ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2021, том 496, с. 68–72

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517

О ГЛОБАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРАМИ

© 2021 г. А. В. Арутюнов[1,2], С. Е. Жуковский[1,*]

Представлено академиком РАН А.Б. Куржанским 14.08.2020 г.
Поступило 18.08.2020 г.
После доработки 11.12.2020 г.
Принято к публикации 12.12.2020 г.

Рассматриваются гладкие отображения, действующие из одного банахова пространства в другое и зависящие от параметра, принимающего значения в топологическом пространстве. При различных предположениях невырожденности этих отображений получены достаточные условия существования непрерывных глобальных и полулокальных неявных и обратных функций. Приведены приложения этих результатов, в том числе, к задаче о непрерывном продолжении неявной функции и к задаче о точках совпадения гладкого и вполне непрерывного отображений.

Ключевые слова: глобальная неявная функция, непрерывное продолжение неявной функции, точка совпадения

DOI: 10.31857/S268695432101001X

Пусть заданы банаховы пространства X, Y, топологическое пространство Σ и непрерывное отображение $f\colon X\times\Sigma\to Y$. Рассмотрим уравнение

$$f(x,\sigma)=0 \qquad (1)$$

относительно неизвестного $x\in X$ и параметра $\sigma\in\Sigma$. Непрерывную функцию $g(\cdot)$, определенную на пространстве Σ или некотором его подмножестве и удовлетворяющую на нем тождеству $f(g(\sigma),\sigma)\equiv 0$, называют неявной функцией.

В этой работе приводятся глобальные теоремы о неявной функции, т.е. условия, при которых для всех значений параметра $\sigma\in\Sigma$ уравнение (1) разрешимо и имеет решение $x=g(\sigma)$, которое непрерывно зависит от σ. В качестве частного случая получена глобальная, а также полулокальная теорема об обратной функции, представляющая собой достаточные условия существования определенного на заданном шаре в Y непрерывного правого обратного отображения к заданному гладкому отображению. В качестве приложений теоремы о неявной функции получены теоремы о непрерывном продолжении неявной функции, о ε-неявной функции и о существовании точек совпадения.

[1] *Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук, Москва, Россия*
[2] *Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук, Москва, Россия*
**E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru*

Глобальная теорема об обратной функции восходит к Ж. Адамару, который в [1] (см. также [2]) доказал, что если $X=Y=\mathbb{R}^n$, непрерывно дифференцируемое отображение $F\colon X\to Y$ равномерно невырождено, т.е. линейный оператор $\frac{\partial F}{\partial x}(x)$ обратим при каждом $x\in X$ и функция $\left\|\frac{\partial F}{\partial x}(x)^{-1}\right\|$ ограничена на X, то F является диффеоморфизмом. Здесь и далее $\|\cdot\|$ обозначает норму линейного ограниченного оператора и нормы в пространствах X и Y.

Особый интерес представляет уравнение (1), когда пространства X и Y не являются линейно топологически изоморфными, например, когда $X=\mathbb{R}^n$, $Y=\mathbb{R}^k$ и $n>k$. Глобальные теоремы о неявной и обратной функции в этом случае получены в [3] в предположении гладкости отображения f по переменной x. Глобальная теорема об обратной функции для локально липшицевых отображений получена в [4].

Сформулируем обобщение результата из [3] на случай гильбертовых пространств. Для этого введем необходимые понятия.

Как обычно, $\mathscr{L}(X,Y)$ – пространство линейных ограниченных операторов A, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y, а $\mathscr{SL}(X,Y)$ – множество всех сюръективных операторов $A\in\mathscr{L}(X,Y)$. Через $B(x,r)$ обозначим замкнутый шар в пространстве X радиуса $r\ge 0$ с центром в точке $x \in X$ и то же самое обозначение будем использовать для шаров в Y.

Для линейного оператора $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ положим

$$\mathrm{cov}A := \sup\{\alpha \geq 0: B(0,\alpha) \subset AB(0,1)\}.$$

Теорема Банаха об открытом отображении означает, что $\mathrm{cov}A > 0$ тогда и только тогда, когда $A \in \mathcal{SL}(X, Y)$. Теорема Майкла о непрерывном селекторе (см. [5]) гарантирует, что если $A \in \mathcal{SL}(X, Y)$, то уравнение $Ax = y$ имеет непрерывное на Y решение $x = x(y)$.

Предположим, что отображение $f(\cdot,\sigma)$ дифференцируемо при каждом $\sigma \in \Sigma$. Для произвольной непрерывной функции φ: $\Sigma \to X$ и $t \geq 0$ положим

$$\alpha_\varphi(t) := \inf\left\{\mathrm{cov}\frac{\partial f}{\partial x}(x,\sigma): x \in B(\varphi(\sigma),t), \sigma \in \Sigma\right\}.$$

Теорема 1. *Пусть X и Y — гильбертовы пространства, отображение f: $X \times \Sigma \to Y$ непрерывно, при каждом фиксированном $\sigma \in \Sigma$ отображение $f(\cdot,\sigma)$ дважды непрерывно дифференцируемо по x, а отображения $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ непрерывны на $X \times \Sigma$.*

Тогда для любой непрерывной функции φ: $\Sigma \to X$, для которой выполняется хотя бы одно из двух условий: или

$$\int_0^{+\infty} \alpha_\varphi(t)dt = +\infty, \qquad (2)$$

или

$$\sup_{\sigma\in\Sigma}\|f(\varphi(\sigma),\sigma)\| < \int_0^{+\infty} \alpha_\varphi(t)dt, \qquad (3)$$

существует непрерывная функция $g = g_\varphi$: $\Sigma \to X$ такая, что

$$f(g(\sigma),\sigma) = 0 \quad \forall\sigma \in \Sigma, \qquad (4)$$

$$\int_0^{\|g(\sigma)-\varphi(\sigma)\|} \alpha_\varphi(t)dt \leq \|f(\varphi(\sigma),\sigma)\| \quad \forall\sigma \in \Sigma. \qquad (5)$$

Доказательство теоремы 1 основано на методах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и состоит в исследовании решений некоторой задачи Коши, которая строится по отображению f (см. [3]).

Особый интерес и сложность представляет случай, когда пространства X и Y являются банаховыми. В этом случае описанный выше метод сведения уравнения (1) к задаче Коши применить не удается. Это связано с тем, что существуют банаховы пространства X и Y и линейный оператор $A \in \mathcal{SL}(X,Y)$ такие, что оператор A не имеет непрерывного линейного (и даже нелинейного, но локально липшицевого) правого обратного отображения (подробнее см. [6]). Поэтому задача о глобальной неявной функции в банаховых пространствах требует иного подхода.

В качестве такого подхода предлагается метод, основанный на использовании достаточных условий существования минимума полунепрерывных снизу функционалов (см. [7, 8]). Применение указанных результатов из [7, 8] позволяет доказать следующее утверждение.

Пусть задана непрерывная функция π: $\Sigma \to \mathbb{R}_+$ ($\mathbb{R}_+$ — множество неотрицательных вещественных чисел). Для $d > 0$ положим

$$\Sigma(d) := \{\sigma \in \Sigma: \pi(\sigma) < d\}.$$

Введем следующие предположения относительно отображения f: $X \times \Sigma \to Y$.

(A1) отображение f непрерывно, отображение $f(\cdot,\sigma)$ непрерывно дифференцируемо по x при любом фиксированном $\sigma \in \Sigma$, и отображение $\frac{\partial f}{\partial x}$: $X \times \Sigma \to \mathcal{L}(X,Y)$ непрерывно.

Поскольку отображение f дифференцируемо по x, то для любых $(x,\sigma) \in X \times \Sigma$, $\xi \in X$ имеет место представление

$$f(x+\xi,\sigma) = f(x,\sigma) + \frac{\partial f}{\partial x}(x,\sigma)\xi + o(x,\sigma;\xi),$$

в котором o: $X \times \Sigma \times X \to Y$ — отображение, для которого

$$\forall(x,\sigma) \in X \times \Sigma, \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0:$$
$$\|o(x,\sigma;\xi)\| \leq \varepsilon\|\xi\| \quad \forall\xi \in B(0,\delta).$$

(A2) при каждом $d > 0$ отображение f равномерно дифференцируемо по x в следующем смысле:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0: \quad \|o(x,\sigma;\xi)\| \leq \varepsilon\|\xi\|$$
$$\forall(x,\sigma) \in B(0,d) \times \Sigma(d), \quad \forall\xi \in B(0,\delta).$$

(A3) при каждом $d > 0$ производная отображения f по x равномерно ограничена в следующем смысле:

$$\exists c = c(d) \geq 0: \quad \left\|\frac{\partial f}{\partial x}(x,\sigma)\right\| \leq c$$
$$\forall(x,\sigma) \in B(0,d) \times \Sigma(d).$$

Отметим, что если пространства X и Y конечномерны, а Σ компактно, то **(A2)** и **(A3)** вытекают из **(A1)**. Аналогично, если пространства X и Y конечномерны, $\Sigma = Y$, и f представимо в виде $f(x,\sigma) \equiv F(x) - \sigma$, а F непрерывно дифференцируемо, то предположения **(A1)**–**(A3)** также выполняются.

Теорема 2. *Пусть X, Y — банаховы пространства, и отображение f удовлетворяет предположениям* **(A1)–(A3)**.

Тогда для любой непрерывной функции φ: $\Sigma \to X$, *для которой имеет место или* (2) *или* (3), *и любого* $\varepsilon > 0$ *существует непрерывная функция* $g = g_{\varphi,\varepsilon}$: $\Sigma \to X$, *удовлетворяющая соотношениям* (4) *и*

$$\int_0^{\|g(\sigma)-\varphi(\sigma)\|} \alpha_\varphi(t)dt \le (1+\varepsilon)\|f(\varphi(\sigma),\sigma)\| \quad \forall \sigma \in \Sigma. \quad (6)$$

Теоремы 1 и 2 носят глобальный характер, т.е. гарантируют существование неявной функции g, определенной на всем Σ. Если в определении функции α_φ и предположениях (2), (3) пространство Σ заменить на заданное подмножество $\hat{\Sigma} \subset \Sigma$, то теоремы 1 и 2 будут гарантировать существование неявной функции на $\hat{\Sigma}$ и, таким образом, будут иметь полулокальный характер.

Если предположения (2) и (3) одновременно нарушаются, то их можно удовлетворить, уменьшая множество Σ (и, соответственно, уменьшая в неравенстве (3) левую часть и увеличивая в нем правую часть). В связи со сказанным возникает следующий естественный вопрос: при каких условиях существует указанное выше множество $\hat{\Sigma}$. Из соображений гладкости и непрерывности следует, что если существует точка $(x_0,\sigma_0) \in X \times \Sigma$ такая, что $f(x_0,\sigma_0) = 0$ и $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\sigma_0) \in \mathcal{SL}(X,Y)$, то существует окрестность $\hat{\Sigma}$ точки σ_0, для которой (3) выполняется при $\Sigma = \hat{\Sigma}$. Используя это рассуждение несложно вывести из теорем 1 и 2 локальные теоремы о неявной функции.

Приведем простое достаточное условие, при котором имеет место соотношение (2). А именно, если

$$\gamma := \inf\left\{\operatorname{cov}\frac{\partial f}{\partial x}(x,\sigma)\colon (x,\sigma) \in X \times \Sigma\right\} > 0, \quad (7)$$

то выполняется соотношение (2). Приведенное условие соответствует предположениям теоремы Адамара, но оно обременительнее условия (2), которое по существу встречалось в работах [9, 10].

Приведем пример, в котором условие (2) выполняется для любой ограниченной функции φ, а условие (7) нарушается. Пусть u: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – произвольная непрерывная четная функция, для которой $u(0) > 0$, u убывает на $[0,+\infty)$ и

$$u(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty, \qquad \int_0^{+\infty} u(t)dt = +\infty.$$

Отметим, что в качестве u можно, например, взять функцию $u(t) = (1+|t|^p)$, $t \in \mathbb{R}$, где $p \in (0,1]$.

Положим

$$f(x,\sigma) := \int_0^x u(t)dt - \sigma, \quad (x,\sigma) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}.$$

Очевидно, отображение f непрерывно дифференцируемо. Кроме того, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,\sigma) = u(x) \to 0$ при $x \to \infty$ и, значит, условие (7) нарушается. В то же время, $\alpha_\varphi(t) \ge u(t + c_\varphi)$ при любом $t \ge 0$, где $c_\varphi :=$ $:= \sup\{|\varphi(\sigma)|\colon \sigma \in \mathbb{R}\}$ и, значит, условие (2) выполняется.

Из теоремы 2 вытекает следующий ее полулокальный вариант.

Следствие 1. *Пусть* X, Y – *банаховы пространства, и отображение* f *удовлетворяет предположениям* **(A1)–(A3).**

Тогда для любого непрерывного отображения φ: $\Sigma \to X$ *и любого* $r > 0$, *для которых*

$$\gamma = \gamma(r,\varphi) :=$$
$$:= \inf\left\{\operatorname{cov}\frac{\partial f}{\partial x}(x,\sigma)\colon (x,\sigma) \in B(\varphi(\sigma),r)\times\Sigma\right\} > 0,$$
$$\sup_{\sigma\in\Sigma}\|f(\varphi(\sigma),\sigma)\| < \gamma r,$$

для любого $\varepsilon > 0$ *существует непрерывная функция* g: $\Sigma \to X$ *такая, что*

$$f(g(\sigma),\sigma) = 0 \quad \forall \sigma \in \Sigma,$$
$$\|g(\sigma) - \varphi(\sigma)\| \le \frac{1+\varepsilon}{\gamma}\|f(\varphi(\sigma),\sigma)\| \quad \forall \sigma \in \Sigma.$$

Для теоремы об обратной функции условия (2) и (3) принимают более простой вид. Приведем соответствующую терему об обратной функции, которая вытекает из теоремы 2.

Пусть X, Y – банаховы пространства и задано непрерывно дифференцируемое отображение F: $X \to Y$.

Теорема 3. *Предположим, что производная* $\frac{\partial F}{\partial x}$ *ограничена на любом ограниченном множестве, и отображение* F *равномерно дифференцируемо, т.е.*

$$\forall r > 0, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0:$$
$$\left\|F(x+\xi) - F(x) - \frac{\partial F}{\partial x}(x)\xi\right\| \le \varepsilon\|\xi\|$$
$$\forall x \in B(0,r), \quad \forall \xi \in B(0,\delta).$$

Тогда для любой точки $x_0 \in X$ *и любого* $R > 0$, *для которых*

$$R < \int_0^{+\infty}\left(\inf_{x\in B(x_0,t)} \operatorname{cov}\frac{\partial F}{\partial x}(x)\right)dt, \quad (8)$$

для любого $\varepsilon > 0$ *существует непрерывная функция* $G = G_{x_0,\varepsilon,R}$: $B(F(x_0),R) \to X$ *такая, что*

$$F(G(y)) = y, \quad (9)$$

$$\int_0^{\|G(y)-x_0\|} \left(\inf_{x\in B(x_0,t)} \operatorname{cov} \frac{\partial F}{\partial x}(x) \right) dt \le (1+\varepsilon)\|F(x_0) - y\| \quad (10)$$

для всех $y \in B(F(x_0), R)$.

В частности, если имеет место

$$\int_0^{+\infty} \left(\inf_{x\in B(x_0,t)} \operatorname{cov} \frac{\partial F}{\partial x}(x) \right) dt = +\infty, \quad (11)$$

то существует непрерывная функция $G\colon Y \to X$, *которая удовлетворяет условиям* (9), (10) *для всех* $y \in Y$.

Теорема 3 содержит полулокальное утверждение, так как она, в частности, гарантирует существование непрерывной обратной функции G, определенной на заданном шаре $B(F(x_0), R) \subset Y$. Аналогичное теореме 3 утверждение для гильбертовых пространств можно вывести из теоремы 1.

Из следствия 1 вытекает следующий вариант теоремы 3 об обратной функции, также носящий полулокальный характер.

С л е д с т в и е 2. *Предположим, что отображение* F *равномерно дифференцируемо и производная* $\frac{\partial F}{\partial x}$ *ограничена на любом ограниченном множестве.*

Тогда для любой точки $x_0 \in X$ *и любого* $r > 0$, *для которых*

$$\gamma = \gamma(r, x_0) := \inf_{x\in B(x_0,r)} \operatorname{cov} \frac{\partial F}{\partial x}(x) > 0,$$

для любого $\varepsilon > 0$ *существует непрерывная функция* $G = G_{x_0,\varepsilon,r}\colon B\left(F(x_0), \frac{\gamma r}{1+\varepsilon}\right) \to X$ *такая, что*

$$F(G(y)) = y,$$

$$\|G(y) - x_0\| \le \frac{1+\varepsilon}{\gamma}\|y - F(x_0)\|$$

при всех $y \in B\left(F(x_0), \frac{\gamma r}{1+\varepsilon}\right)$.

В предположениях теоремы 3 может не существовать обратного к F отображения G, которое является гладким или хотя бы удовлетворяющим условию Липшица в окрестности точки $F(x_0)$, даже если F бесконечно дифференцируемо. Последнее объясняется тем, что, как отмечалось выше, существуют линейные операторы, действующие из одного банахового пространства в другое, не имеющие липшицевого правого обратного отображения. Для некоторых классов банаховых пространств X и Y, включающих в себя класс всех гильбертовых пространств, глобальные теоремы о гладких и локально липшицевых обратных и неявных функциях получены в [11].

Важной особенностью приведенных выше утверждений является полученные априорные оценки (5), (6) и (9) неявных и обратных функций. Эти оценки имеют различные приложения.

Начнем со следующей теоремы о непрерывном продолжении неявной функции.

Т е о р е м а 4. *Пусть топологическое пространство* Σ *является хаусдорфовым и паракомпактным, отображение* f *удовлетворяет предположениям* **(A1)–(A3)** *и* (7).

Тогда для любого замкнутого подмножества $C \subset \Sigma$ *и любой непрерывной функции* $\varphi\colon C \to X$, *для которой*

$$f(\varphi(\sigma), \sigma) = 0 \quad \forall \sigma \in C,$$

существует непрерывная функция $g\colon \Sigma \to X$ *такая, что*

$$g(\sigma) = \varphi(\sigma) \quad \forall \sigma \in C, \quad f(g(\sigma), \sigma) = 0 \quad \forall \sigma \in \Sigma.$$

Еще одним приложением теоремы 2 является следующая теорема о приближенной неявной функции.

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Непрерывное отображение $\varphi\colon \Sigma \to X$ будем называть ε-неявной функцией, если $\|f(\varphi(\sigma), \sigma)\| \le \varepsilon \; \forall \sigma \in \Sigma$. Иными словами, φ является “неявной функцией с точностью до ε”.

П р е д л о ж е н и е 1. *Пусть отображение* f *удовлетворяет предположениям* **(A1)–(A3)** *и* (7). *Тогда для любой* ε*-неявной функции* φ *существует непрерывная функция* $g = g_\varphi\colon \Sigma \to X$ *такая, что*

$$f(g(\sigma), \sigma) = 0, \quad \|g(\sigma) - \varphi(\sigma)\| \le \frac{\varepsilon}{\gamma} \quad \forall \sigma \in \Sigma.$$

Последнее свойство принято называть устойчивостью по Уламу–Хайерсу (см. [12]).

Следующее утверждение является следствием теоремы 3 и представляет собой обобщение теорем Брауэра и Шаудера на задачу о точках совпадения. Напомним, что точкой совпадения двух отображений $F, \Phi\colon X \to Y$ называется точка $\xi \in X$ такая, что $F(\xi) = \Phi(\xi)$.

П р е д л о ж е н и е 2. *Пусть для отображения* $F\colon X \to Y$ *выполнены предположения теоремы* 3.

Тогда для любой точки $x_0 \in X$, *любого* $r > 0$ *и любого вполне непрерывного отображения* $\Phi\colon B(x_0, r) \to Y$, *для которых*

$$\sup_{x\in B(x_0,r)} \|\Phi(x) - F(x_0)\| < \int_0^r \left(\inf_{x\in B(x_0,t)} \operatorname{cov} \frac{\partial F}{\partial x}(x) \right) dt, \quad (12)$$

существует точка $\xi \in B(x_0, r)$ *такая, что* $F(\xi) = \Phi(\xi)$.

Очевидно, предположение (12) выполняется при некотором $r > 0$, если отображение $\Phi\colon X \to Y$ ограничено и имеет место (11). Соотношение (11) выполняется, если существует $\gamma > 0$, для которого $\operatorname{cov}\frac{\partial F}{\partial x}(x) \geq \gamma \ \forall x \in X$.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке РНФ (проект 20-11-20131).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hadamard J.* Sur les transformations ponctuelles // Bull. Soc. Math. France. 1906. V. 34. P. 71–84.
2. *Ортега Дж., Рейнболт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975.
3. *Арутюнов А.В., Жуковский С.Е.* Применение методов обыкновенных дифференциальных уравнений для глобальных теорем о неявной функции // Дифф. уравнения. 2019. Т. 55. № 4. С. 452–463.
4. *Arutyunov A.V., Izmailov A.F., Zhukovskiy S.E.* Continuous selections of solutions for locally lipschitzian equations // J. Optim. Theory Appl. 2020. V. 185. P. 679–699.
5. *Michael E.* Continuous selections. I // Annals of Mathematics. 1956. V. 63. Iss. 2. P. 361–382.
6. *Царьков И.Г.* О правом обратном операторе и ε-выборках // УМН. 1995. Т. 50. № 2. С. 207–208.
7. *Fabian M., Preiss D.* A generalization of the interior mapping theorem of Clarke and Pourciau // Comment. Math. Univ. Carol. 1987. V. 28. P. 311–324.
8. *Арутюнов А.В.* Условие Каристи и существование минимума ограниченной снизу функции в метрическом пространстве. Приложения к теории точек совпадения // Тр. МИАН. 2015. Т. 291. С. 30–44.
9. *Plastock R.* Homeomorphisms between Banach spaces // Tr. AMS. 1974. V. 200. P. 169–183.
10. *Абрамов А.А., Юхно Л.Ф.* Об одном численном методе решения систем нелинейных уравнений // ЖВМиМФ. 2015. Т. 55. № 11. С. 1827–1834.
11. *Царьков И.Г.* О глобальном существовании неявной функции // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 7. С. 79–116.
12. *Улам С.* Нерешенные математические задачи. М.: Наука, 1964.

ON GLOBAL SOLVABILITY OF NONLINEAR EQUATIONS WITH PARAMETERS

A. V. Arutyunov[a,b] and S. E. Zhukovskiy[a]

[a] *V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

[b] *Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences (Kharkevich Institute), Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS A.B. Kurzhansky

We consider smooth mappings acting from one Banach space to another and depending on a parameter belonging to a topological space. Under various regularity assumptions, sufficient conditions for the existence of global continuous inverse and implicit functions are obtained. We consider applications of these results to the problem of continuous extension of implicit functions and to the problem of coincidence points of smooth and continuous compact mappings.

Keywords: Global implicit function, implicit function continuation, coincidence point