ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 495, с. 59–64

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.223

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ И “СТРАННЫЙ” ЧЛЕН, ВОЗНИКАЮЩИЙ ПРИ УСРЕДНЕНИИ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В ПЕРФОРИРОВАННОЙ ОБЛАСТИ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ТИПА РОБИНА В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

© 2020 г. А. В. Подольский[1,*], Т. А. Шапошникова[1,**]

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 01.10.2020 г.
Поступило 05.10.2020 г.
После доработки 02.11.2020 г.
Принято к публикации 05.11.2020 г.

Работа посвящена изучению асимптотического поведения оптимального управления для краевой задачи в ε-периодически перфорированной области с линейным краевым условием типа Робина, когда период структуры ε стремится к нулю, а параметры задачи – диаметр перфораций и коэффициент адсорбции – принимают критические значения.

Ключевые слова: усреднение, перфорированная область, критический случай, оптимальное управление, “странный” член

DOI: 10.31857/S2686954320060235

В сообщении исследуется поведение оптимального управления для краевой задачи в ε-периодически перфорированной области с линейным краевым условием типа Робина на границе перфораций при стремлении периода структуры к нулю. Рассматривается функционал стоимости, состоящий из двух слагаемых: интеграла Дирихле, описывающего энергию состояния, и стоимости управления, взятой с коэффициентом $N > 0$. В качестве перфораций используются шары радиуса $C_0\varepsilon^{\alpha}$, где C_0 – некоторая положительная постоянная, $\alpha = \dfrac{n}{n-2}$, $n \geq 3$. В краевое условие Робина входит коэффициент адсорбции вида $\varepsilon^{-\gamma}$, где $\gamma = \dfrac{n}{n-2}$. Заметим, что данные значения параметров α и γ являются критическими для данной задачи, что характеризуется появлением новых членов в усредненной задаче и нового слагаемого в предельном функционале стоимости. Известно, что нахождение оптимального управления v_ε связано с решением сопряженной задачи (см. [4]). В настоящей работе построена система уравнений на пару $(u_\varepsilon, P_\varepsilon)$, где u_ε – функция состояния, P_ε – решение сопряженной задачи. В нашем случае оптимальное управление v_ε связано с P_ε следующим образом: $v_\varepsilon = -N^{-1}P_\varepsilon$. Для этой системы в работе построена и обоснована усредненная задача и получен новый функционал стоимости, которому пара (u_0, v_0), где u_0 – предел последовательности u_ε, v_0 – предел v_ε, доставляет минимум.

Поведение оптимального управления и усреднение краевых задач изучалось во многих работах. Наиболее близкими к данному исследованию являются работы [1, 6, 7], но в них были изучены задачи с другими краевыми условиями.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ с гладкой границей $\partial\Omega$, $Y = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^n$. Обозначим через G_0 – единичный шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в начале координат. Положим $\delta B = \{x \,|\, \delta^{-1}x \in B\}$, $\delta > 0$.

Для $\varepsilon > 0$ определим

$$\tilde{\Omega}_\varepsilon = \{x \in \Omega: \rho(x, \partial\Omega) > 2\varepsilon\}.$$

Введем множество

$$G_\varepsilon = \bigcup_{j \in \Upsilon_\varepsilon} (a_\varepsilon G_0 + \varepsilon j) = \bigcup_{j \in \Upsilon_\varepsilon} G_\varepsilon^j,$$

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: avpodolskiy@yandex.ru*
***E-mail: shaposh.tan@mail.ru*

где $a_\varepsilon = C_0\varepsilon^{\frac{n}{n-2}}$, $C_0 = \text{const} > 0$, $\Upsilon_\varepsilon = \{j \in \mathbb{Z}^n\colon a_\varepsilon G_0 + \varepsilon j \cap \tilde{\Omega}_\varepsilon \neq \phi\}$, $|\Upsilon_\varepsilon| \cong d\varepsilon^{-n}$, $d = \text{const} > 0$, $\mathbb{Z}^n$ – множество векторов в $\mathbb{R}^n$ с целыми координатами. Обозначим $Y_\varepsilon^j = \varepsilon Y + \varepsilon j$, $P_\varepsilon^j = \varepsilon j$, $j \in \mathbb{Z}^n$. Заметим, что $\overline{G_\varepsilon^j} \subset \overline{Y_\varepsilon^j}$ и центр шара $G_\varepsilon^j = a_\varepsilon G_0 + \varepsilon j$ совпадает с центром куба Y_ε^j.

Определим перфорированную область

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \backslash \overline{G_\varepsilon},$$

с границей

$$\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup S_\varepsilon, \quad S_\varepsilon = \partial G_\varepsilon.$$

Пусть $v \in L^2(\Omega_\varepsilon)$. Обозначим через $u_\varepsilon(v)$ – элемент $H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$, являющийся обобщенным решением задачи

$$\begin{gathered}-\Delta u_\varepsilon = f + v, \quad x \in \Omega_\varepsilon,\\ \partial_\nu u_\varepsilon + \varepsilon^{-\gamma} a(x) u_\varepsilon = 0, \quad x \in S_\varepsilon,\\ u_\varepsilon = 0, \quad x \in \partial\Omega,\end{gathered} \tag{1}$$

где $f \in L^2(\Omega)$, $a \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $a(x) \geq a_0 = \text{const} > 0$, $\gamma = \dfrac{n}{n-2}$, ν – вектор внешней единичной нормали к S_ε.

Рассмотрим функционал

$$\begin{gathered}J_\varepsilon\colon L^2(\Omega_\varepsilon) \to \mathbb{R},\\ J_\varepsilon(v) = \frac{1}{2}\|\nabla u_\varepsilon(v)\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \frac{N}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)}.\end{gathered} \tag{2}$$

Хорошо известно, что существует единственная пара $(u_\varepsilon(v_\varepsilon), v_\varepsilon)$ (см. [4, с. 57]), называемая оптимальной, такая, что

$$J_\varepsilon(v_\varepsilon) = \min_{v \in L^2(\Omega_\varepsilon)} J_\varepsilon(v).$$

В этом случае v_ε называется оптимальным управлением. Цель данной работы – найти предел при $\varepsilon \to 0$ оптимального управления v_ε и функционала стоимости $J_\varepsilon(v_\varepsilon)$.

С этой задачей связана сопряженная задача

$$\begin{gathered}\Delta P_\varepsilon = \Delta u_\varepsilon, \quad x \in \Omega_\varepsilon,\\ \partial_\nu(P_\varepsilon - u_\varepsilon) + \varepsilon^{-\gamma} a(x) P_\varepsilon = 0, \quad x \in S_\varepsilon,\\ P_\varepsilon = 0, \quad x \in \partial\Omega.\end{gathered}$$

Учитывая, что оптимальное управление удовлетворяет вариационному неравенству (см. [4])

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (P_\varepsilon + N v_\varepsilon)(v - v_\varepsilon)dx \geq 0,$$

где v – произвольный элемент $L^2(\Omega_\varepsilon)$, получим, что

$$v_\varepsilon = -N^{-1} P_\varepsilon.$$

2. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Имеет место следующая теорема усреднения.

Т е о р е м а 1. *Пусть $f \in L^2(\Omega)$ и $(u_\varepsilon, P_\varepsilon)$ – решение системы*

$$\begin{gathered}-\Delta u_\varepsilon = f - N^{-1}P_\varepsilon, \quad x \in \Omega_\varepsilon,\\ \Delta P_\varepsilon = \Delta u_\varepsilon, \quad x \in \Omega_\varepsilon,\\ \partial_\nu u_\varepsilon + \varepsilon^{-\gamma} a(x) u_\varepsilon = 0, \quad x \in S_\varepsilon,\\ \partial_\nu P_\varepsilon - \partial_\nu u_\varepsilon + \varepsilon^{-\gamma} a(x) P_\varepsilon = 0, \quad x \in S_\varepsilon,\\ u_\varepsilon = P_\varepsilon = 0, \quad x \in \partial\Omega.\end{gathered} \tag{3}$$

Пусть $\tilde{u}_\varepsilon$ и $\tilde{P}_\varepsilon$ – продолжение функций u_ε и P_ε, такое, что $\tilde{u}_\varepsilon, \tilde{P}_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ и выполнены неравенства

$$\|\tilde{u}_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq K\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)}, \quad \|\nabla\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq K\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}, \tag{4}$$

$$\|\tilde{P}_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq K\|P_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)}, \quad \|\nabla\tilde{P}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq K\|\nabla P_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}, \tag{5}$$

где постоянная K здесь и далее не зависит от ε. Тогда при $\varepsilon \to 0$

$$\tilde{u}_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \quad \textit{слабо в} \quad H_0^1(\Omega), \tag{6}$$

$$\tilde{P}_\varepsilon \rightharpoonup P_0 \quad \textit{слабо в} \quad H_0^1(\Omega), \tag{7}$$

где $(u_0, P_0) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ – решение системы

$$\begin{gathered}-\Delta u_0 + A_n\frac{a(x)}{a(x) + C_n}u_0 = f - N^{-1}P_0, \quad x \in \Omega,\\ -\Delta P_0 + A_n\frac{a(x)}{a(x) + C_n}P_0 = -\Delta u_0 + \\ + A_n\left(\frac{a(x)}{a(x) + C_n}\right)^2 u_0, \quad x \in \Omega,\\ u_0 = P_0 = 0 \quad x \in \partial\Omega,\end{gathered} \tag{8}$$

$A_n = (n-2)C_0^{n-2}\omega_n$, $C_n = \dfrac{n-2}{C_0}$, ω_n – *площадь поверхности единичной сферы в* $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$.

З а м е ч а н и е 1. Заметим, что $v_0 = -N^{-1}P_0$ является оптимальным управлением, а пара $(u_0 = u(v_0), v_0)$ – оптимальной, в задаче нахождения на $L^2(\Omega)$ минимума функционала

$$J_0(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(v)|^2 dx + $$
$$+\frac{1}{2}A_n\int_\Omega \left(\frac{a(x)}{a(x)+C_n}\right)^2 u^2(v)dx + \frac{N}{2}\int_\Omega v^2 dx, \tag{9}$$
$$J_0(v_0) = \min_{v\in L^2(\Omega)} J_0(v),$$

где $u(v)$ – обобщенное решение задачи

$$\begin{gathered}-\Delta u + A_n\frac{a(x)}{a(x)+C_n}u = f + v, \quad x\in\Omega,\\ u = 0, \quad x\in\partial\Omega.\end{gathered} \tag{10}$$

Ниже мы покажем, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon(v_\varepsilon) = J_0(v_0). \tag{11}$$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

3.1. Равномерные по ε оценки для u_ε и P_ε

Получим оценки для u_ε и P_ε. Из интегрального тождества для задачи (3) на функцию P_ε имеем

$$\begin{gathered}\int_{\Omega_\varepsilon}|\nabla P_\varepsilon|^2 dx + \varepsilon^{-\gamma}\int_{S_\varepsilon} a(x)P_\varepsilon^2 ds = \int_{\Omega_\varepsilon}\nabla u_\varepsilon\nabla P_\varepsilon dx \le\\ \le\left(\int_{\Omega_\varepsilon}|\nabla P_\varepsilon|^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_{\Omega_\varepsilon}|\nabla u_\varepsilon|^2 dx\right)^{1/2}.\end{gathered} \tag{12}$$

Учитывая, что

$$\int_{\Omega_\varepsilon}\nabla u_\varepsilon\nabla P_\varepsilon dx + \varepsilon^{-\gamma}\int_{S_\varepsilon} a(x)u_\varepsilon P_\varepsilon ds = \int_{\Omega_\varepsilon}(f - N^{-1}P_\varepsilon)P_\varepsilon dx \tag{13}$$

и

$$\int_{\Omega_\varepsilon}\nabla u_\varepsilon\nabla P_\varepsilon dx + \varepsilon^{-\gamma}\int_{S_\varepsilon} a(x)u_\varepsilon P_\varepsilon ds = \int_{\Omega_\varepsilon}|\nabla u_\varepsilon|^2 dx, \tag{14}$$

выводим

$$\int_{\Omega_\varepsilon}|\nabla u_\varepsilon|^2 dx = \int_{\Omega_\varepsilon}(fP_\varepsilon - N^{-1}P_\varepsilon^2)dx \le \int_{\Omega_\varepsilon} fP_\varepsilon dx. \tag{15}$$

Из неравенств (12), (15) получим

$$\begin{gathered}\int_{\Omega_\varepsilon}|\nabla P_\varepsilon|^2 dx \le \int_{\Omega_\varepsilon}|f||P_\varepsilon|dx \le \delta\int_{\Omega_\varepsilon}P_\varepsilon^2 dx +\\ + C_\delta\int_{\Omega_\varepsilon}f^2 dx \le K\delta\int_{\Omega_\varepsilon}|\nabla P_\varepsilon|^2 dx + C_\delta\int_{\Omega_\varepsilon}f^2 dx,\end{gathered}$$

где δ – произвольное положительное число.

Отсюда выводим оценки

$$\|\nabla P_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \le K, \quad \|P_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \le K. \tag{16}$$

Из (14), (15) получим

$$\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega)} \le K. \tag{17}$$

Из оценок (16), (17) вытекает, что существуют продолжения $\tilde u_\varepsilon$, $\tilde P_\varepsilon$ функций u_ε и P_ε на всю область Ω, такие что выполнены оценки (4), (5). Из данных оценок следует, что по некоторой подпоследовательности (сохраним для нее обозначение исходной последовательности) при $\varepsilon\to 0$ имеем

$$\begin{aligned}\tilde u_\varepsilon &\to u_0 \quad \text{сильно в} \quad L^2(\Omega),\\ \tilde u_\varepsilon &\rightharpoonup u_0 \quad \text{слабо в} \quad H_0^1(\Omega),\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\tilde P_\varepsilon &\to P_0 \quad \text{сильно в} \quad L^2(\Omega),\\ \tilde P_\varepsilon &\rightharpoonup P_0 \quad \text{слабо в} \quad H_0^1(\Omega).\end{aligned} \tag{19}$$

3.2. Предельная задача для u_0

Покажем, что $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ – обобщенное решение задачи

$$\begin{gathered}-\Delta u_0 + A_n\frac{a(x)}{a(x)+C_n}u_0 = f - N^{-1}P_0, \quad x\in\Omega,\\ u_0 = 0, \quad x\in\partial\Omega.\end{gathered} \tag{20}$$

Действительно, в силу (18) и (19), нам надо найти предел при $\varepsilon\to 0$ только одного слагаемого в интегральном тождестве, соответствующем задаче на u_ε, а именно

$$\varepsilon^{-\gamma}\int_{S_\varepsilon} a(x)u_\varepsilon\phi ds.$$

Положим

$$H_\varepsilon \equiv \int_{\Omega_\varepsilon}\nabla u_\varepsilon\nabla(W_\varepsilon\phi)dx,$$

где

$$W_\varepsilon = \begin{cases} w_\varepsilon^j, & x\in T_{\varepsilon/4}^j\setminus\overline{G}_\varepsilon^j, \quad j\in\Upsilon_\varepsilon,\\ 1, & x\in G_\varepsilon^j, \quad j\in\Upsilon_\varepsilon,\\ 0, & x\in\mathbb{R}^n\setminus\overline{\cup_{j\in\Upsilon_\varepsilon}T_{\varepsilon/4}^j},\end{cases}$$

$T_{\varepsilon/4}^j$ – шар радиуса $\varepsilon/4$ с центром в точке P_ε^j, w_ε^j – решение задачи

$$\begin{gathered}\Delta w_\varepsilon^j = 0, \quad x\in T_{\varepsilon/4}^j\setminus\overline{G}_\varepsilon^j,\\ w_\varepsilon^j = 1, \quad x\in\partial G_\varepsilon^j,\\ w_\varepsilon^j = 0, \quad x\in\partial T_{\varepsilon/4}^j.\end{gathered} \tag{21}$$

Легко видеть, что

$$H_\varepsilon = -\varepsilon^{-\gamma}\int_{S_\varepsilon} a(x)u_\varepsilon\phi ds + \int_{\Omega_\varepsilon} f\phi W_\varepsilon dx - - N^{-1}\int_{\Omega_\varepsilon} P_\varepsilon W_\varepsilon \phi dx.$$

Учитывая, что $W_\varepsilon \rightharpoonup 0$ слабо в $H_0^1(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$, получим

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_\varepsilon} fW_\varepsilon\phi dx = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_\varepsilon} P_\varepsilon W_\varepsilon \phi dx = 0.$$

Поэтому

$$H_\varepsilon = -\varepsilon^{-\gamma}\int_{S_\varepsilon} a(x)u_\varepsilon\phi ds + \kappa_\varepsilon, \quad \kappa_\varepsilon \to 0, \quad \varepsilon \to 0. \quad (22)$$

Заметим, что H_ε можем представить в виде

$$H_\varepsilon = \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla W_\varepsilon \nabla(u_\varepsilon\phi)dx + \kappa_{1,\varepsilon}, \quad \kappa_{1,\varepsilon} \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

В силу определения W_ε, имеем

$$H_\varepsilon = \varepsilon^{-\gamma}C_n\int_{S_\varepsilon} u_\varepsilon\phi ds - \varepsilon(n-2)\times \times C_0^{n-2}2^{2n-2}\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_{T^j_{\varepsilon/4}} u_\varepsilon\phi ds + m_\varepsilon, \quad (23)$$

где $m_\varepsilon \to 0$, если $\varepsilon \to 0$.

Сравнивая (22) и (23), выводим

$$\varepsilon^{-\gamma}\int_{S_\varepsilon}(a(x) + C_n)u_\varepsilon\phi ds = = \varepsilon(n-2)C_0^{n-2}2^{2n-2}\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_{\partial T^j_{\varepsilon/4}} u_\varepsilon\phi ds + k_\varepsilon, \quad (24)$$

где $k_\varepsilon \to 0$, $\varepsilon \to 0$.

Положим в (24) $\phi = \dfrac{a(x)}{a(x) + C_n}\psi$, где ψ – произвольная функция из $C_0^\infty(\Omega)$, получим

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-\gamma}\int_{S_\varepsilon} a(x)u_\varepsilon\psi ds = (n-2)C_0^{n-2}\times \times\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon 2^{2n-2}\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_{\partial T^j_{\varepsilon/4}}\frac{a(x)}{a(x) + C_n}u_\varepsilon\psi ds = = A_n\int_\Omega \frac{a(x)}{a(x) + C_n}u_0\psi dx. \quad (25)$$

Заметим, что для получения равенства (25) мы воспользовались следующей леммой (см. [3]).

Л е м м а 1. *Пусть $h_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ и $h_\varepsilon \rightharpoonup h$ слабо в $H_0^1(\Omega)$, если $\varepsilon \to 0$. Тогда*

$$2^{2n-2}\varepsilon\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_{\partial T^j_{\varepsilon/4}} h_\varepsilon ds - \omega_n\int_\Omega h dx \to 0, \quad \varepsilon \to 0. \quad (26)$$

Таким образом, предельная функция u_0 удовлетворяет интегральному тождеству следующего вида:

$$\int_\Omega \nabla u_0\psi dx + A_n\int_\Omega \frac{a(x)}{a(x) + C_n}u_0\psi dx = = \int_\Omega (f - N^{-1}P_0)\psi dx,$$

где ψ – произвольная функция из $C_0^\infty(\Omega)$. Следовательно, u_0 – слабое решение задачи (20).

3.3. Предельная задача для P_0

Покажем, что функция $P_0 \in H_0^1(\Omega)$ – обобщенное решение задачи

$$-\Delta P_0 + A_n\frac{a(x)}{a(x) + C_n}P_0 = -\Delta u_0 + + A_n\left(\frac{a(x)}{a(x) + C_n}\right)^2 u_0, \quad x \in \Omega, \quad P_0 = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (27)$$

Положим

$$I_\varepsilon \equiv \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla P_\varepsilon \nabla(\varphi W_\varepsilon)dx.$$

Из интегрального тождества для P_ε имеем

$$I_\varepsilon + \varepsilon^{-\gamma}\int_{S_\varepsilon} a(x)P_\varepsilon\phi ds = \int_{\Omega_\varepsilon}\nabla u_\varepsilon\nabla(\phi W_\varepsilon)dx. \quad (28)$$

Учитывая интегральное тождество для u_ε, получим

$$\int_{\Omega_\varepsilon}\nabla u_\varepsilon\nabla(\phi W_\varepsilon)dx = -\varepsilon^{-\gamma}\int_{S_\varepsilon} a(x)u_\varepsilon\phi ds + + \int_{\Omega_\varepsilon} f\phi W_\varepsilon dx - N^{-1}\int_{\Omega_\varepsilon} P_\varepsilon\phi W_\varepsilon ds.$$

В силу (25) имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_\varepsilon}\nabla u_\varepsilon\nabla(\phi W_\varepsilon)dx = -A_n\int_\Omega \frac{a(x)}{a(x) + C_n}u_0\phi dx.$$

Поэтому из (28) выводим

$$I_\varepsilon = -\varepsilon^{-\gamma}\int_{S_\varepsilon} a(x)P_\varepsilon\phi ds - A_n\int_\Omega \frac{a(x)}{a(x) + C_n}u_0\phi dx + \kappa_\varepsilon, \quad (29)$$

где $\kappa_\varepsilon \to 0$, если $\varepsilon \to 0$.

С другой стороны, учитывая, что w_ε^j – решение задачи (21), получим

$$I_\varepsilon = \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla W_\varepsilon \nabla(P_\varepsilon \phi)dx + \alpha_\varepsilon = \varepsilon^{-\gamma} C_n \int_{S_\varepsilon} P_\varepsilon \phi ds - \\ - \varepsilon(n-2)C_0^{n-2} 2^{2n-2} \sum_{j\in \Upsilon_\varepsilon} \int_{\partial T_{\varepsilon/4}^j} P_\varepsilon \phi ds + \beta_\varepsilon, \tag{30}$$

где $\alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon \to 0$, если $\varepsilon \to 0$.

Сравнивая (29) и (30), приходим к равенству

$$\varepsilon^{-\gamma} \int_{S_\varepsilon} (a(x) + C_n) P_\varepsilon \phi ds = \\ = -A_n \int_\Omega \frac{a(x)}{a(x) + C_n} u_0 \phi dx + \\ + \varepsilon(n-2)C_0^{n-2} 2^{2n-2} \sum_{j\in \Upsilon_\varepsilon} \int_{\partial T_{\varepsilon/4}^j} P_\varepsilon \phi ds + \alpha_{1,\varepsilon}, \tag{31}$$

где $\alpha_{1,\varepsilon} \to 0$, если $\varepsilon \to 0$.

Положим в (31) $\phi(x) = \dfrac{a(x)}{a(x) + C_n} \psi(x)$, где $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ – произвольная функция. Тогда из (31) выводим

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-\gamma} \int_{S_\varepsilon} a(x) P_\varepsilon \psi ds = -A_n \int_\Omega \left(\frac{a(x)}{a(x) + C_n}\right)^2 u_0 \psi dx + \\ + A_n \int_\Omega \frac{a(x)}{a(x) + C_n} P_0 \psi dx. \tag{32}$$

Отсюда следует, что P_0 удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_\Omega \nabla P_0 \nabla \psi dx + A_n \int_\Omega \frac{a(x)}{a(x) + C_n} P_0 \psi dx = \\ = \int_\Omega \nabla u_0 \nabla \psi dx + A_n \int_\Omega \left(\frac{a(x)}{a(x) + C_n}\right)^2 u_0 \psi dx, \tag{33}$$

где ψ – произвольная функция из $C_0^\infty(\Omega)$. Что и требовалось показать.

Отсюда следует, что (u_0, P_0) – обобщенное решение системы (11). Теорема 1 доказана.

4. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИОНАЛА СТОИМОСТИ

Докажем теперь равенство (11). Имеем для $v_\varepsilon = -N^{-1} P_\varepsilon$

$$J_\varepsilon(N^{-1} P_\varepsilon) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx + \frac{1}{2N} \int_{\Omega_\varepsilon} P_\varepsilon^2 dx.$$

Из равенств (13) и (14) получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} (f - N^{-1} P_\varepsilon) P_\varepsilon dx = \\ = \frac{1}{2} \int_\Omega (f P_0 - N^{-1} P_0^2) dx = \frac{1}{2} \int_\Omega \nabla u_0 \nabla P_0 dx + \\ + \frac{A_n}{2} \int_\Omega \frac{a(x)}{a(x) + C_n} u_0 P_0 dx = \\ = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx + \frac{A_n}{2} \int_\Omega \left(\frac{a(x)}{a(x) + C_n}\right)^2 u_0^2 dx.$$

Отсюда выводим, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon(-N^{-1} P_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 dx + \frac{1}{2N} \int_\Omega P_\varepsilon^2 dx \right) = \\ = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx + \frac{A_n}{2} \int_\Omega \left(\frac{a(x)}{a(x) + C_n}\right)^2 u_0^2 dx + \\ + \frac{1}{2N} \int_\Omega P_0^2 dx = J_0(-N^1 P_0).$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе исследовано асимптотическое поведение оптимального управления и вопросы усреднения краевой задачи в перфорированной области в случае критического значения параметров задачи. Построен предельный функционал стоимости, который содержит новое слагаемое, так называемый “странный” член.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Saint Jean Paulin J., Zoubairi H.* Optimal control and “strange term” for a Stokes problem in perforated domains // Portugaliae Mathematica. V. 59. Fasc. 2-2002. Nova Serie.
2. *Зубова М.Н., Шапошникова Т.А.* // ДАН. 2017. Т. 475. № 3. С. 247–250.
3. *Зубова М.Н., Шапошникова Т.А.* // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 10. С. 128–136.
4. *Lions J.L.* Controle optimal de systemes gouvernes par des equations aux derivees partielles. Etudes Mathematiques Collection dirigee par P. Lelong. Paris: Dunod Gauthier-Villars, 1968.
5. *Díaz J.I.* Controllability and obstruction for some nonlinear parabolic problems in climatology. En el libro Modelado de Sistemes en Oceanografia, Climatologia y Ciencias Medio-Ambientales (C. Pares y A. Valle eds.) Universidad de Malaga, 1994. P. 43–55.
6. *Rajesh M.* Convergence of some energies for the Dirichlet problem in perforated domains. Rendiconti di Matematica. Ser. VII. V. 21. Roma (2001). P. 259–274.
7. *Strömqvist M.H.* Optimal Control of the obstacle Problem in a Perforated Domain. Appl. Math. Optim. 2012. V. 66. P. 239–255.

OPTIMAL CONTROL AND "STRANGE" TERM ARISING FROM HOMOGENIZATION OF THE POISSON EQUATION IN THE PERFORATED DOMAIN WITH THE ROBIN-TYPE BOUNDARY CONDITION IN THE CRITICAL CASE

A. V. Podolskiy[a] and T. A. Shaposhnikova[a]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

The present paper is devoted to the study of the asymptotic behavior of the optimal control for the boundary value problem in an ε-periodically perforated domain with linear Robin-type boundary condition, when the period of the structure tends to zero, and the problem parameters, diameter of perforations and adsorption coefficient, take critical values.

Keywords: perforated domain, critical case, "strange" term, optimal control, homogenization