ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 496, с. 40–43

МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

О СТАБИЛИЗАЦИИ ИНТЕГРАЛА ПУАССОНА И СРЕДНИХ ТИХОНОВА–СТИЛТЬЕСА. ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ

© 2021 г. В. Н. Денисов[1,*]

Представлено академиком РАН Е.И. Моисеевым 26.11.2020 г.
Поступило 27.11.2020 г.
После доработки 29.12.2020 г.
Принято к публикации 29.12.2020 г.

Установлены двусторонние оценки близости при $t \to \infty$ интеграла Пуассона, представляющего решение задачи Коши для уравнения теплопроводности известных средних Тихонова–Стилтьеса от начальной функции. Описаны точные по порядку двусторонние оценки в некоторых классах начальных функций.

Ключевые слова: стабилизация, уравнение теплопроводности, задача Коши

DOI: 10.31857/S2686954321010033

В данной работе изучаются вопросы о двусторонних оценках интеграла Пуассона [1]

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi}\sqrt{t})^N}\int_{E^N} u_0(y)e^{-\frac{r^2}{4t}}dy, \qquad r = |x-y|, \tag{1}$$

и средних Тихонова–Стилтьеса [3] от функции $u_0(x)$

$$T_R^{\alpha}u_0(x) = \frac{2}{w_N B(N/2, \alpha - N/2)R^N}\times \\ \times\int_{E^N} u_0(y)\left(1+\frac{r^2}{R^2}\right)^{-\alpha}dy, \tag{2}$$

где $w_N = \dfrac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}$, $\alpha > N/2$.

Далее будем предполагать, что функция $u_0(x)$ непрерывна в E^N и удовлетворяет одному из следующих условий для $\forall x \in E^N$:

(A) $|u_0(x)| \le M$, $M > 0$,

(B) $|u_0(x)| \le M(1+|x|)^m$, $m > 0$,

(C) $1 \le u_0(x) \le M$, $M > 0$,

(D) $1 \le u_0(x) \le M(1+|x|)^m$, $m > 0$.

Как известно [1], в этих классах функций интеграл Пуассона (1) существует и представляет единственное решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$\Delta u(x,t) - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad x \in E^N, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in E^N. \tag{3}$$

Если $u_0(x)$ удовлетворяет условию степенного роста (B) или (D), то (2) сходится, если выполняется неравенство

$$\alpha > \frac{N+m}{2}. \tag{4}$$

Аналог средних (2) был использован в работе А.Н. Тихонова [2] при решении задачи о восстановлении значений функций, по приближенно заданным коэффициентам Фурье этой функцией.

В работе [3] для случая (A), т.е. когда $u_0(x)$ непрерывна и ограничена в E^N, получен критерий стабилизации интеграла Пуассона (1) в терминах средних (2).

Т е о р е м а (см. [3, с. 32]). Если $u_0(x)$ – непрерывна и ограничена в E^N, то предел

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = A \tag{5}$$

решения задачи Коши (3) (поточечный, равномерный по x на каждом компакте K в E^N, или равномерный по x во всем E^N) существует тогда и только тогда, когда существует соответствующий предел средних (2)

$$\lim_{R\to+\infty} T_R^{\alpha}u_0(x) = A, \tag{6}$$

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: vdenisov2008@yandex.ru*

(который понимается в смысле существования предела (5)).

В работе [3] построен пример функции, удовлетворяющей условию степенного роста (т.е. условию (B)), для которой предел (6) существует, а предел шаровых средних Рисса от $u_0(x)$ не существует, т.е. метод суммирования $T_R^\alpha u_0(x)$ является более сильным, чем метод шаровых средних Рисса (см. [3, теорема 3, с. 32]). Далее мы будем рассматривать модифицированные средние Тихонова–Стилтьеса:

$$T^{\alpha}_{2\sqrt{t}\sqrt{\alpha}}u_0(x) = \frac{1}{w_N B(N/2, \alpha - N/2)\alpha^{N/2}} \times$$
$$\times \int_{E^N} \left(1 - \frac{|\sigma|^2}{\alpha}\right)^{-\alpha} u_0(x + 2\sqrt{t}\sigma)d\sigma, \qquad (7)$$
$$|\sigma|^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_N^2, \quad \alpha > N/2.$$

Совершив замену $y_i = x_i + 2\sqrt{t}\sigma_i,\ i = 1,\ldots,N$, интеграл Пуассона (1) запишем в виде

$$\frac{1}{\pi^{N/2}} \int_{E^N} e^{-|\sigma|^2} u_0(x + 2\sqrt{t}\sigma)d\sigma. \qquad (8)$$

В теореме 4 работы [3] доказано, что если $u_0(x)$ удовлетворяет условию (C) , то для любого фиксированного $t > 0$ равномерно по x во всем E^N существует предел

$$\lim_{\alpha\to+\infty} T^{\alpha}_{2\sqrt{t}\sqrt{\alpha}}u_0(x) = u(x,t), \quad t > 0, \quad x \in E^N \qquad (9)$$

модифицированных средних Тихонова–Стилтьеса (7).

Целью настоящей работы является установление точных двусторонних оценок одинакового порядка при $t \to \infty$ разности

$$I(x,t) := T^{\alpha}_{2\sqrt{t}\sqrt{\alpha}}u_0(x) - u(x,t), \qquad (10)$$

в классах непрерывных в E^N функций $u_0(x)$, удовлетворяющих соответствующим условиям (A)–(D), при условии, что $\alpha = \alpha(t)$, функция, монотонно возрастающая к $+\infty$ при $t \to \infty$. Порядок роста функции $\alpha = \alpha(t)$ определяется порядком роста функции $u_0(x)$.

Т е о р е м а 1. *Если $u_0(x)$ непрерывна в E^N и удовлетворяет условию* (C), $\alpha(t)$ *– монотонно возрастающая функция t такая, что* $\lim\limits_{t\to\infty}\alpha(t) = +\infty$, *то для разности* (10) *справедлива двусторонняя оценка*

$$\frac{C_2}{\alpha(t)} \le I(x,t) \le \frac{C_1}{\alpha(t)}, \quad C_1 > 0, \quad C_2 > 0, \qquad (11)$$

равномерно по x во всем E^N и $\forall t \ge t_0 > 0$.

З а м е ч а н и е 1.

1. Из правой оценки (11) вытекает теорема о равностабилизации для $T^{\alpha}_{2\sqrt{t}\sqrt{\alpha}}u_0(x)$ и $u(x,t)$, т.е. существует равномерный по x во всем E^N предел

$$\lim_{t\to+\infty}\sup_{x\in E^N}(T^{\alpha(t)}_{2\sqrt{t}\sqrt{\alpha(t)}}u_0(x) - u(x,t)) = 0, \qquad (12)$$

со скоростью не менее чем $C_1/\alpha(t)$ для любой $u_0(x) \in C(E^N)$ и удовлетворяющий условию (C).

2. Из левой оценки (11) следует, что порядок скорости равностабилизации в (12) является точным.

Т е о р е м а 2. *Если функция $u_0(x)$ непрерывна в E^N и удовлетворяет условию* (D), *и* $\alpha(t) = t^m$, *где* $m > 0$, *степень роста* (D) *функции* $u_0(x)$, *тогда справедливы следующие оценки по t разности* (10):

$$\frac{C_2}{t^{m/2}} \le \sup_{x\in K} I(x,t) \le \frac{C_1(K)}{t^{m/2}}, \quad \forall t \ge t_0, \qquad (13)$$

где

$$C_1(K) = \sup_{x\in K} C_1(1 + |x|)^m \qquad (14)$$

равномерно по x на любом компакте K в E^N.

З а м е ч а н и е 2.

1. Из правой оценки (13) следует теорема о равностабилизации, т.е. существует предел

$$\lim_{t\to+\infty}(T^{\alpha(t)}_{2\sqrt{t}\sqrt{\alpha(t)}}u_0(x) - u(x,t)) = 0, \qquad (15)$$

равномерно по x на каждом компакте K в E^N, со скоростью не менее чем $\dfrac{C_1(K)}{t^{m/2}}$ при $t \to +\infty$.

2. Из левой оценки (13) следует, что установленная в теореме 2 оценка скорости равностабилизации, равномерная по x на каждом компакте K в E^N, является точной по порядку $t^{-m/2}$.

Если в теореме 1 отказаться от полуограниченности $u_0(x)$ снизу, т.е. от условия (C) $u_0 \ge 1$, и оставить только условие (A), то получим следующее утверждение.

Т е о р е м а 3. *Если $u_0(x)$ непрерывна в E^N и удовлетворяет условию* (A) $|u_0(x)| \le M$, $\alpha(t)$ *– монотонно возрастающая функция, такая, что* $\lim\limits_{t\to+\infty}\alpha(t) = +\infty$, *то для разности* (10) *справедлива оценка*

$$|I(x,t)| \le \frac{C_1}{\alpha(t)}, \quad C_1 > 0, \qquad (16)$$

равномерная по x во всем E^N.

С л е д с т в и е. *Из* (16) *следует теорема равностабилизации* (12).

Однако в этом случае мы не можем гарантировать, что порядок $\frac{C_1}{\alpha(t)}$ скорости равностабилизации является точным, а лишь то, что скорость равностабилизации будет не менее чем $\frac{C_1}{\alpha(t)}$.

Аналогично, если в теореме 2 отказаться в условии (D) от неравенства $u_0 \geq 1$, но оставить условие (B): $|u_0(x)| \leq M(1 + |x|)^m$, то получим следующее утверждение.

Т е о р е м а 4. *Если функция $u_0(x)$ непрерывна в E^N и удовлетворяет условию* (B) $|u_0(x)| \leq M(1 + |x|)^m$, $m > 0$ *и* $\alpha(t) = t^m$, *где m – степень роста $|u_0(x)|$, тогда справедлива оценка по t разности* (10)

$$\sup_{x\in K}|I(x,t)| \leq \frac{C_1(K)}{t^{m/2}}, \tag{17}$$

равномерная по x на каждом компакте K в E^N.

Из (17) следует теорема о равностабилизации: $(\lim_{t\to\infty}\sup_K I(x,t) = 0)$ равномерно по x на каждом компакте K в E^N, однако в этом случае мы не можем гарантировать, что порядок скорости равностабилизации $\frac{C_1(K)}{t^{m/2}}$ является точным, а лишь то, что скорость равностабилизации будет не менее чем $\frac{C_1(K)}{t^{m/2}}$.

Теперь мы получим скорость равностабилизации для разности (10) для более широкого класса функций $\alpha(t)$.

Т е о р е м а 5. *Если функция $u_0(x)$ непрерывна в E^N и удовлетворяет условию* (B),

$$\alpha(t) = t^{m/2}\cdot\beta(t), \tag{18}$$

где $\beta(t)$, монотонно возрастая, стремится к $+\infty$ при $t \to +\infty$, тогда справедливы следующие оценки по t разности (10):

$$\frac{C_2}{\beta(t)} \leq \sup_{x\in K} I(x,t) \leq \frac{C_1(K)}{\beta(t)}, \tag{19}$$

где $C_1(K)$ определено в (14).

Как и выше, в теореме 2, из правой оценки (19) мы получаем теорему о равностабилизации (15), на каждом компакте K в E^N, со скоростью не менее чем $\frac{C_1(K)}{\beta(t)}$, $t \to \infty$.

Из левой оценки (19) следует, что оценка справа в (19) скорости равностабилизации $\frac{C_1(K)}{\beta(t)}$ является точной.

Доказательство сформулированных теорем 1–4 основывается на следующих элементарных леммах.

Л е м м а 1. *При* $0 \leq x \leq \sqrt{\alpha}$, $\alpha > 0$ *справедливо неравенство*

$$\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)^{-\alpha} - e^{-x} \leq \frac{x^2}{\alpha}e^{-x}. \tag{20}$$

Л е м м а 2. *При* $0 \leq x \leq \alpha$, $\alpha > 0$ *справедливо неравенство*

$$\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)^{-\alpha} - e^{-x} \geq \frac{x^2}{4\alpha}e^{-x}. \tag{21}$$

Докажем (20). Перепишем (20) в равносильном виде

$$e^x < \left(1+\frac{x}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(1+\frac{x^2}{\alpha}\right), \tag{22}$$

и логарифмируя (22), будем иметь

$$x \leq \alpha\ln\left(1+\frac{x}{\alpha}\right) + \ln\left(1+\frac{x^2}{\alpha}\right).$$

Введем функцию

$$\psi(x) = \alpha\ln\left(1+\frac{x}{\alpha}\right) + \ln\left(1+\frac{x^2}{\alpha}\right) - x$$

и заметим, что (20) равносильно неравенству

$$0 \leq \psi(x), \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq \sqrt{\alpha}. \tag{23}$$

Ясно, что $\psi(0) = 0$, и учитывая легко проверяемое неравенство $\psi'(x) \geq 0$, $0 \leq x \leq \sqrt{\alpha}$, получим (20).

Докажем (21). Обозначив левую часть (21) символом K_1, будем иметь тождество

$$K_1 = e^{-x}\left[\frac{e^x}{\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)^{\alpha}} - 1\right] = e^{-x}\left[e^{x-\alpha\ln\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)} - 1\right]. \tag{24}$$

Воспользуемся в (24) неравенством $e^z \geq 1 + z$, где $z = x - \alpha\ln\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)$, $0 \leq x \leq \alpha$, и, вводя переменную $t = \frac{x}{\alpha} \leq 1$ и применяя в (23) неравенство $\ln(1+t) \leq t - \frac{t^2}{4}$, при $0 \leq t \leq 1$ получим (21).

Леммы 1, 2 доказаны.

В работах [4–6] даны обзоры по вопросам стабилизации решений параболических уравнений. В работе [7] изучаются средние по времени для решений параболических уравнений.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает глубокую благодарность академику РАН Е.И. Моисееву и профессору И.С. Ломову за внимание к докладу на научном семинаре кафедр ОМ и ФА факультета ВМК МГУ.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-11-00223).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н.* Theoremes d'unicite pour l'equation de la chaleur // Матем. сб. 1935. Т. 45. № 2. С. 198–216.
2. *Тихонов А.Н.* Об устойчивых методах суммирования рядов Фурье // ДАН СССР. 1964. Т. 156. № 2. С. 268–271.
3. *Денисов В.Н.* О стабилизации интеграла Пуассона в классе функций, имеющих степенной рост // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 1. С. 30–40.
4. *Денисов В.Н.* О поведении решений параболических уравнений при больших значениях времени // УМН. 2005. Т. 60. № 4. С. 145–212.
5. *Денисов В.Н.* О поведении при больших значениях времени решений параболических уравнений // Совр. матем. фунд. направ. 2020. Т. 6. № 1. С. 1–155.
6. *Денисов В.Н., Репников В.Д.* О стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 1. С. 20-41.
7. *Денисов В.Н., Жиков В.В.* О стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений // Матем. заметки. 1985. Т. 37. № 6. С. 834–850.

ON STABILIZATION OF POISSON INTEGRAL AND TIKHONOV-STIELTIES MEANS. TWO-SIDED ESTIMATE

V. N. Denisov[a]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS E.I. Moiseev

We establish two-sided estimates for the proximity as $t \to \infty$ of the Poisson integral representing the solution of the Cauchy problem for the heat equation for the known Tikhonov–Stielties means of the initial function. We describe order-sharp two-sided estimates in some classes of initial functions.

Keywords: stabilization, heat equation, Cauchy problem