$.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарны Л.В. Локуциевскому за ценные замечания по содержанию работы.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 17-11-01387-П) в Институте программных систем им. А.К. Айламазяна Российской академии наук.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Agrachev A., Barilari D., Boscain U.* A Comprehensive Introduction to sub-Riemannian Geometry from Hamiltonian viewpoint, Cambridge: Cambridge University Press, 2019.
2. *Вершик А.М., Гершкович В.Я.* Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи / Итоги науки и техники: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 16. Москва: ВИНИТИ, 1987. С. 5–85.
3. *Берестовский В.Н., Зубарева И.А.* Формы сфер специальных неголономных левоинвариантных внутренних метрик на некоторых группах Ли // Сиб. матем. журн. 2001. Т. 42. № 4. С. 731–748.
4. *Boscain U., Rossi F.* Invariant Carnot-Caratheodory metrics on S^3, $SO(3)$, $SL(2)$ and Lens Spaces // SIAM Journal on Control and Optimization. 2008. V. 47. P. 1851–1878.
5. *Sachkov Yu.L.* Cut locus and optimal synthesis in the sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane // ESAIM: COCV. 2011. V. 17. P. 293–321.
6. *Butt Y.A., Sachkov Yu.L., Bhatti A.I.* Cut Locus and Optimal Synthesis in Sub-Riemannian Problem on the Lie Group $SH(2)$ // JDCS. 2017. V. 23. P. 155–195.

7. *Ardentov A.A., Sachkov Yu.L.* Maxwell Strata and Cut Locus in the Sub-Riemannian Problem on the Engel Group // Regular and Chaotic Dynamics. 2017. V. 22. Is. 8. P. 909–936.

8. *Сачков Ю.Л.* Полное описание стратов Максвелла в обобщенной задаче Дидоны // Матем. сб. 2006. Т. 197. № 6. С. 111–160.

9. *Сачков Ю.Л., Сачкова Е.Ф.* Вырожденные анормальные траектории в субримановой задаче с вектором роста (2, 3, 5, 8) // Дифф. уравнения. 2017. Т. 53. № 3. С. 362–374.

10. *Сачков Ю.Л., Сачкова Е.Ф.* Структура анормальных экстремалей в субримановой задаче с вектором роста (2, 3, 5, 8) // Матем. сб. 2020. Т. 211. № 10. С. 112–138.

11. *Локуциевский Р.В., Сачков Ю.Л.* Об интегрируемости по Лиувиллю субримановых задач на группах Карно глубины 4 и больше // Матем. сб. 2018. Т. 209. № 5. С. 74–119.

12. *Ming-Peng Gong.* Classification of nilpotent Lie algebras of dimension 7 (over algebraically closed fields and $\mathbb{R}$). ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1998. Thesis (Ph.D.). University of Waterloo (Canada).

13. *Le Donne E., Tripaldi F.* A cornucopia of Carnot groups in low dimensions. arXiv:2008.12356.

14. *Boizot N., Gauthier J.-P.* On the motion planning of the ball with a trailer // Math. Control Relat. Fields. 2013. V. 3. № 3. P. 269–286.

15. *Kivioja V., Le Donne E.* Isometries of nilpotent metric groups // J. de l'Ecole polytechnique – Mathématiques. 2017. V. 4. P. 473–482.

SUB-RIEMANNIAN (2, 3, 5, 6)-STRUCTURES

Yu. L. Sachkov[a] and E. F. Sachkova[a]

[a] *Ailamazyan Program Systems Institute of the Russian Academy of Sciences, Pereslavl-Zalessky, Yaroslavskaja region, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS R.V. Gamkrelidze

We describe all Carnot algebras with the growth vector (2, 3, 5, 6), their normal forms, an invariant that separates them, and a change of basis thet transforms such an algebra to a normal form. For each normal form, we compute Casimir functions and symplectic foliations on the Lie coalgebra. We describe an invariant and normal forms of left-invariant (2, 3, 5, 6)-distributions. We obtain a classification, up to isometries, of all left-invariant sub-Riemannian structures on (2, 3, 5, 6)-Carnot groups.

Keywords: sub-Riemannian geometry, Carnot algebras, Carnot groups, left-invariant sub-Riemannian structures