ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 495, с. 17–21

МАТЕМАТИКА

УДК 519.21

ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ОДНОРОДНЫХ ФУНКЦИЙ ОТ ГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ

© 2020 г. В. И. Богачев[1,2,3,*], Е. Д. Косов[1,2,], С. Н. Попова[2,4]**

Представлено академиком РАН И. А. Ибрагимовым 17.08.2020 г.
Поступило 20.08.2020 г.
После доработки 08.10.2020 г.
Принято к публикации 09.10.2020 г.

Получены широкие достаточные условия ограниченности плотностей распределения однородных функций на пространствах с гауссовскими мерами. Приведены оценки плотностей распределения максимумов квадратичных форм.

Ключевые слова: гауссовская мера, однородная функция, плотность распределения

DOI: 10.31857/S2686954320060211

В сообщении даны ответы на вопросы, поставленные А.Н. Тихомировым (в письме первому автору) о распределениях максимумов квадратичных форм. Его вопросы привели к более общей задаче о распределениях однородных функций. Пусть даны вероятностная мера μ на линейном пространстве X и измеримая функция f на X, являющаяся положительно однородной порядка $\alpha > 0$, т.е. $f(tx) = t^{\alpha} f(x)$ для всех $x \in X$ и $t > 0$. Типичные примеры однородных функций – нормы, квадратичные формы и максимумы из нескольких квадратичных форм. Ограничена ли плотность распределения f относительно μ? Как оценить плотность распределения максимума из нескольких квадратичных форм? В общем случае даже для гауссовской меры μ и нормы f индуцированная мера $\mu \circ f^{-1}$ на прямой может не иметь плотность или ее плотность может быть неограниченной около нуля. Плотность распределения может быть неограниченной даже для нормы, эквивалентной стандартной норме l^2 (см. [1–3]). С другой стороны, в [2] и [3] можно найти достаточные условия на норму, при которых распределение плотности ограничено. Неотрицательная измеримая квадратичная форма на пространстве с гауссовской мерой μ обладает ограниченной плотностью распределения при условии, что ее ранг на пространстве Камерона–Мартина меры μ равен по крайней мере двум (см. [4–6]). Это аналогично случаю распределения χ^2 с k степенями свободы: для $k = 1$ плотность распределения ведет себя как $t^{-1/2}$ около нуля, но для $k > 1$ она ограничена. Распределения гладких однородных функций от строго устойчивых случайных векторов некоторого класса изучены в [7, 8].

Стандартная гауссовская мера γ_d на $\mathbb{R}^d$ имеет плотность

$$(2\pi)^{-d/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right),$$

где $|x|$ обозначает стандартную норму на $\mathbb{R}^d$. Для борелевской функции f индуцированная мера $\gamma_d \circ f^{-1}$ на прямой определяется равенством

$$\gamma_d \circ f^{-1}(B) = \gamma_d(f^{-1}(B))$$

для всех борелевских множеств B. Интеграл от ограниченной борелевской функции φ на прямой

[1] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия*
[2] *Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, Москва, Россия*
[3] *Православный Свято-Тихоновский гуманитарный университет, Долгопрудный, Московская обл., Россия*
[4] *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет) Долгопрудный, Московская обл., Россия*
**E-mail: vibogach@mail.ru*
***E-mail: ked_2006@mail.ru*

относительно меры $\gamma_d \circ f^{-1}$ вычисляется по формуле

$$\int \varphi(t)\gamma_d \circ f^{-1}(dt) = \int \varphi(f(x))\gamma_d(dx).$$

Если $\gamma_d \circ f^{-1}$ имеет плотность относительно меры Лебега, то эта плотность называется плотностью распределения f. Она может быть вычислена как производная функции распределения $F(t) = \gamma_d(x{:}\, f(x) < t)$. Мы приводим все результаты для стандартной гауссовской меры, но ясно, что они остаются в силе с другими константами для произвольных гауссовских мер.

Т е о р е м а 1. *Пусть f — борелевская функция на $\mathbb{R}^d$, положительно однородная порядка $\alpha \in (0, d]$, причем $f(u) \geq m > 0$ на единичной сфере. Тогда $\gamma_d \circ f^{-1}$ имеет ограниченную плотность распределения ϱ_f и*

$$\varrho_f \leq C(\alpha)m^{-1}d^{(1-\alpha)/2},$$

где $C(\alpha)$ зависит только от α.

В качестве f можно взять функцию вида

$$f(x) = \max(f_1(x), \ldots, f_p(x)),$$

где f_j — борелевские функции на $\mathbb{R}^d$, положительно однородные порядка α. Если $f_q(x) \geq m|x|^\alpha$ для некоторого $q \leq p$, то $\varrho_f \leq C(\alpha)m^{-1}d^{(1-\alpha)/2}$.

С л е д с т в и е 1. *Пусть $d > 1$ и*

$$f = \max(Q_1, \ldots, Q_p),$$

где Q_j — неотрицательно определенные квадратичные формы на $\mathbb{R}^d$, причем максимум из их минимальных собственных значений равен $m > 0$. Тогда плотность распределения ϱ_f функции f допускает оценку

$$\varrho_f \leq C(d)m^{-1},$$

где $C(d)$ зависит только от d и равняется максимуму плотности распределения χ_d^2. В частности, $\varrho_f \leq$ $\leq Cd^{-1/2}m^{-1}$ с некоторой абсолютной постоянной C.

Основная особенность этой оценки состоит в ее независимости от числа форм. Заметим, что если имеются случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_p$ с плотностями распределения, ограниченными числом M, то очевидным образом

$$P(t < \max_i \xi_i \leq t + h) \leq$$
$$\leq \sum_i P(t < \xi_i \leq t + h) \leq Mph, \quad h > 0.$$

Без дополнительных предположений множитель p из этой грубой оценки неизбежен. Например, если ξ_i независимы и равномерно распределены в $[0,1]$, то максимум плотности распределения их максимума равен p. Однако неясно, что можно сказать про плотность распределения максимума p квадратичных форм, для каждой из которых плотность не больше M (но нет информации о собственных числах).

Отметим еще, что так как берется максимум из минимальных собственных чисел, то на указанную оценку не влияет добавление форм с маленькими минимальными собственными значениями (хотя на само распределение это может повлиять). Конечно, условие $m > 0$ не является необходимым для ограниченности плотности, например, можно взять x_1^2 и x_2^2 на $\mathbb{R}^2$. Если еще взять третью форму $\varepsilon(x_1^2 + x_2^2)$ с малым $\varepsilon > 0$, то $m = \varepsilon$, но максимум не зависит от ε. В теореме 4 рассмотрен случай, когда все формы могут быть вырождены, но имеют невырожденные сужения на общее двумерное подпространство.

Приведем результаты о соболевской регулярности ϱ_f, доказываемые с помощью методов исчисления Маллявэна, см. [3–5, 9].

Для знакопеременной меры $\sigma = \sigma^+ - \sigma^-$ на измеримом пространстве Ω, разложенной в разность ее положительной и отрицательной частей, вариация равна

$$\|\sigma\| = \sigma^+(\Omega) + \sigma^-(\Omega).$$

Через $W^{1,k}(\mathbb{R})$ обозначим класс Соболева таких функций $u \in L^1(\mathbb{R})$ на прямой, что производная u порядка $k - 1$ абсолютно непрерывна и $u^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$. Соболевская норма на $W^{1,k}(\mathbb{R})$ задается формулой

$$\|u\|_{W^{1,k}} = \|u\|_{L^1} + \cdots + \|u^{(k)}\|_{L^1}.$$

Класс $BV(\mathbb{R})$ состоит из таких функций $u \in L^1(\mathbb{R})$ на прямой, что обобщенная производная u есть ограниченная мера Du, т.е.

$$\int \varphi'(t)u(t)dt = -\int \varphi(t)Du(dt)$$

для всех гладких функций φ с компактным носителем. Норма на $BV(\mathbb{R})$ задается формулой

$$\|u\|_{BV} = \|u\|_{L^1} + \|Du\|,$$

где $\|Du\|$ есть вариация меры Du. При этом функция u имеет версию ограниченной вариации, непрерывную слева, более того, для указанной версии $\tilde{u}$ ее вариация $\operatorname{Var}\tilde{u}$ равна $\|Du\|$ и $\sup_t |\tilde{u}(t)| \leq \|Du\|$.

Пространство $W^{1,1}(\mathbb{R})$ является замкнутым подпространством в BV. Класс $V^k(\mathbb{R})$ с $k > 1$ состоит из таких функций $u \in L^1(\mathbb{R})$, что $u', \ldots, u^{(k-1)}$ лежат в $L^1(\mathbb{R})$ и $u^{(k-1)} \in BV$. Он наделяется нормой

$$\|u\|_{L^1} + \cdots + \|u^{(k-1)}\|_{L^1} + \|Du^{(k-1)}\|.$$

Для функции $u \geq 0$ информация Фишера определяется равенством

$$\mathcal{I}(u) := \int \frac{|u'(t)|^2}{u(t)}\, dt,$$

если u абсолютно непрерывна и этот интеграл конечен, где по определению полагаем $\dfrac{|u'(t)|^2}{u(t)} = 0$ на множестве нулей u. Информация Фишера существует, если и только если есть такое число C, что

$$\int \varphi'(t) u(t) dt \leq C\left(\int \varphi(t)^2 u(t) dt\right)^{1/2} \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Квадрат минимального возможного C есть информация Фишера функции u.

Пусть f – борелевская функция на $\mathbb{R}^d$, положительно однородная порядка α.

Пусть $p_{\alpha,d}$ – плотность распределения $|x|^\alpha$ на $(\mathbb{R}^d, \gamma_d)$. Мы имеем

$$p_{\alpha,d}(t) = C(d,\alpha) t^{d/\alpha - 1} e^{-\frac{t^{2/\alpha}}{2}} I_{[0,+\infty)}(t),$$

где $C(d,\alpha)$ – число, зависящее от d и α. Легко видеть, что

$$p_{\alpha,d} \in W^{1,k}(\mathbb{R}) \quad \text{при} \quad k < d/\alpha$$
$$\text{и} \quad p_{\alpha,d} \in V^k(\mathbb{R}) \quad \text{при} \quad k = d/\alpha.$$

Теорема 2. *Если $f \neq 0$ п.в., то мера $\gamma_d \circ f^{-1}$ имеет такую плотность ϱ_f, что*

$$\varrho_f(t) \leq \frac{C_1(d,\alpha)}{|t|},$$

где $C_1(d,\alpha) = \max_t (t p_{\alpha,d}(t))$. Если

$$\int_{S^{d-1}} \frac{d\theta}{|f(\theta)|^k} < \infty,$$

то при $\alpha < d/k$ плотность ϱ_f принадлежит $W^{1,k}(\mathbb{R})$ и

$$\|\varrho_f^{(k)}\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{|S^{d-1}|} \int_{S^{d-1}} \frac{d\theta}{|f(\theta)|^k} \|p_{\alpha,d}\|_{W^{1,k}}.$$

Если $\alpha = d/k$, то $\varrho_f \in V^k(\mathbb{R})$ и

$$\|D\varrho_f^{(k-1)}\| \leq \frac{1}{|S^{d-1}|} \int_{S^{d-1}} \frac{d\theta}{|f(\theta)|^k} \|p_{\alpha,d}\|_{V^k}.$$

Информация Фишера для ϱ_f допускает оценку

$$\int \frac{|\varrho_f'(t)|^2}{\varrho_f(t)} dt \leq \alpha^{-2} \int f(x)^{-2} \left| |x|^2 + d - \alpha \right|^2 \gamma_d(dx).$$

Правая часть конечна, если $\alpha < d/2$ и функция $\dfrac{1}{|f(\theta)|^2}$ интегрируема на единичной сфере.

Если $m = \inf\{|f(\theta)| : |\theta| = 1\} > 0$ и $\alpha < d$, то

$$\|D\varrho_f\| \leq c(d,\alpha) m^{-1},$$

где $c(d,\alpha) = 2^{(1-\alpha)/2} \dfrac{\Gamma((d-\alpha)/2)}{\Gamma(d/2)} \sqrt{d-\alpha}$. Если выполнено более сильное условие $\alpha < d/2$, то

$$\mathcal{I}(\varrho_f) \leq C(d,\alpha) m^{-2}.$$

В частности, если $\alpha = 2$ и $d > 4$, то

$$\mathcal{I}(\varrho_f) \leq (d+1) m^{-2}.$$

Приведем оценки для случая сильно вырожденных квадратичных форм.

Теорема 3. *Пусть $f = \max\{f_1, \ldots, f_p\}$, где $f_j(x) := \langle K_j x, x\rangle$ на $\mathbb{R}^d$* с *симметричными операторами K_j (не обязательно неотрицательными). Предположим, что имеется такое подпространство L с* $\dim L = 3$, *что*

$$\langle K_j x, x\rangle \geq |x|^2 \quad \text{для всех } x \in L, \quad j \in \{1, \ldots, p\}.$$

Тогда $\|\varrho_f\|_\infty \leq \|D\varrho_f\| \leq 4$.

Теорема 4. *Пусть $f = \max\{f_1, \ldots, f_p\}$, где $f_j(x) := \langle K_j x, x\rangle$ на $\mathbb{R}^d$ с неотрицательными симметричными операторами K_j. Предположим, что имеется такое подпространство L с* $\dim L = 2$, *что при некотором $m > 0$ выполнены оценки $\langle K_j x, x\rangle \geq \frac{m}{2}|x|^2$ для всех $x \in L$ и $j \in \{1, \ldots, p\}$. Тогда $\|\varrho_f\|_\infty \leq 1/m$.*

Рассмотрим бесконечномерный случай, который с помощью условных мер легко выводится из полученных выше конечномерных оценок из-за отсутствия зависимости от размерности. Напомним (см. [4, 10]), что центрированная радоновская гауссовская мера γ на локально выпуклом пространстве X есть такая внутренне компактно регулярная борелевская вероятностная мера, что всякий непрерывный линейный функционал f на X является центрированной гауссовской случайной величиной относительно γ. Пространство

Камерона–Мартина H такой меры есть подпространство всех векторов с конечной нормой

$$|h|_H = \sup\{f(h)\colon f \in X^*, \|f\|_{L^2(\gamma)} \le 1\}.$$

Известно, что H с этой нормой – сепарабельное гильбертово пространство. Для счетной степени стандартной одномерной гауссовской меры пространство Камерона–Мартина есть обычное пространство l^2.

Будем называть γ-измеримой квадратичной формой квадратичную форму в обычном алгебраическом смысле, измеримую относительно γ. Известно, что такая форма совпадает почти всюду с пределом последовательности конечномерных квадратичных форм вида

$$\sum_{i=1}^{n} c_{n,i} f_{n,i}(x)^2 \quad \text{с} \quad f_{n,i} \in X^*.$$

Т е о р е м а 5. *Пусть γ – центрированная радоновская гауссовская мера на локально выпуклом пространстве X и*

$$Q = \max(Q_1, \ldots, Q_p),$$

где $Q_1, \ldots, Q_p$ – такие γ-измеримые квадратичные формы на X, что имеется трехмерное подпространство L пространства Камерона–Мартина H меры γ с $Q_j(h) \ge \dfrac{m|h|_H^2}{2}$ при всех $h \in L$. Тогда $\gamma \circ Q^{-1}$ имеет плотность ϱ_Q ограниченной вариации с

$$\|\varrho_Q\|_\infty \le \|D\varrho_Q\| \le 4m^{-1}.$$

Полученные выше оценки могут быть полезны при исследовании различных задач, связанных с асимптотическими свойствами квадратичных форм, см. [11–13]. Недавние обзоры о распределениях многочленов можно найти в [14, 15]. Доказательства приведенных результатов будут опубликованы в подробной статье, где рассмотрены также негауссовские меры и выпуклые функции.

БЛАГОДАРНОСТИ

Благодарим А. Н. Тихомирова за полезные обсуждения. Второй автор является лауреатом конкурса “Молодая математика России” и благодарит ее жюри и спонсоров.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа поддержана Российским научным фондом (проект 17–11–01058), выполняемый при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rhee Wan Soo.* On the distribution of the norm for a Gaussian measure// Ann. Inst. H. Poincaré. Probab. et Statist. 1984. V. 20. № 3. P. 277–286.
2. *Rhee Wan Soo, Talagrand M.* Uniform convexity and the distribution of the norm for a Gaussian measure// Probab. Theory Relat. Fields. 1986. V. 71. № 1. P. 59–68.
3. *Davydov Yu.A., Lifshits M.A., Smorodina N.V.* Local properties of distributions of stochastic functionals. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1998.
4. *Богачев В.И.* Гауссовские меры. М., Наука, 1997.
5. *Bogachev V.I.* Differentiable measures and the Malliavin calculus. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2010.
6. *Богачев В.И., Смолянов О.Г.* Аналитические свойства бесконечномерных распределений // Успехи матем. наук. 1990. Т. 45. № 3. С. 3–83.
7. *Смородина Н.В.* Асимпотическое разложение распределения однородного функционала от строго устойчивого вектора // Теория вероятн. и ее примен. 1996. Т. 41. № 1. С. 133–163.
8. *Смородина Н.В.* Асимпотическое разложение распределения однородного функционала от строго устойчивого вектора. II // Теория вероятн. и ее примен. 1999. Т. 44. № 2. С. 458–465.
9. *Nualart D.* The Malliavin calculus and related topics. B.; N.Y.: Springer-Verlag, 1995.
10. *Lifshits M.A.* Gaussian random functions. Dordrecht: Kluwer, 1995.
11. *Götze F., Tikhomirov A.N.* Asymptotic distribution of quadratic forms // Ann. Probab. 1999. V. 27. № 2. P. 1072–1098.
12. *Götze F., Tikhomirov A.* Asymptotic distribution of quadratic forms and applications // J. Theor. Probab. 2002. V. 15. № 2. P. 423–475.
13. *Götze F., Zaitsev A.Yu.* Explicit rates of approximation in the CLT for quadratic forms // Ann. Probab. 2014. V. 42. № 1. P. 354–397.
14. *Богачев В.И.* Распределения многочленов на многомерных и бесконечномерных пространствах с мерами // Успехи матем. наук. 2016. Т. 71. № 4. С. 107–154.
15. *Bogachev V.I., Kosov E.D., Zelenov G.I.* Fractional smoothness of distributions of polynomials and a fractional analog of the Hardy–Landau–Littlewood inequality // Trans. Amer. Math. Soc. 2018. V. 370. № 6. P. 4401–4432.

DENSITIES OF DISTRIBUTIONS OF HOMOGENEOUS FUNCTIONS OF GAUSSIAN RANDOM VECTORS

V. I. Bogachev[a,b,c], **E. D. Kosov**[a,b], **and S. N. Popova**[b,d]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*
[b] *National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russian Federation*
[c] *St.-Tikhon's Orthodox University, Moscow, Russian Federation*
[d] *Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Moscow Region, Russian Federation*

Presented by Academician RAN I.A. Ibragimov

We obtain broad sufficient conditions for the boundedness of distribution densities of homogeneous functions on spaces with Gaussian measures. Estimates for the distribution densities of maxima of quadratic forms are obtained.

Keywords: Gaussian measure, homogeneous function, distribution density