

ЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КВАДРАТИЧНЫМ ИНВАРИАНТОМ КАК УРАВНЕНИЕ ШРЁДИНГЕРА

© 2021 г. Академик РАН В. В. Козлов^{1,*}

Поступило 25.12.2020 г.

После доработки 29.12.2020 г.

Принято к публикации 29.12.2020 г.

Рассматриваются линейные системы дифференциальных уравнений в вещественном гильбертовом пространстве, допускающие инвариант в виде положительно определенной квадратичной формы. Предполагается, что система имеет простой дискретный спектр и что собственные векторы образуют полную ортонормированную систему. При этих условиях линейная система приводится к виду уравнения Шрёдингера с помощью введения подходящей комплексной структуры. В качестве примера такое приведение осуществлено для системы уравнений Максвелла в пространстве без токов. Эти наблюдения позволяют рассматривать динамику, определяемую некоторыми линейными дифференциальными уравнениями математической физики, с точки зрения основных принципов и методов квантовой механики.

Ключевые слова: линейная система, квадратичный инвариант, комплексная структура, уравнение Шрёдингера, скобка Пуассона, неравенство Вейля, закон сохранения, уравнения Максвелла

DOI: 10.31857/S2686954321010070

1. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть V — вещественное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$; случай $\dim V < \infty$ не исключается. Пусть A — линейный оператор с плотной областью определения $D(A) \subset V$, который не предполагается ограниченным. Сопоставим ему линейное дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in D(A). \quad (1)$$

Предположим, что эта линейная система допускает квадратичный инвариант

$$f(x) = (x, x). \quad (2)$$

Это означает, что производная от этой функции в силу системы (1) равна нулю, т.е. $(Ax, x) = 0$ для всех $x \in D(A)$. Но это означает кососимметричность оператора A :

$$(Ax, y) + (x, Ay) = 0$$

для всех $x, y \in D(A)$. В частности, все ненулевые собственные значения оператора A чисто мнимые.

Сформулируем важные для дальнейшего свойства собственных векторов оператора A . Детали и доказательства см. в [1]. Пусть

$$\pm i\omega_1, \pm i\omega_2, \dots \quad (3)$$

суть ненулевые собственные значения A ; числа $\omega_1, \omega_2, \dots$ будем считать положительными. Пусть

$$A\zeta_k = \pm i\omega_k \zeta_k, \quad \zeta_k = \xi_k \pm i\eta_k, \quad k \geq 1.$$

Здесь $\xi_k, \eta_k \in V$ и $\xi_k^2 + \eta_k^2 \neq 0$. Тогда

$$A\xi_k = -\omega_k \eta_k, \quad A\eta_k = \omega_k \xi_k, \quad (4)$$

$$(\xi_k, \xi_k) = (\eta_k, \eta_k), \quad (\xi_k, \eta_k) = 0.$$

Далее, пусть π_n — инвариантная плоскость оператора A , содержащая линейно независимые векторы ξ_n и η_n . Положим

$$x = p_n \xi_n + q_n \eta_n, \quad p_n, q_n \in \mathbb{R};$$

это точки π_n . Ограничение исходной линейной системы (1) на инвариантную плоскость π_n имеет вид

$$\dot{p}_n = \omega_n q_n, \quad \dot{q}_n = -\omega_n p_n; \quad n \geq 1. \quad (5)$$

Эта линейная система описывает динамику одномерного гармонического осциллятора с частотой ω_n . Она имеет очевидный первый интеграл $f_n = p_n^2 + q_n^2$.

¹ Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: kozlov@pran.ru

Если среди собственных чисел (3) нет равных, то при $k \neq l$ двумерные плоскости π_k и π_l ортогональны. В частности, ненулевые векторы

$$\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \dots (6) \quad (6)$$

образуют ортогональную систему.

Будем предполагать далее, что

- i) дискретный спектр A простой,
- ii) ортонормированная система векторов (6) полна.

В [1] показано, что при этих предположениях линейная система (1) является вполне интегрируемой гамильтоновой системой. Свойство гамильтоновости имеет место и при более слабых предположениях [2]. В конечномерном случае достаточно условия невырожденности оператора A и существования первого интеграла в виде невырожденной квадратичной формы [3]. В частности, размерность фазового пространства V четна. Наше основное наблюдение состоит в следующем: при тех же предположениях i) и ii) уравнение (1) можно представить в виде уравнения Шрёдингера после введения подходящей комплексной структуры в V .

Несколько замечаний.

Если оператор $A: V \rightarrow V$ ограничен, то для линейного дифференциального уравнения (1) справедлива теорема существования (и единственности) решений на всей оси времени $\mathbb{R} = \{t\}$ (см., например, [4]). В этом случае оператор A будет кососамосопряженным: $A^* = -A$. В частности, сопряженная (по Лагранжу) линейная система дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = -A^*y, \quad y \in V$$

будет совпадать с исходной системой (1). Так что линейную систему (1) можно назвать самосопряженной. Для уравнений математической физики оператор A , как правило, неограниченный, поскольку он содержит дифференцирования по пространственным переменным.

Можно несколько обобщить рассмотрение и предположить, что линейная система (1) допускает первый интервал в виде непрерывной положительно определенной квадратичной формы

$$f = (Bx, x).$$

В частности, самосопряженный оператор B будет обратимым. В этом случае можно ввести новое скалярное произведение в V

$$(x, y)' = (Bx, y).$$

Легко показать, что векторное пространство V со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)'$ также будет вещественным сепарабельным гильбертовым пространством. Так что без ущерба для общности оператор B можно считать единичным.

2. ПРИВЕДЕНИЕ К УРАВНЕНИЮ ШРЁДИНГЕРА

Принимаем предположения i), ii) и обозначения из раздела 1. Введем в вещественном векторном пространстве V комплексную структуру. Для этого представим V в виде прямой суммы $V_1 \oplus V_2$. Подпространство V_1 (V_2) — это замыкание множества линейных комбинаций векторов $\xi_1, \xi_2, \dots$ ($\eta_1, \eta_2, \dots$ соответственно). Эти подпространства ортогональны и оператор A переставляет местами V_1 и V_2 .

Комплексная структура в V определяется с помощью линейного оператора J , который действует на векторах ξ_k, η_k ($k \geq 1$) подобно оператору A :

$$J\xi_k = \eta_k, \quad J\eta_k = -\xi_k.$$

Следовательно, $J(V_1) = V_2$, $J(V_2) = V_1$ и $J^2 = -I$. Кроме того, оператор J кососамосопряженный: $J^* = -J$. Комплексное гильбертово пространство $V^{\mathbb{C}}$ составляют суммы

$$\psi = x^{(1)} + ix^{(2)},$$

где $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ — векторы из V ; $i^2 = -1$. Умножению на i отвечает действие оператора J . Пространство $V^{\mathbb{C}}$ снабжено естественным эрмитовым произведением

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = (x_1^{(1)} + ix_1^{(2)}, x_2^{(1)} - ix_2^{(2)}).$$

Векторы

$$\zeta_k = \frac{\xi_k + i\eta_k}{\sqrt{2}}, \quad k \geq 1,$$

линейно независимы над $\mathbb{C}$ и образуют в $(V^{\mathbb{C}}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ортонормированный базис. Действительно,

$$\langle \zeta_k, \zeta_l \rangle = \frac{(\xi_k, \xi_l) + (\eta_k, \eta_l)}{2} + \frac{i(\eta_k, \xi_l) - (\xi_k, \eta_l)}{2}$$

равно нулю, если $k \neq l$, и равно 1, если $k = l$.

Векторы $\zeta_1, \zeta_2, \dots$ составляют полную систему в $(V^{\mathbb{C}}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Положим

$$\psi = \sum c_k \zeta_k \in V^{\mathbb{C}}, \quad \sum |c_k|^2 < \infty.$$

Тогда

$$A\psi = \sum c_k A\zeta_k = i \sum c_k \omega_k \zeta_k. \quad (7)$$

Пусть $P_1, P_2, \dots$ — ортогональные проекторы в $V^{\mathbb{C}}$ на прямые с единичными векторами $\zeta_1, \zeta_2, \dots$. Тогда равенство (7) можно переписать в виде

$$A\psi = i \sum \omega_k P_k(\psi).$$

Далее, согласно (5),

$$\begin{aligned}\psi &= \sum \dot{c}_k \zeta_k = \sum (\dot{p}_k + i\dot{q}_k) \zeta_k = \\ &= -i \sum \omega_k c_k \zeta_k = -A\psi.\end{aligned}\quad (8)$$

Следовательно, уравнение (8) принимает вид уравнения Шрёдингера

$$i\dot{\psi} = \hat{H}\psi, \quad (9)$$

где

$$\hat{H} = \sum \omega_k P_k \quad (10)$$

есть оператор Гамильтона. Равенство (10) представляет спектральное разложение эрмитова оператора $\hat{H}$.

Уравнение (9) имеет квадратичный инвариант

$$\langle \psi, \psi \rangle = \left(\sum c_k \zeta_k, \sum \bar{c}_l \bar{\zeta}_l \right) = \sum |c_n|^2.$$

Это — исходный положительно определенный квадратичный инвариант, представленный в комплексной форме.

З а м е ч а н и е 1. В уравнении (9) постоянная Планка равна 1. Конечно, можно умножить на $\hbar$ обе части (9). Но тогда и оператор Гамильтона будет пропорционален $\hbar$. Однако можно поступить по-другому, заменив время t на $\frac{t}{\hbar}$.

Эти наблюдения позволяют несколько по-иному взглянуть на проблему квантования. Самые простые линейные гамильтоновы системы можно представить в квантовомеханической форме. В качестве тривиального примера рассмотрим простой гармонический осциллятор с частотой ν :

$$\dot{q} = \nu p, \quad \dot{p} = -\nu q; \quad p, q \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

Он допускает положительно определенный квадратичный интеграл $f = p^2 + q^2$ (удвоенная энергия осциллятора). Полагая $\psi = q + ip$, представим (как и выше) уравнения (11) в виде одномерного уравнения Шрёдингера $i\hbar\dot{\psi} = \hat{H}\psi$, где $\hat{H}$ — оператор умножения на вещественное число $\nu\hbar$. Сразу же видна аналогия с классической формулой Планка—Эйнштейна $E = \nu\hbar$ для энергии квантов электромагнитного излучения с частотой колебаний световой волны ν . С точки зрения квантовой механики инвариантное соотношение $f = 1$ интерпретируется как сохранение “вероятности” $\psi\bar{\psi} = 1$. Это наблюдение в “старой” квантовой механике (до появления уравнения Шрёдингера) выражалось следующим образом: переход между двумя соседними квантовыми состояниями соответствует классическому основному колебанию (см. обсуждение в [5]).

Аналогичные выводы о “самоквантованности” имеют место и для линейных эволюционных уравнений математической физики, допускающих положительный квадратичный инвариант. Кроме

собственно уравнений Шрёдингера, сюда относятся волновые уравнения, уравнение Лиувилля из статистической механики, а также система уравнений Максвелла. Все они подробно рассмотрены в [1] с точки зрения полной интегрируемости как уравнений Гамильтона. По-видимому, приведение к уравнению Шрёдингера можно осуществить и при более общих условиях (см. раздел 4).

Свойство “самоквантованности” уравнений колебаний упругой среды напоминает классические идеи Л. де Бройля о волновой природе квантовых частиц.

3. НАБЛЮДАЕМЫЕ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

После приведения линейной системы с положительным квадратичным инвариантом к уравнению Шрёдингера, ее динамику можно рассматривать с точки зрения квантовой механики. Однако можно действовать прямо, без введения комплексной структуры и предварительного приведения к уравнению Шрёдингера. Ключевой момент заключается в выделении наблюдаемых величин, эволюцией которых во времени мы интересуемся. В свою очередь, это тесно связано с определением процедуры измерения, которая существенным образом отличает квантовую механику от классической (математические и физические аспекты теории измерений обсуждаются в [6, 7]).

Состояниями линейной системы (1) (точнее, ее чистыми состояниями) будем называть ненулевые элементы вещественного евклидова пространства V^1 с условием нормировки $(x, x) = 1$. Векторы x и $-x$ задают одно и то же состояние. Наблюдаемые величины — это самосопряженные операторы, действующие в V . В этом разделе мы будем предполагать все операторы (в том числе и A) ограниченными (поскольку будут рассматриваться произведения операторов, то при таком соглашении не нужно следить за их областями определения).

С классической точки зрения все наблюдаемые величины (и состояния системы) в принципе могут быть одновременно измерены абсолютно точно. В квантовой механике это не так. Измерение наблюдаемой величины F сводится к определению собственных значений (спектра) самосопряженного оператора F , причем результаты измерения считаются недетерминированными. Этот оператор порождает квадратичную форму

$$f(x) = (Fx, x),$$

¹ При более полной аналогии с квантовой механикой чистыми состояниями следовало бы назвать пару векторов $x^{(1)} \in V_1$ и $x^{(2)} \in V_2$.

которая в квантовой механике интерпретируется как среднее значение величины F в состоянии x .

Пусть J — кососамосопряженный антиинволютивный оператор из раздела 2:

$$J^* = -J \quad \text{и} \quad J^2 = -I.$$

Он определяет коммутатор самосопряженных операторов

$$[F, G]_J = FJG - GJF, \quad (12)$$

который, как F и G , также будет самосопряженным оператором. С коммутатором (12) связана скобка Пуассона, определенная на пространстве непрерывных квадратичных форм на V : если $f = (Fx, x)$ и $g = (Gx, x)$ — две квадратичные формы, то

$$\{f, g\} = ([F, G]_J x, x)$$

есть их скобка Пуассона. Ясно, что скобка линейна по каждому аргументу, $\{f, g\} = -\{g, f\}$ и выполнено тождество Якоби. С помощью этой скобки Пуассона устанавливается гамильтоновость исходной линейной системы с квадратичным инвариантом [1].

Имеет место следующее неравенство, аналогичное известному неравенству Г. Вейля из квантовой механики:

$$4\sigma_x^2(F)\sigma_x^2(G) \geq ([F, G]_J x, x)^2, \quad (13)$$

где

$$\sigma_x^2(B) = (B^2 x, x) - (Bx, x)^2$$

есть дисперсия наблюдаемой B в состоянии x (среднее отклонение от его математического ожидания). Из неравенства (13) вытекают соотношения неопределенности Гейзенберга: даже в чистом состоянии J -некоммутирующие наблюдаемые не могут быть одновременно точно измерены. При выводе (13) использованы соотношения $[F, J]_J = [G, J]_J = 0$. Другими словами, (13) имеет место для всех наблюдаемых H таких, что скобка Пуассона скалярного квадрата (x, x) с их средним значением (Hx, x) равна нулю (в квантовой механике это свойство выполняется автоматически).

Как меняются наблюдаемые величины со временем? Так как

$$x(t, x_0) = e^{At} x_0, \quad x(0, x_0) = x_0$$

и $A^* = -A$, то (в картине Гейзенберга)

$$F(t) = e^{-At} F e^{At}. \quad (14)$$

Оператор

$$U(t) = e^{At}$$

можно назвать вещественным оператором эволюции. Этот оператор ортогональный:

$$U^* = e^{A^*t} = e^{-At} = U^{-1}.$$

Из (14) вытекает соотношение

$$\dot{F} = [F, A] = FA - AF. \quad (15)$$

Так что постоянство наблюдаемой эквивалентно условию коммутирования операторов A и F . Если уравнение (1) представляет шрёдингерово описание динамической системы, то (15) — это описание Гейзенберга.

С другой стороны, условие $[F, A] = 0$ будет условием инвариантности квадратичной формы f относительно фазового потока системы (1). Действительно, $\dot{f} = 0$ тогда и только тогда, когда

$$FA + A^*F = 0.$$

Учитывая кососамосопряженность оператора A , получаем требуемое.

4. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА КАК УРАВНЕНИЕ ШРЁДИНГЕРА

Приведение к уравнению Шрёдингера возможно и при более общих условиях по сравнению с условиями i) и ii) из раздела 2. В ряде случаев это удастся сделать с использованием специального вида уравнений математической физики.

В качестве примера рассмотрим систему уравнений Максвелла, описывающих эволюцию электрического E и магнитного H полей в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3 = \{x\}$ без токов:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = c \operatorname{rot} H, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -c \operatorname{rot} E. \quad (16)$$

Здесь c — скорость света; магнитное поле соленоидальное ($\operatorname{div} H = 0$). Из (16) вытекает уравнение Пойнтинга

$$\frac{\partial}{\partial t}(E^2 + H^2) + c \operatorname{div} S = 0, \quad S = E \times H.$$

Если поля E и H быстро убывают на бесконечности ($|S| x^2 \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$), то из уравнения Пойнтинга выводится квадратичный закон сохранения для уравнений (16):

$$\int_{\mathbb{R}^3} (E^2 + H^2) d^3 x = \operatorname{const}. \quad (17)$$

Полагая $\psi = E + iH$, из (16) выводим уравнение Шрёдингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi, \quad \hat{H} = \hbar c \operatorname{rot}. \quad (18)$$

Соотношение (17) представляется в комплексной форме:

$$\langle \psi, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} (\psi, \bar{\psi}) d^3 x = \operatorname{const}.$$

Структура гильбертова пространства определяется с помощью эрмитова скалярного произведения

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} (\psi_1, \bar{\psi}_2) d^3x,$$

определенного на векторном пространстве квадратично суммируемых полей. Оператор Гамильтона (18) будет эрмитовым: $\langle \hat{H}\psi_1, \psi_2 \rangle = \langle \psi_1, \hat{H}\psi_2 \rangle$. Для дифференцируемых полей (которые всюду плотны в L^2) это равенство просто вытекает из известного тождества векторного анализа

$$(\operatorname{rot} a, b) = (a, \operatorname{rot} b) + \operatorname{div}(a \times b).$$

З а м е ч а н и е 2. Гамильтоновость уравнений Максвелла исследовалась многими авторами, начиная с Дирака, для целей квантования электродинамики (см. [1] и имеющиеся там ссылки).

Спектральные свойства оператора вихря обсуждались в связи с проблемами гидродинамики (см., например, [8, 9]).

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке государства в лице Минобрнауки России (соглашение № 075-15-2020-788).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козлов В.В. Квадратичные законы сохранения уравнений математической физики // УМН. 2020. Т. 75. № 3. С. 253–304.
2. Трещёв Д.В., Шкаликов А.А. О гамильтоновости линейных динамических систем в гильбертовом пространстве // Матем. заметки. 2017. Т. 101. № 6. С. 911–918.
3. Козлов В.В. Линейные системы с квадратичным интегралом // ПММ. 1992. Т. 56. № 6. С. 900–906.
4. Бурбаки Н. Функции действительного переменного / Элементы математики. М.: Наука, 1965. 424 с.
5. Борн М. Лекции по атомной механике. Т. 1. Киев: ОНТИ, 1939. 312 с.
6. Фаддеев Л.Д., Якубовский О.А. Лекции по квантовой механике для студентов-математиков. Л.: Изд-во Ленинград. ун., 1980. 200 с.
7. Менский М.Б. Квантовые измерения и декогеренция. М.: Физматлит, 2001. 232 с.
8. Аржаных И.С. Обращение волновых операторов Ташкент: Изд-во АН Узб. ССР, 1962. 162 с.
9. Сакс Р.С. Спектральные задачи для операторов ротора и Стокса // ДАН. 2007. Т. 416. № 4. С. 446–450.

THE LINEAR SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A QUADRATIC INVARIANT AS THE SCHRÖDINGER EQUATION

Academician of the RAS V. V. Kozlov^a

^a Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

Linear systems of differential equations with an invariant in the form of a positive definite quadratic form in a real Hilbert space are considered. It is assumed that the system has a simple spectrum and the eigenvectors form a complete orthonormal system. Under these conditions, the linear system can be presented in the form of the Schrödinger equation by means of introduction of a suitable complex structure. As an example we present such a representation for the Maxwell equations without currents. These observations allow us to consider the dynamics defined by some linear differential equations from the point of view of the principles of quantum mechanics.

Keywords: linear system, quadratic invariant, complex structure, Schrödinger equation, Poisson bracket, Weil's inequality, conservation law, Maxwell equations