ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 495, с. 34–37

МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ И КОНСТАНТАХ ФАВАРА

© 2020 г. Ю. С. Волков[1,*]

Представлено академиком РАН В.И. Бердышевым 01.06.2020 г.
Поступило 01.06.2020 г.
После доработки 01.10.2020 г.
Принято к публикации 05.10.2020 г.

В задаче экстремальной функциональной интерполяции, впервые рассмотренной Ю.Н. Субботиным, вычислен явный вид констант экстремальной интерполяции через константы Фавара в пространствах L_p, $p = 1, 3/2, 2$. Найдены простые эффективные рекуррентные формулы для вычисления констант Фавара, также приведены формулы вычисления этих констант через числа Эйлера.

Ключевые слова: интерполяция, константы Фавара, рекуррентные формулы, числа Эйлера, многочлены Эйлера

DOI: 10.31857/S2686954320060193

В работе [1] авторы приводят обзор результатов по исследованию задач экстремальной функциональной интерполяции. Одна из задач состоит в следующем.

Пусть $Y_{n,p} = \{\mathbf{y}\colon \mathbf{y} = \{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}, \|\Delta^n\mathbf{y}\|_{l_p} \le 1\}$ — класс интерполируемых последовательностей $\mathbf{y} = \{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\Delta^n y_k\right|^p \le 1, \quad 1 \le p < \infty;$$
$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} \left|\Delta^n y_k\right| \le 1, \quad p = \infty,$$

$\Delta^n\mathbf{y}$ — последовательность, членами которой являются значения оператора обычной конечной разности порядка n на последовательности $\mathbf{y}$, т.е. значения

$$\Delta^n y_k = \sum_{m=0}^{n} (-1)^{n-m} \binom{n}{m} y_{k+m}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

AC – множество всех локально абсолютно непрерывных функций. Класс функций, интерполирующих последовательность $\mathbf{y}$ в целочисленных точках числовой прямой, обозначим

$$\Phi_{n,p}(\mathbf{y}) = \{f\colon f^{(n-1)} \in AC,$$
$$f^{(n)} \in L_p(\mathbb{R}),\ f(k) = y_k\ \forall k \in \mathbb{Z}\}$$

Задача экстремальной функциональной интерполяции состоит в нахождении константы экстремальной функциональной интерполяции

$$A_{n,p} = \sup_{\mathbf{y}\in Y_{n,p}} \inf_{f\in\Phi_{n,p}(\mathbf{y})} \left\|f^{(n)}\right\|_{L_p}. \tag{1}$$

В 1965 г. эта задача была решена Ю.Н. Субботиным [2] для $p = \infty$, точное значение было представлено в виде

$$A_{n,\infty} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1} \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu(n+1)}}{(2\nu+1)^{n+1}}\right]^{-1}.$$

Это значение можно записать в терминах констант Фавара [3], а именно

$$A_{n,\infty} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n \mathcal{K}_n^{-1}. \tag{2}$$

Экстремальной функцией, реализующей нижнюю грань в (1), был идеальный сплайн Эйлера (см. [3]).

В 1967 г. также Ю.Н. Субботин [4] получил решение для оставшихся случаев $1 \le p < \infty$. Однако константа $A_{n,p}$ была выражена через норму некоторого многочлена, а именно

$$A_{n,p} = (n-1)!\left\|Q_{n-1}\right\|_{L_q[0,1]}^{-1}, \tag{3}$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, а многочлен $Q_{n-1}(x)$ выражен через многочлены Бернулли

[1] *Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия*
*E-mail: volkov@math.nsc.ru

$$Q_{n-1}(x) = \frac{2^{2n-1}}{n}\left[(-1)^n B_n\left(\frac{1-x}{4}\right) - B_n\left(\frac{1+x}{4}\right)\right].$$

Отметим, что при $p = \infty$ в [4] нужная константа вычислялась через L_1-норму этого же многочлена $Q_{n-1}(x)$, поэтому можно говорить, что при всех $1 \le p \le \infty$ для вычисления константы $A_{n,p}$ справедлива формула (3).

В обзоре [1] говорится, что вместо вычисления нормы многочлена $Q_{n-1}(x)$ при $p < \infty$ найдена только асимптотика констант $A_{n,p}$ при $n \to \infty$.

На самом деле для некоторых значений p норму многочлена $Q_{n-1}(x)$ можно вычислить. Мы показываем, что норма многочлена выражается через числа Эйлера при любых целых q и приведем выражения констант $A_{n,p}$ через константы Фавара при $p = 1, 3/2, 2$ (соответственно $q = \infty, 3, 2$). Кроме того, мы приводим простые рекуррентные формулы для вычисления констант Фавара, а также формулы через числа Эйлера.

1. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОНСТАНТ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Заметим, что многочлен $Q_{n-1}(x)$ выражается через многочлен Эйлера. Действительно, воспользуемся последовательно свойствами многочленов Бернулли и Эйлера [5, 24.4.3] и [5, 24.4.23] (см. также [6, 1.12, 1.14]), тогда

$$Q_{n-1}(x) = \frac{2^{2n-1}}{n}\left[B_n\left(\frac{x+1}{4} + \frac{1}{2}\right) - \right.$$
$$\left. - B_n\left(\frac{1+x}{4}\right)\right] = 2^{n-1}E_{n-1}\left(\frac{1+x}{2}\right).$$

При $0 \le x \le 1$ аргумент многочлена Эйлера будет принадлежать отрезку [1/2, 1], поэтому формулу (3) можно переписать в эквивалентном виде

$$A_{n,p} = \frac{(n-1)!}{2^{n-1}2^{1/q}}\|E_{n-1}\|^{-1}_{L_q[1/2,1]}.$$

Таким образом,

$$\max_{0\le x\le 1}|Q_{n-1}(x)| = 2^{n-1}\max_{1/2\le x\le 1}|E_{n-1}(x)| =$$
$$= (n-1)!\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1}\mathcal{K}_{n-1}.$$

Тогда в соответствии с (3) для $p = 1$ получаем

$$A_{n,1} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}\mathcal{K}^{-1}_{n-1}. \quad (4)$$

Явное значение константы $A_{n,p}$ можно получить и при $p = 2$, если заметить, что при $n + m$ четном справедливо равенство

$$\int_{1/2}^{1} E_n(t)E_m(t)dt = -\frac{n}{m+1}\int_{1/2}^{1} E_{n-1}(t)E_{m+1}(t)dt.$$

Это свойство позволяет свести вычисление L_2-нормы многочлена $E_{n-1}(x)$ к вычислению L_1-нормы многочлена $E_{2n-2}(x)$, т.е. справедлива формула

$$\int_{1/2}^{1} E^2_{n-1}(t)dt = (-1)^{n-1}\frac{((n-1)!)^2}{(2n-2)!}\int_{1/2}^{1} E_{2n-2}(t)dt.$$

Следовательно

$$\|Q_{n-1}\|^2_{L_2[0,1]} = 2^{2n-1}\frac{((n-1)!)^2}{(2n-2)!}\|E_{2n-2}\|_{L_1[1/2,1]} =$$
$$= ((n-1)!)^2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n-1}\mathcal{K}_{2n-1}.$$

В итоге получаем

$$A_{n,2} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1/2}\mathcal{K}^{-1/2}_{2n-1}.$$

Значения констант $A_{n,p}$ можно также выразить через числа Эйлера или константы Фавара для тех значений p, при которых q будет целым. Для этого необходимо вычислить интеграл от соответствующей степени многочлена Эйлера на отрезке [1/2, 1]. Формулы для вычисления определенных интегралов от произведения многочленов Эйлера можно найти в работе [7]. Применительно к нашему случаю значения нужных интегралов выражаются в терминах обычных и смещенных чисел Эйлера.

Т е о р е м а 1 [7]. *Для целого $q \ge 1$ справедливо равенство*

$$\int_{1/2}^{1} E^q_n(t)dt = \frac{(n!)^q}{2^{qn+1}}\left(\sum_{k=0}^{qn}(-1)^k \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_{q-1}=k \\ 0\le j_1,\ldots,j_{q-1}\le k}} \frac{k!}{j_1!\cdots j_{q-1}!}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{\tilde{E}_{j_1,\ldots,j_{q-1},k}}{(n-j_1)!\cdots(n-j_{q-1})!(n+k+1)!}\right),$$

где

$$\tilde{E}_{j_1,\ldots,j_{q-1},k} = (-1)^{qn+1}E^*_{n-j_1}\cdots E^*_{n-j_{q-1}}E^*_{n+k+1} -$$
$$- E_{n-j_1}\cdots E_{n-j_{q-1}}E_{n+k+1},$$

$E_i = 2^i E_i(1/2)$ – числа Эйлера, $E^*_i = 2^i E_i(0)$ – смещенные числа Эйлера, причем при отрицательных индексах и одни, и другие числа Эйлера считаются нулевыми.

Заметим, что в выражении для $\tilde{E}_{j_1,\ldots,j_{q-1},k}$ хотя бы одно из $2qn$ чисел Эйлера равно нулю, а если у них индексы разной четности, то и вся величина нулевая. Чтобы записать выражение для L_q-нормы многочлена Эйлера через константы Фавара, нужно оставить только ненулевые слагаемые. Для произвольного q это сделать тяжело, мы ограничимся случаем $q = 3$. Рассмотрим отдельно случаи четной и нечетной степени многочлена. Тогда эти выражения будут иметь вид

$$A_{2m,3/2} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m-2/3} \left| \sum_{k=m}^{2m-1} 2\binom{2k-1}{2m-1} \mathcal{K}_{2m+2k-1}\mathcal{K}_{4m-2k-1} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{2m-1} \sum_{\substack{j=1 \\ k-m+1\le j\le m}}^{2k} \binom{2k}{2j-1} \mathcal{K}_{2m+2k}\mathcal{K}_{2m-2j}\mathcal{K}_{2m-2k+2j-2} \right|^{-1/3},$$

$$A_{2m+1,3/2} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m+1/3} \left| \binom{4m}{2m} \mathcal{K}_{6m+1} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{2m} \sum_{\substack{j=1 \\ k-m+1\le j\le m}}^{2k} \binom{2k}{2j-1} \mathcal{K}_{2m+2k+1}\mathcal{K}_{2m-2j+1}\mathcal{K}_{2m-2k+2j-1} \right|^{-1/3}.$$

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОНСТАНТ ФАВАРА

Мы показали, что в рассмотренных случаях константы экстремальной функциональной интерполяции $A_{n,p}$ выражаются через константы Фавара, которые обычно определяют по формуле

$$\mathcal{K}_n = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu(n+1)}}{(2\nu+1)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

В теории приближения при решении экстремальных задач, получении оценок погрешности приближения и ряда других задач итоговые результаты часто принято выражать через константы Фавара (см. [3, 8, 9]). Однако в литературе мало освещено, как вычислять эти константы, хотя известна их связь с числами Бернулли и Эйлера

$$\mathcal{K}_{2m-1} = (-1)^{m-1} \frac{\pi^{2m-1} 2(2^{2m}-1)}{(2m)!} B_{2m} =$$

$$= (-1)^m \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m-1} \frac{E^*_{2m-1}}{(2m-1)!},$$

$$\mathcal{K}_{2m} = (-1)^m \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m} \frac{E_{2m}}{(2m)!}.$$

Числа Бернулли и Эйлера значительно лучше изучены, чем константы Фавара, и существует много эффективных способов их вычисления, а следовательно, и вычисления констант Фавара. Таким образом, вычисление через числа Бернулли и Эйлера – это один из способов вычисления констант Фавара.

Однако представляют несомненный интерес рекуррентные формулы, позволяющие вычислять константы Фавара сразу без привлечения каких-либо специальных чисел. Нам известны две рекуррентные формулы, полученные в работе [10], одна для вычисления четных констант Фавара, другая для нечетных. Мы предлагаем общие формулы, которые содержат в себе формулы работы [10].

Т е о р е м а 2. *Справедливы равенства*

$$\mathcal{K}_0 = 1, \quad \mathcal{K}_n = \left| \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(-1)^k}{(n-2k)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-2k} \mathcal{K}_{2k} \right|, \tag{5}$$

$$n = 1, 2, \ldots,$$

$$\mathcal{K}_0 = 1,$$

$$\mathcal{K}_n = \left| \frac{1}{n!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^n + \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k}{(n-2k+1)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-2k+1} \mathcal{K}_{2k-1} \right|, \tag{6}$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

Заметим, что обе формулы в теореме 2 можно объединить в одну.

С л е д с т в и е 1. *Справедливы равенства*

$$\mathcal{K}_0 = 1,$$

$$\mathcal{K}_n = \frac{1}{2}\left| \frac{1}{n!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n(k+1)+\left[\frac{k}{2}\right]}}{(n-k)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-k} \mathcal{K}_k \right|,$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

Формулы (5), (6) не очень сложны и после некоторых вычислений дают явные значения нужных констант (можно написать программу для компьютера). Однако оказывается, можно получить совсем простые рекуррентные формулы.

Т е о р е м а 3. *Справедливы равенства*

$$\mathcal{K}_0 = 1, \quad \mathcal{K}_1 = \frac{\pi}{2},$$

$$\mathcal{K}_n = \frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \mathcal{K}_{2k-1}\mathcal{K}_{n-2k}, \quad n = 2, 3, \ldots, \tag{7}$$

$$\mathcal{K}_0 = 1,$$

$$\mathcal{K}_n = \frac{\pi}{2n} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \mathcal{K}_{2k}\mathcal{K}_{n-1-2k}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

Обратим внимание, что если n четное, то формулы (7) и (8) совпадают. А для нечетных они разные, но их также можно объединить в одну.

С л е д с т в и е 2. *Справедливы равенства*

$$\mathcal{K}_0 = 1, \quad \mathcal{K}_1 = \frac{\pi}{2},$$

$$\mathcal{K}_n = \frac{\pi}{4n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{K}_k\mathcal{K}_{n-1-k}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

Как отмечает Ю.Н. Субботин [4, с. 32] константы экстремальной функциональной интерполяции $A_{n,p}$ должны быть монотонны по параметру p, поэтому, как следствие вычисленных значений констант, мы получаем неравенства, связывающие соседние константы Фавара.

Т е о р е м а 4. *Для любого $n \geq 1$ справедливы неравенства*

$$\frac{2}{\pi}\mathcal{K}_n^2 \leq \mathcal{K}_{2n-1} \leq \frac{\pi}{2}\mathcal{K}_{n-1}^2.$$

ИСТОЧНИКИ ФИНАСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект 0314–2016–0013) и при частичной финансовой поддержке РФФИ и ННИО (проект 19–51–12008).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Субботин Ю.Н., Новиков С.И., Шевалдин В.Т.* // Тр. ИММ УрО РАН. 2018. Т. 24. № 3. С. 200–225.
2. *Субботин Ю.Н.* // Тр. МИАН СССР. 1965. Т. 78. С. 24–42.
3. *Корнейчук Н.П.* // Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987.
4. *Субботин Ю.Н.* // Тр. МИАН СССР. 1967. Т. 88. С. 30–60.
5. *Dilcher K.* NIST handbook of mathematical functions. Washington: U.S. Dept. Commerce, 2010. https://dlmf.nist.gov/24
6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1965.
7. *Liu J., Pan H., Zhang Y.* // Integral Transforms Spec. Funct. 2014. V. 25. № 9. P. 680–685.
8. *Тихомиров В.М.* // Некоторые вопросы теории приближений. М.: МГУ, 1976.
9. *Волков Ю.С., Субботин Ю.Н.* // Тр. ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20. № 1. С. 52–67.
10. *Gocheva-Ilieva S.G., Feschiev I.H.* // Abstr. Appl. Anal. 2013. 523618.

ON ONE PROBLEM OF EXTREMAL FUNCTIONAL INTERPOLATION AND FAVARD CONSTANTS

Yu. S. Volkov[a]

[a] *Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.I. Berdyshev

In the problem of extremal functional interpolation, first considered by Yu. N. Subbotin, the explicit form of the extremal interpolation constants in terms of the Favard constants in the spaces L_p, $p = 1, 3/2, 2$, is calculated. Simple effective recurrence formulas to compute Favard constants are found, and formulas for calculating these constants in terms of Euler numbers are also given.

Keywords: interpolation, Favard constants, recurrence formulas, Euler polynomials