ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 495, с. 107–111

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.9

ЗАДАЧА УКЛОНЕНИЯ ТРАЕКТОРИЙ ОТ РАЗРЕЖЕННОГО ТЕРМИНАЛЬНОГО МНОЖЕСТВА

© 2020 г. Л. П. Югай[1,*]

Представлено академиком РАН Ф.Л. Черноусько 15.10.2020 г.
Поступило 20.10.2020 г.
После доработки 20.10.2020 г.
Принято к публикации 23.10.2020 г.

Для нелинейных конфликтно управляемых процессов рассматривается задача уклонения (убегания) в постановке Л.С. Понтрягина и Е.Ф. Мищенко. Терминальное множество имеет дискретную структуру. В отличие от известных работ, оно состоит из счетного множества точек, расстояния между которыми не ограничены снизу некоторой положительной константой. Получены новые достаточные условия и метод уклонения, позволяющие решить ряд задач уклонения траекторий колебательных систем, в том числе задачу о раскачке обобщенного математического маятника.

Ключевые слова: уклонение, убегание, преследователь, уклоняющийся игрок, управление, дискретное, разреженное, терминальное множество, маятник

DOI: 10.31857/S268695432006020X

А. Пусть конфликтно управляемый процесс (дифференциальная игра) описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{z} = f(z,u,v), \tag{1}$$

где $z \in R^n$, $u \in P \subset R^p$, $v \in Q \subset R^q$, P и Q – непустые компактные множества, содержащие начала $0_p \in R^p$ и $0_q \in R^q$ соответственно, функция $f(z,u,v)$ непрерывна по совокупности переменных на множестве $X = R^n \times P \times Q$ и удовлетворяет при всех $(z,u,v) \in X$ неравенству

$$\langle z, f(z,u,v)\rangle \le C(1+|z|^2),$$

где $C \ge 0$ – постоянная. Терминальное множество является дискретным и имеет вид

$$M = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{m_i\}, \quad m_i \ne m_j, \quad \text{для} \quad i \ne j, \quad m_i \in R^n. \tag{2}$$

Параметры u и v в (1) выбираются противоборствующими сторонами (игроками) в виде измеримых функций $u = u(t) \in P$, $v = v(t) \in Q$, $t \ge 0$. Игрок, выбирающий $v = v(t) \in Q$ (уклоняющийся или убегающий игрок), ставит своей задачей при любом допустимом поведении $u(t) \in P$ уклонить соответствующую траекторию $z(t)$ уравнения (1), начинающуюся из любой точки $z_0 \in R^n \setminus M$ $(z_0 = z(0))$ от M при всех $t \ge 0$. Такую задачу называют глобальной задачей уклонения (убегания), впервые она была сформулирована в [1]. Предполагается, что в каждый момент времени $t \ge 0$ уклоняющийся игрок, формируя значение управления $v(t) \in Q$, может использовать значения $u(s) \in P$ и $z(s)$ при $s \le t$.

Б. Обозначим: $B(0_n, r)$ – замкнутый шар радиуса $r \ge 0$ с центром в начале $0_n \in R^n$, $n \in N = 1, 2, 3, \ldots$, $S = \partial(B(0_n,1))$ – граница $B(0_n,1)$ (единичная сфера), $\mathrm{co}\{A\}$ – выпуклая оболочка множества A, $\langle\, ,\rangle$ – знак скалярного произведения, $\mathrm{Int}_{R^n}A$ – внутренность множества A относительно R^n, $|a|^2 = \langle a, a\rangle$, $a \in R^n$.

Л е м м а 1. *Пусть в задаче уклонения* (1) *с терминальным множеством* (2) $z_0 \in R^n \setminus M$, $m_i \in M$, *и* $z(t)$ *– некоторое допустимое решение* (1) *с начальным условием* $z(0) = z_0$. *Тогда*:

1) $z(t)$ *будет определенным и неограниченно продолжаемым при* $t \ge 0$;

[1] *Алмалыкский филиал Национального исследовательского технологического университета "МИСиС", Алмалык, Узбекистан*
**E-mail: yugailp@mail.ru*

2) *для всех* $t \in [0, 1]$ *выполняется неравенство*

$$\max\{|z(t)|; |z(t)-m_i|; |z(t)-z_0|\} \le \rho(t);$$

3) $z(t)$ *будет единственным на отрезке* $I = [0,1]$, *и не будет покидать при всех* $t \in I$ *шар* $B(0_n, \rho(1))$, *где* $\rho(t) = 2(1+|z_0 - m_i| + |m_i|)e^{Ct}$.

Пусть для $m_j \in M$, $j \in N$:

$$g(m_j,u,v) = f(m_j,u,v) - f(m_j,0_p,0_q),$$

$$A_{1j} = \mathrm{co}\{\psi \in S\colon \max_{v\in Q}\min_{u\in P}\langle\psi, g(m_j,u,v)\rangle > 0\},$$

$$A_{2j} = \mathrm{co}\{\psi \in S\colon \min_{u\in P}\max_{v\in Q}\langle\psi, g(m_j,u,v)\rangle > 0\}.$$

Определение 1. Множество векторов $\{\psi_j \in R^n, j = 1, 2, \ldots, n+1\}$ назовем набором Каратеодори (или K-набором), если эти векторы аффинно независимые и их некоторая выпуклая комбинация равна 0_n. Множество всех K-наборов, составленных из векторов A_{li}, обозначим через K_{li}, $l = 1, 2$.

Определение 2. Пусть

$$N_{1i} = \sup_{K_\alpha\in K_{1i}}\min_{1\le k\le n+1}\max_{v\in Q}\min_{u\in P}\langle\psi_k^\alpha, g(m_j,u,v)\rangle,$$

$$N_{2i} = \sup_{K_\beta\in K_{2i}}\min_{1\le k\le n+1}\min_{u\in P}\max_{v\in Q}\langle\psi_k^\beta, g(m_j,u,v)\rangle,$$

где $K_\alpha = \{\psi_k^\alpha, k = 1,2,\ldots,n+1\} \in K_{1i}$, $K_\beta = \{\psi_k^\beta, k = 1,2,\ldots,n+1\} \in K_{2i}$.

Лемма 2. *Если* $0_n \in \mathrm{co}A_{li}$, $i \in N$, *то* $K_{li} \ne \emptyset$ *и* $N_{li} > 0$.

B. Сформулируем предположения и теорему о локальном уклонении.

Предположение 1. Для любого компактного множества $K \subset X$ существует константа $L = L(K) > 0$, такая, что для всех $(z_1,u,v) \in K$ и $(z_2,u,v) \in K$ выполняется неравенство

$$|f(z_2,u,v) - f(z_1,u,v)| \le L(K)|z_2 - z_1|.$$

Предположение 2 (о разреженности M). Существует число $r_0 > 0$, такое, что для каждого $r \ge r_0$ множество $M \cap B(0_n, r) \ne \emptyset$ не пустое и состоит из конечного числа точек.

Предположение 3. $n = \dim R^n \ge 2$, $0_n \in A_1 \cup A_2$, где

$$A_1 = \bigcap_{j\in N} A_{1j}, \quad A_2 = \bigcap_{j\in N} A_{2j}.$$

Теорема 1 (о локальном уклонении). *Пусть в задаче уклонения* (1) *с разреженным терминальным множеством* (2) *выполняются предположения* 1–3, $m_i \in M$ – *фиксированная точка. Тогда существуют константы* r_i, δ_i, ε_i, θ_i, σ_i *и допустимое управление* $v_c(t) \in Q$, *такие, что для любой начальной позиции* $z_0 \notin M$ *с условием* $|z_0 - m_i| \le \delta_i$ *траектория* $z(t)$ *уравнения* (1), $z(0) = z_0$, *соответствующая некоторому допустимому управлению* $u(t) \in P$ *и управлению* $v_c(t) \in Q$, *при всех* $t \in [0;\theta_i]$ *удовлетворяет неравенствам*:

1) $z(t) \in B(0_n, r_i)$;

2) $\dfrac{\varepsilon_i}{2} \ge |z(t) - m_i| \ge \dfrac{1}{3}N_{2i}t > 0$;

3) $|z(\theta_i) - m_i| > \sigma_i$,

которые, в совокупности, обеспечивают локальное уклонение траектории $z(t)$ *от терминального множества* M *на отрезке* $[0;\theta_i]$.

Основу доказательства теоремы 1 составляет алгоритм построения управления $v_c(t) \in Q$, обеспечивающего локальное уклонение траектории $z(t)$ от точки $m_i \in M$ и от всего M. Ключевую роль здесь играет выполнение условий предположения 3, которые характеризуют преимущество (по ресурсам и информации) уклоняющегося игрока над преследователем. Управление локального уклонения $v_c(t)$ строится следующим образом:

$$v_c(t) = \begin{cases} v_1(t) \in Q, & \text{если} \quad 0_n \in A_1, \\ v_2(t) \in Q, & \text{если} \quad 0_n \in A_2, \end{cases} \tag{3}$$

где управления $v_1(t)$ и $v_2(t)$ строятся на основе типа преимущества уклоняющегося игрока. В первом случае, когда $0_n \in A_1$ (тогда $K_{1i} \ne \emptyset$ и $N_{1i} > 0$), доказывается, что найдется K-набор $K_i^1 = \{\psi_{ij}^1, j = 1, 2, \ldots, n+1\} \in K_{1i}$ и в нем вектор $\psi_{ik}^1 \in K_i^1$, для которого выполнено неравенство

$$\langle\psi_{ik}^1, z_0 - m_i + tf(m_i, 0_p, 0_q)\rangle \ge 0. \tag{4}$$

Далее, для $\psi_{ik}^1 = \psi_{ik}^1(z_0, m_i)$ (см. (4)) рассматривается уравнение относительно неизвестного $v \in Q$:

$$\max_{v\in Q}\min_{u\in P}\left\langle\psi_{ik}^1, g(m_i,u,v)\right\rangle = \\ = \min_{u\in P}\left\langle\psi_{ik}^1, g(m_i,u,v)\right\rangle, \tag{5}$$

для которого показано, что существует решение $v(z_0, m_i) \in Q$, и если положить $v_c(t) = v_1(t) = v(z_0, m_i)$, $t \in [0;\theta_i]$, то выполняется:

$$\max_{v\in Q}\min_{u\in P}\left\langle\psi_{ik}^1, g(m_i,u,v)\right\rangle \ge \frac{2}{3}N_{1i} > 0. \tag{6}$$

Неравенства (4) и (6) являются основой получения при всех $t \in (0, \theta_i]$ следующей оценки:

$$\left|z(t) - m_i\right| \geq \left\langle \psi^1_{ik}, z(t) - m_i \right\rangle \geq \frac{1}{3} N_{1i} t > 0, \qquad (7)$$

которая обеспечивает уклонение траектории $z(t)$ сначала от точки $m_i \in M$, а потом и от всего M при $t \in [0, \theta_i]$. Заметим, что в случае $0_n \in A_1$ условие $N_{1i} > 0$ имеет смысл максиминного преимущества уклоняющегося игрока над преследователем и при построении управления локального уклонения $v_1(t) = v(z_0, m_i)$ использовалась информация только z_0 и m_i.

Пусть теперь $0_n \in A_2$, тогда $K_{2i} \neq \emptyset$ и $N_{2i} > 0$, в этом случае говорят, что уклоняющийся игрок имеет минимаксное преимущество. Рассуждая аналогично, приходим к существованию K-набора $K^2_i = \{\psi^2_{ij}, j = 1, 2, \ldots, n+1\} \in K_{2i}$ и вектора $\psi^2_{ik} \in K^2_i$, таких, что выполняются неравенства, аналогичные (4) и (6):

$$\left\langle \psi^2_{ik}, z_0 - m_i + tf(m_i, 0_p, 0_q) \right\rangle \geq 0, \qquad (8)$$

$$\min_{u \in P} \max_{v \in Q} \left\langle \psi^2_{ik}, g(m_i, u, v) \right\rangle \geq \frac{2}{3} N_{1i} > 0. \qquad (9)$$

Если преследователь применяет допустимое управление $u(t) \in P$, $t \in [0; \theta_i]$, то из (9) следует неравенство

$$\max_{v \in Q} \left\langle \psi^2_{ik}, g(m_i, u(t), v) \right\rangle \geq \frac{2}{3} N_{1i} > 0. \qquad (10)$$

Для построения управления уклонения нужно рассмотреть уравнение относительно неизвестного $v \in Q$:

$$\max_{v \in Q} \left\langle \psi^2_{ik}, g(m_i, u(t), v) \right\rangle = \left\langle \psi^2_{ik}, g(m_i, u(t), v) \right\rangle. \qquad (11)$$

Для каждого t решений уравнения (11) может быть несколько, и тогда возникает задача выбора допустимой однозначной измеримой ветви $v_2(t) = v(z_0, m_i, u(t)) \in Q$. Существование и способ построения измеримого управления $v_2(t) \in Q$, являющегося решением (11), обеспечивается аналогом известной леммы Филиппова для дифференциальных игр [7]. По этой лемме найдется измеримое управление $v_2(t) = v_2(z_0, m_i, u(t)) \in Q$, являющееся решением (11), и для которого, очевидно, выполняются неравенства (8) и (10). Если уклоняющийся игрок будет применять построенное управление $v_2(t) \in Q$, то доказывается, что можно добиться выполнения неравенств

$$\left|z(t) - m_i\right| \geq \langle \psi^2_{ik}, z(t) - m_i \rangle \geq \frac{1}{3} N_{2i} t > 0,$$

которые указывают на непопадание траектории $z(t)$ на M при $t \in [0; \theta_i]$. В случае минимаксного преимущества уклоняющегося игрока для построения управления уклонения $v_c(t) = v_2(t) \in Q$ требуется знание управления $u(t) \in P$ в тот же момент, построение же управления $v_c(t) = v_1(t) \in Q$ требует знания только позиции и точки терминального множества. Поэтому каждый тип преимущества требует для построения управления уклонения различной информации о поведении преследователя. Если уравнение (1) линейное, то оба типа преимуществ совпадают (минимакс совпадает с максимином). В нелинейном случае условия преимущества могут быть различными.

Ниже управление $v_c(t) \in Q$ будем называть специальным управлением уклонения от точки $m_i \in M$ при $t \in [0; \theta_i]$, а процесс и результат применения $v_c(t) \in Q$ будем называть маневром обхода точки $m_i \in M$.

Т е о р е м а 2 (о глобальном уклонении). *Пусть в задаче уклонения* (1) *с разреженным терминальным множеством* (2) *выполняются предположения* 1–3. *Тогда из любой начальной позиции* $z_0 \notin M$ *возможно уклонение траектории* $z(t)$, $z(0) = z_0$, *уравнения* (1) *от* M *при всех* $t \geq 0$.

Опишем кратко процесс уклонения, который происходит индуктивно и организован на основе теоремы 1 (о локальном уклонении) следующим образом. На первом шаге строится шар $B(0_n, r_1)$, для которого эффективно вычисляется $r_1 > 0$ (лемма 1), такое, чтобы в шар входили z_0 и некоторые точки из M, образующие конечное множество $M_1 \subset M$ (предположение 2). Пусть $L_1 = L_1(K_1)$ – константа Липшица для компакта $K_1 = B(0_n, r_1) \times P \times Q$. Затем из $B(0_n, r_1)$ удаляются все точки M_1, лежащие достаточно близко к его границе $\partial(B(0_n, 1))$ вместе со своими окрестностями (радиусы окрестностей вычисляются, и все они меньше единицы). В результате получается компактное множество $B_1 \subset B(0_n, r_1)$. Доказывается, что траектория $z(t)$, начинающаяся из любой точки $z_0 \notin M_1$ и расположенная внутри B_1, либо не попадает на M при всех $t \geq 0$ (совершая в B_1 конечное или бесконечное число маневров обхода), либо в какой-то конечный момент $t_1 > 0$ выходит на границу $S = \partial(B_1)$. При этом, до момента выхода на границу убегающий игрок строит свое управление уклонения на основе специальных управлений маневров обхода точек из M_1 (теорема 1) либо свободного управления $v(t) = 0_q$. Момент выхода на границу означает завершение первого цикла и начало второго, на котором последовательно определяются $B(0_n, r_2), K_2 = B(0_n, r_2) \times P \times Q$, $L_2 = L_2(K_2)$,

M_2 и строится множество $B_2 \subset B(0_n, r_2)$, для которого рассматриваются все возможные ситуации поведения $z(t)$ при $t > t_1$, аналогичные рассмотренным для B_1. При этом полагают $t_1 = 0$, $z(t_1) = z_0$, и $r_2 > r_1 + 2$. Продолжая процесс уклонения траектории от терминального множества, получаем последовательность компактов

$$B_1 \subset B_2 \subset \ldots B_k \subset B_{k+1} \ldots,$$

лежащих в шарах радиусов $r_1 < r_2 < \ldots < r_k < \ldots$, где $r_{k+1} \geq r_k + 2$. Очевидно, что $r_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Доказывается, что случаи выхода траектории на границу B_k в моменты $t_k > 0$ на каждом k-цикле возможны только при $t_1 + t_2 + \ldots + t_k = T_k \to \infty$, так что $z(t)$ не попадает на M при всех $t \geq 0$. Поэтому во всех рассмотренных случаях траектория $z(t)$, начинающаяся из точки $z_0 \notin M$, не попадет на M при всех $t \geq 0$, т.е. из $z_0 \notin M$ возможно уклонение траектории от M.

Г. Пример (Задача о раскачке обобщенного математического маятника).

Пусть уравнения движения конфликтно управляемой системы имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= z_2, \\ \frac{dz_2}{dt} &= -a\sin(\gamma_0 + \gamma_1 z_1^{\delta_1} + \gamma_2 z_1^{\delta_2}) + u + v, \end{aligned} \tag{12}$$

где $z = (z_1, z_2) \in R_2$; $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2$ — действительные числа, $a > 0$, $|u| \leq \alpha$, $|v| \leq \beta$; $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$. Будем называть (12) уравнениями движения обобщенного математического маятника. В случае $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = \delta_1 = 1$, $\gamma_2 = 0$, (12) описывает конфликтно управляемое движение плоского математического маятника [2–5]. Рассмотрим случай $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = \delta_1 = 1$, $\delta_2 = 2$, $\gamma_2 = \mu > 0$. Тогда получим уравнения

$$\frac{dz_1}{dt} = z_2, \quad \frac{dz_2}{dt} = -a\sin(z_1 + \mu z_1^2) + u + v. \tag{13}$$

Терминальное множество M будет состоять из нижних положений равновесия (13), имеющих вид $m_k = (z_1^k; 0)$, где z_1^k – корни уравнения $z_1 + \mu z_1^2 = 2\pi k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Таким образом, $M = \{m_k = (z_1^k; 0), k = 0, 1, 2, \ldots\}$.

Задача раскачки [2] для обобщенного математического маятника (13) заключается в построении уклоняющимся игроком управления, обеспечивающего уклонение траектории (13) от M при всех $t \geq 0$. Для решения этой задачи установим выполнимость предположений 1–3 из теоремы 2. Прямые вычисления показывают, что

$$\frac{d_2}{\sqrt{k}} \geq |z_1^{(k+1)} - z_1^k| \geq \frac{d_1}{\sqrt{k+1}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{14}$$

где $d_1 > 0$ и $d_2 > 0$ — константы. Нетрудно выяснить, что можно положить $C = 1 + a + \alpha + \beta$, а предположение 1 выполнено, если за константу Липшица для шара $B(0_2, r)$ выбрать число $L(r) = 1 + a + 2\mu ar$. Заметим, что для (13) условие Липшица с равномерной константой не выполняется. Предположение 2 для (13) следует из оценки (14), которая показывает, что расстояния между последовательными точками терминального множества стремятся к нулю, поэтому не ограничены снизу равномерно некоторой положительной константой. Предположение 3 выполняется при $\beta > \alpha$ [3].

Таким образом, для рассматриваемого примера выполняются все условия предположений 1–3, поэтому по теореме 2 разрешима глобальная задача о раскачке обобщенного математического маятника (13).

З а м е ч а н и е 1. Выбор аргумента синуса в (13) связан с возможными неточностями измерения аргумента, либо с неопределенностью в точном определении его значений [6].

З а м е ч а н и е 2. Для примера (13) не выполняются условия работ [2, 3, 8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Понтрягин Л.С., Мищенко Е.Ф.* Задача убегания одного управляемого объекта от другого // ДАН СССР. 1969. Т. 189. № 4. С. 721–723.

2. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 496 с.

3. *Мищенко Е.Ф., Никольский М.С., Сатимов Н.* // Задача уклонения от встречи в дифференциальных играх многих лиц // Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. 1977. Вып. 143. С. 105–128.

4. *Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 484 с.

5. *Пилипенко Ю.В., Чикрий А.А.* Колебательные конфликтно управляемые процессы // Прикл. матем. и механика. 1993. Т. 57. Вып. 3. С. 3–14.

6. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.

7. *Мищенко Е.Ф., Сатимов Н.Ю.* Задача об уклонении от встречи в дифференциальных играх с нелинейными управлениями // Дифф. уравнения. 1973. Т. 9. № 10. С. 1792–1797.

8. *Югай Л.П.* К задаче о раскачке маятника // Матер. 13-й межд. конф. “Устойчивость и колебания нелинейных систем управления” (конференция Пятницкого). Москва, 1–3 июня, 2016. С. 429–432.

THE PROBLEM OF TRAJECTORIES AVOIDING FROM RAREFIED TERMINAL SET

L. P. Yugay[a]

[a] *Branch of the National University of Science and Technology "MISIS", Almalyk, Uzbekistan*

Presented by Academician of the RAS F.L. Chernousko

The problem of avoiding (evasion) in conflict-controlled processes in L.S. Pontrjagin and E.F. Mischenko statement is considered. Terminal set has a special discrete (rarefied) structure. Different from other works, it consists of countable number of points with distances not limited from below with a fixed positive constant. New sufficient conditions and an evasion method are obtained which make it possible to solve a number of avoiding trajectory problems of oscillatory systems, including the swinging problem of generalized mathematical pendulum.

Keywords: avoiding, evasion, pursuer, evader, control, discrete, rare, terminal set, pendulum