ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 496, с. 30–33

МАТЕМАТИКА

УДК 517.51

О СУЩЕСТВОВАНИИ И СТРУКТУРЕ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

© 2021 г. М. Г. Григорян[1,*]

Представлено академиком РАН Б.С. Кашиным 26.05.2020 г.
Поступило 27.05.2020 г.
После доработки 14.09.2020 г.
Принято к публикации 28.11.2020 г.

Обсуждается вопрос существования, а также описание структуры таких функций (универсальных функций), ряды Фурье которых по системе Уолша универсальны в классе почти везде конечных измеримых функций в смысле знаков.

Ключевые слова: универсальные функции, ряды Фурье–Уолша, сходимость почти всюду

DOI: 10.31857/S2686954321010057

Единого определения понятия универсальная функция не существует. Обычно под этим термином понимается функция, с помощью которой можно представить все функции. При этом способ представления, а также класс представимых функций может трактоваться различным образом. Существование функций и рядов, универсальных в том или ином смысле, изучалось многими математиками, работавшими в теории функций как действительного, так и комплексного переменного.

Первые примеры универсальных функций были построены Биркгофом [1] в рамках комплексного анализа, при этом целые функции представлялись в любом круге равномерно сходящимися сдвигами универсальной функции, Марцинкевичем [2] в рамках действительного анализа, при этом любая измеримая функция представлялась как предел почти всюду некоторой последовательности разностных отношений универсальной функции.

Понятие универсального ряда восходит к работам Меньшова [3] и Талаляна [4]. Наиболее общие результаты были получены ими и их учениками.

Отметим, что в последние годы в работах [5–13] автором были получены некоторые результаты, связанные с существованием и описанием структуры функций, ряды Фурье которых по заданной классической системе универсальны в том или ином смысле в различных функциональных классах.

[1] *Ереванский государственный университет, Ереван, Республика Армения*

**E-mail: gmarting@ysu.am*

Ниже мы будем использовать следующие обозначения.

Пусть $E \subseteq [0,1]$ – некоторое измеримое множество и $|E|$ – мера Лебега измеримого множества $E \subseteq [0,1]$, пусть $L^p(E)$– класс всех тех измеримых на E функций, для которых $\int_E |f(x)|^p dx < \infty$, $p > 0$.

Пусть f, $f_k \in L^p[0,1]$, $k \in \mathbf{N}$ ($\mathbf{N}$ – совокупность всех натуральных чисел). Говорят, что последовательность $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к $f(x)$ в $L^p[0,1]$, если

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 |f_k(x) - f(x)|^p dx = 0.$$

Пусть $L^0[0,1]$ – класс всех почти везде конечных измеримых на [0, 1] функций. Под сходимостью в $L^0[0,1]$ мы будем подразумевать сходимость почти всюду.

Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – полная в $L^2[0,1]$ ортонормированная система ограниченных функций, и пусть

$$c_k(U) = \int_0^1 U(x)\varphi_k(x)dx,$$

$k \in \mathbf{N}$ – коэффициенты Фурье по системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ функции $U \in L^1[0,1]$.

Определение 1. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, ($f_k \in L^p[0,1]$, $p \geq 0$) называется универсальным в $L^p[0,1]$ в смысле знаков, если для каждой функции

$f \in L^p[0,1]$ можно найти последовательность знаков $\{\delta_k = \pm 1\}_{k=0}^{\infty}$, для которой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k f_k(x)$$

сходится к функции $f(x)$ в $L^p[0,1]$.

Определение 2. Будем говорить, что функция $U \in L^1[0,1]$ универсальна для класса $L^p[0,1]$ $p \geq 0$ относительно системы $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ в смысле знаков, если ряд Фурье функции U(x) по этой системе универсален в $L^p[0,1]$ в смысле знаков.

В работах [6, 7] мы изучили вопрос существования и описания структуры функций, которые универсальны для классов $L^p[0,1]$ при $p \in (0,1)$ относительно системы Уолша в смысле знаков.

В этой работе рассматривается тот же вопрос в случае $p = 0$, т.е. изучается существование функций, которые универсальны для класса $L^0[0,1]$ относительно системы Уолша в смысле знаков. Имеет место

Теорема 1. *Существует функция* $U \in L^1[0,1]$ *со строго убывающими коэффициентами, которая является универсальной для класса* $L^0[0,1]$ *относительно системы Уолша в смысле знаков.*

Оказывается, что любую измеримую, почти всюду конечную функцию путем изменения ее значений на множестве сколь угодно малой меры можно превратить в универсальную функцию для класса $L^0[0,1]$ относительно системы Уолша в смысле знаков.

Теорема 2. *Пусть* $f(x)$ — *измеримая функция, конечная почти всюду на* $[0, 1]$. *Каково бы ни было* $\epsilon > 0$, *можно определить функцию* $g(x) \in L^1[0,1]$ *с* $|\{x \in [0,1]; g(x) \neq f(x)\}| \leq \epsilon$ *такую, что*

1) *коэффициенты Фурье–Уолша функции* $g(x)$ *монотонно убывают по абсолютной величине,*

2) *ряд Фурье–Уолша функции* $g(x)$ *сходится в метрике* $L^1[0,1]$ *и почти всюду,*

3) $g(x)$ *универсальна для класса* $L^0[0,1]$ *относительно системы Уолша в смысле знаков.*

Замечание 1. Не существует функции $U \in L^1[0,1]$, которая была бы универсальной для класса $L^1[0,1]$ относительно системы Уолша в смысле знаков. Более того, каковы бы ни были число $p \geq 1$ и ограниченная ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}$, не существует функции $U \in L^1[0,1]$, которая была бы универсальной для класса $L^p[0,1]$ относительно системы $\{\varphi_n(x)\}$ в смысле знаков.

Действительно, если бы при некотором $p \geq 1$ относительно некоторой ограниченной ортонормированной системы $\{\varphi_n(x)\}$ существовала функция $U \in L^1[0,1]$, которая универсальна для класса $L^p[0,1]$, $p \geq 1$, в смысле знаков, то для любой функции $f(x) \in L^p[0,1]$, $p \geq 1$ с $c_1(f) \neq 0$ нашлись бы числа $\{\delta_k = \pm 1\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{\Upsilon_k = \pm 1\}_{k=0}^{\infty}$ такие, что

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^1 \left| \sum_{k=0}^{m} \delta_k c_k(U) \varphi_k(x) - f(x) \right| dx = 0 = $$
$$= \lim_{m\to\infty} \int_0^1 \left| \sum_{k=0}^{m} \Upsilon_k c_k(U) \varphi_k(x) - 2f(x) \right| dx.$$

Отсюда (ввиду того, что $\delta_1 c_1(U) = c_1(f)$ и $\Upsilon_1 c_1(U) = c_1(2f) = 2c_1(f)$) сразу получаем противоречие: $\Upsilon_1 = 2\delta_1$.

Замечание 2. Отметим, что не существует функции $U \in L^1[0,1]$, которая была бы универсальной для класса $L^0[0,1]$ в смысле знаков относительно системы $\{f_n(x)\}$, построенной Кашиным в работе [14] $\Big($ им была построена полная в $L^2[0,1]$ ортонормированная система $\{f_n(x)\}$ ограниченных функций такая, что из сходимости почти всюду на [0, 1] ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(x)$ вытекает $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty \Big)$.

Теоремы 1 и 2 следуют из следующей более сильной теоремы 3, которая описывает структуру всех тех функций, которые универсальны для класса $L^0[0,1]$ относительно системы Уолша в смысле знаков с точки зрения широко известных классических теорем Лузина [15] и Меньшова [3] “Об исправлении функций”.

Теорема 3. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют измеримое множество* $E \subset [0,1]$ *с мерой* $|E| > 1 - \varepsilon$ *и функция* $U \in L^1[0,1]$ *со свойствами:*

1) *функция* $U(x)$ — *универсальна для класса* $L^0[0,1]$ *относительно системы Уолша в смысле знаков,*

2) $U(x) = 0$ *на* $[\varepsilon, 1]$,

3) *ряд Фурье–Уолша функции* $U(x)$ *сходится в* $L^1[0,1]$,

4) *коэффициенты Фурье–Уолша функции* $U(x)$ *положительны и монотонно убывают,*

5) *для каждой функции* $f \in L^1[0,1]$ *можно найти функцию* $\tilde{f} \in L^1[0,1]$ *такую, что* $\tilde{f}(x) = f(x)$ *на* E, *и* $\tilde{f}(x)$ — *универсальна для класса* $L^0[0,1]$ *относительно системы Уолша в смысле знаков, более того*

a) $|c_k(\tilde{f})| = |c_k(U)|$, $k = 0,1,2,\ldots$, б) *ряд Фурье–Уолша функции* $\tilde{f}(x)$ *сходится в* $L^1[0,1]$ *и почти всюду*.

Определение 3. Будем говорить, что измеримое множество $E \subset [0,1]$ и функция $U \in L^1[0,1]$ образуют универсальную пару (E, U) относительно коэффициентов Фурье по системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ в смысле модификации, если для каждой функции $f \in L^1(E)$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1[0,1]$ с $\tilde{f}(x) = f(x)$ на E и такую, что $|c_k(\tilde{f})| = |c_k(U)|$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Из теоремы 3 вытекает

Теорема 4. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существует универсальная пара* (E, U) *относительно коэффициентов Фурье по системе Уолша в смысле модификации, притом* $|E| > 1 - \varepsilon$, *коэффициенты Фурье–Уолша функции* $U(x)$ *положительны и монотонно убывают и функция* U *универсальна для класса* $L^0[0,1]$ *относительно системы Уолша в смысле знаков*.

Сформулируем теперь основное утверждение.

Лемма. *Пусть* $n_0 \in \mathbf{N}$ $\varepsilon \le \delta \in (0,1)$ *и* $f(x) = \sum_{m=1}^{\tilde{\nu}_0} \tilde{\gamma}_m \chi_{\tilde{\Delta}_m}(x)$ *есть такая ступенчатая функция, что* $\tilde{\gamma}_m \neq 0$ *и* $\{\tilde{\Delta}_m\}_{m=1}^{\tilde{\nu}_0}$ *– непересекающиеся двоичные интервалы с* $\sum_{m=1}^{\tilde{\nu}_0} |\widetilde{\Delta}_m| = 1$. *Тогда можно найти измеримые множества* $G \subset E \subset [2^{-n_0}, 1]$, *и полиномы*

$$U(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^n - 1} a_k W_k(x) \quad и$$

$$P(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^n - 1} \delta_k a_k W_k(x), \quad \delta_k = \pm 1,$$

по системе Уолша, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $|E| > 1 - \varepsilon - 2^{-n_0}$, $|G| > 1 - \delta - 2^{-n_0}$,

2) $0 < a_{k+1} \le a_k < \varepsilon$, $k \in [2^{n_0}, 2^n - 1)$,

3) $U(x) \cdot \chi_{[2^{-n_0},1]}(x) = 0$,

4) $P(x) = f(x)$, *когда* $x \in E$,

5) $$\max_{2^{n_0} \le M < 2^n} \int_0^1 \left| \sum_{k=2^{n_0}}^{M} \delta_k a_k W_k(x) \right| dx < A \int_0^1 |f(x)| dx,$$

6) $$\max_{2^{n_0} \le M < 2^n} \int_0^1 \left| \sum_{k=2^{n_0}}^{M} a_k W_k(x) \right| dx < \varepsilon,$$

7) $$\max_{2^{n_0} \le M < 2^n} \left| \sum_{k=2^{n_0}}^{M} \delta_k a_k W_k(x) \right| < \frac{A|f(x)|}{\delta} + \varepsilon \quad \forall x \in G,$$

где A *– константа*.

В связи с приведенными выше теоремами и определениями возникают следующие вопросы, ответы на которые нам неизвестны.

Вопрос 1. Можно ли превратить произвольную функцию $f(x) \in L^1[0, 2\pi]$, изменяя значения на множестве малой меры, в функцию $\tilde{g}(x) \in L^1[0, 2\pi]$ с монотонно убывающими коэффициентами (по тригонометрической системе) Фурье по абсолютной величине?

Вопрос 2. Верны ли теоремы 3 и 4 для тригонометрической системы и для системы Виленкина?

Вопрос 3. Существует ли функция $U \in L^1(0,1)$, универсальная для некоторого класса $L^p[0,1]$ $p \in [0,1)$, относительно системы Хаара и Франклина в смысле знаков?

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность академику РАН Б. С. Кашину за внимание к работе.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке Республики Армения в рамках научного проекта № 21T-A303.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Birkhoff G.D.* // C. R. Acad. Sci. Paris. 1929. V. 189. № 1. P. 473–475.
2. *Marcinkiewicz J.* // Fund. Math. 1935. V. 24. P. 305–308.
3. *Меньшов Д.Е.* // Матем. сб. 1947. Т. 20. С. 179–183.
4. *Талялян А.А.* // Изв. АН Арм. ССР. 1957. Т. 10. № 3. С. 17–34.
5. *Grigoryan M.G.* // Banach J. of Math. Analysis. 2017. V. 11. № 3. P. 698–712.
6. *Grigoryan M.G., Sargsyan A.A.* // J. of Func. Anal. 2016. V. 270. № 8. C. 3111–3133.
7. *Григорян М.Г., Саргсян А.А.* // Матем. сб. 2018. Т. 209. № 1. С. 59–83.
8. *Grigoryan M.G., Galoyan L.N.* // J. of Approx Theory. 2018. V. 225. 191208.
9. *Grigorian M.G., Sargsyan A.A.* // Positivity. 2019. V. 23. № 5. P. 1261–1280.
10. *Grigoryan M., Galoyan L.* // Studia Math. 2019. V. 249. № 2. P. 215–231.
11. *Grigoryan M.* // Adv. in Oper. Theory. 2020. V. 5. P. 232–258.
12. *Григорян М.Г.* // Матем. сб. 2020. Т. 211. № 6. С. 107–131.
13. *Григорян М.Г.* // Матем. заметки. 2020. Т. 211. № 6. С. 107–131.
14. *Кашин Б.С.* // Матем. сб. 1976. Т. 99 (141). № 3. С. 356–365.
15. *Лузин Н.Н.* // Матем. сб. 1912. Т. 28. № 2. С. 266–294.

ON THE EXISTENCE AND STRUCTURE UNIVERSAL FUNCTIONS

M. G. Grigoryan[a]

[a] *Yerevan State University, Yerevan, Armenia*

Presented by Academician of the RAS B.S. Kashin

This article discusses the problem of the existence and description of the structure of functions, the Fourier–Walsh series of which are universal in the sense of signs for the class of finite functions measurable almost everywhere.

Keywords: universal function, Fourier series, convergence, Walsh system