ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 495, с. 31–33

МАТЕМАТИКА

УДК 519.157

МИНИМАЛЬНЫЕ ПОДГРАФЫ БЕЗ КЛИК В КНЕЗЕРОВСКОМ ГРАФЕ

© 2020 г. С. В. Вахрушев[1], М. Е. Жуковский[1,2,3,4,*], С. Г. Киселев[1], А. Ю. Скоркин[3]

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 29.06.2020 г.
Поступило 06.07.2020 г.
После доработки 06.07.2020 г.
Принято к публикации 17.09.2020 г.

Получены оценки числа насыщения и числа слабого насыщения в кнезеровском графе с полными шаблонами.

Ключевые слова: кнезеровский граф, число насыщения, число слабого насыщения

DOI: 10.31857/S2686954320060181

Пусть $n \in \mathbb{N}$, F – некоторый граф. Числом насыщения $\mathrm{sat}(n, F)$ называется наименьшее количество ребер в таком графе G на множестве вершин $[n] := \{1, \ldots, n\}$, что

1) G не содержит ни одного подграфа, изоморфного F,

2) при добавлении любого отсутствующего ребра в G в нем появляется хотя бы один подграф, изоморфный F.

Иными словами, $\mathrm{sat}(n, F)$ – это минимальное количество ребер в максимальном по включению графе без F на множестве вершин $[n]$. Числом слабого насыщения $\mathrm{wsat}(n, F)$ называется наименьшее количество ребер в таком графе G на множестве вершин $[n] := \{1, \ldots, n\}$, что

1) G не содержит ни одного подграфа, изоморфного F,

2) отсутствующие ребра можно добавить в такой последовательности в G, что каждое новое ребро будет создавать хотя бы одну новую копию F в текущем графе.

Разумеется, $\mathrm{wsat}(n, F) \le \mathrm{sat}(n, F)$.

В [1] доказано, что для любых натуральных $s \le n$ справедливо

$$\mathrm{sat}(n, K_s) = (s-2)\left(\binom{n}{k} - s + 2\right) + \binom{s-2}{2},$$

где K_s – полный граф на s вершинах (или, как говорится, s-клика). В [2] Боллобаш выдвинул гипотезу о том, что для всех s справедливо равенство $\mathrm{wsat}(n, K_s) = \mathrm{sat}(n, K_s)$. Заметим, что при $s = 3$ это равенство очевидно, так как звезда $K_{1,n-1}$ (т.е. дерево, в котором одна вершина смежна со всеми остальными) содержит ровно $n-1$ ребро, и добавление любого ребра создает треугольник, но при этом из несвязного графа “восстановить” все ребра нельзя. Гипотеза Боллобаша была доказана в [3].

В дальнейших работах о насыщении рассматривались другие графы F, а также предполагалось, что необходимо восстановить не все ребра между вершинами из $[n]$. Итак, пусть F, G – графы. Числом насыщения $\mathrm{sat}(G, F)$ называется наименьшее количество ребер в максимальном по включению остовном подграфе G, не содержащем подграфов, изоморфных F. Числом слабого насыщения $\mathrm{wsat}(G, F)$ называется наименьшее количество ребер в таком остовном подграфе H графа G, не содержащем копий F, что отсутствующие ребра из $G \setminus H$ можно добавить в такой последовательности в H, что каждое новое ребро будет создавать хотя бы одну новую копию F в текущем графе.

В работах [4, 9] было оценено $\mathrm{wsat}(n, F)$ для полного двудольного графа F. Точные значения $\mathrm{wsat}(G, F)$, а также оценки $\mathrm{sat}(G, F)$ в случае, когда оба графа являются полными двудольными, получены в работах [5, 6]. Работы [7, 8] посвящены

[1] *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия*
[2] *Институт математики им С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, Омск, Россия*
[3] *Адыгейский государственный университет, Кавказский математический центр, Майкоп, Республика Адыгея, Россия*
[4] *Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, Москва, Россия*
**E-mail: zhukmax@gmail.com*

оцениванию числа насыщения и числа слабого насыщения в случае, когда граф G случаен.

Настоящая работа посвящена оцениванию величин $\mathrm{sat}(\mathrm{KG}(n,k),K_s)$ и $\mathrm{wsat}(\mathrm{KG}(n,k),K_s)$, где $\mathrm{KG}(n,k)$ – кнезеровский граф, т.е. граф, в котором вершинами являются все k-элементные подмножества $[n]$, при этом две вершины смежны, если они не пересекаются. Заметим, что в случае $k=1$ задача уже решена, так как $\mathrm{KG}(n,1)$ – это просто полный граф на n вершинах. Кроме того, при $n<sk$ в $\mathrm{KG}(n,k)$ нет ни одной s-клики, а значит, $\mathrm{wsat}(\mathrm{KG}(n,k),K_s)=\mathrm{sat}(\mathrm{KG}(n,k),K_s)$ совпадает с числом ребер $\mathrm{KG}(n,k)$, т.е. равно $\frac{1}{2}\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}$.

Обратимся теперь к нетривиальным результатам. Начнем с числа насыщения. Пусть сперва $s=3$. Если $n=3k$, то никакие два треугольника в кнезеровском графе не имеют общего ребра, а значит,

$$\mathrm{sat}(\mathrm{KG}(n,k),K_s)=\frac{1}{3}\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}.$$

Пусть теперь $n>3k+1$. К сожалению, даже в простейшем нетривиальном случае $n=7$, $k=2$, $s=3$ нам не удалось найти точного значения числа насыщения.

Т е о р е м а 1. *Справедливы оценки*

$$42\le \mathrm{sat}(\mathrm{KG}(7,2),K_3)\le 48.$$

В этой связи мы исследовали асимптотическое поведение $\mathrm{sat}(\mathrm{KG}(n,k),K_3)$ при $n\to\infty$ и $k=\mathrm{const}$. При $k=2$ нам удалось получить относительно точные оценки числа насыщения.

Т е о р е м а 2. *При всех* $n\ge 8$

$$\frac{3}{2}(n^2-5n+2)\le \mathrm{sat}(\mathrm{KG}(n,2),K_3)\le \frac{3}{2}(n^2-n-10).$$

При остальных n, k, s нам не удалось получить настолько точных оценок. В оставшихся случаях мы только определили порядок роста.

Т е о р е м а 3. *При всех* $k\ge 3$ *справедливо*

$$(k+1)(1-2k^{-k/2})\binom{n}{k}\le$$
$$\le \mathrm{sat}(\mathrm{KG}(n,k),K_3)\le (k+1)\binom{n}{k}.$$

При всех $k\ge 3$, $s\ge 4$ *и* $n\ge sk+1$ *справедливо*

$$\frac{(k+s-2)\binom{n}{k}}{2}\le \mathrm{sat}(\mathrm{KG}(n,k),K_s)\le (s-2)(k+1)\frac{n^k}{k!}.$$

Обратимся теперь к слабому насыщению. Пусть сперва $s=3$. В случае $n=3k$ выполнено

$$\mathrm{wsat}(\mathrm{KG}(n,k),K_3)=\mathrm{sat}(\mathrm{KG}(n,k),K_3)=$$
$$=\frac{1}{3}\binom{n}{k}\binom{n-k}{k},$$

так как никакие два треугольника не имеют общего ребра. Для случая $n\ge 3k+2$ нам удалось найти точное значение числа слабого насыщения.

Т е о р е м а 4. *При всех* $k\ge 2$ *и* $n\ge 3k+2$ *справедливо равенство*

$$\mathrm{wsat}(\mathrm{KG}(n,k),K_3)=\binom{n}{k}-1.$$

Таким образом, единственным случаем, в котором точное значение числа слабого насыщения не известно, является $n=3k+1$. При малых k с помощью линейно–алгебраического метода удалось найти следующие оценки.

Т е о р е м а 5. *Справедливы оценки*

$$20\le \mathrm{wsat}(\mathrm{KG}(7,2),K_3)\le 21,$$

$$161\le \mathrm{wsat}(\mathrm{KG}(10,3),K_3)\le 162,$$

$$1286\le \mathrm{wsat}(\mathrm{KG}(13,4),K_3)\le 2103.$$

При больших k с помощью вероятностного метода получена следующая нетривиальная оценка сверху. Напомним, что количество ребер в кнезеровском графе равно $\frac{1}{2}\binom{3k+1}{k}\binom{2k+1}{k}$.

Т е о р е м а 6.

$$\mathrm{wsat}(\mathrm{KG}(3k+1,k),K_3)=O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\binom{3k+1}{k}\binom{2k+1}{k}\right).$$

Наконец, при $s\ge 4$ и достаточно больших n мы нашли точное значение числа слабого насыщения.

Т е о р е м а 7. *При* $s\ge 4$, $n\ge (2s-2)k$ *справедливо равенство*

$$\mathrm{wsat}(KG(n,k),K_s)=(s-2)\left(\binom{n}{k}-s+2\right)+\binom{s-2}{2}.$$

Кроме того, верна следующая асимптотическая оценка.

Т е о р е м а 8. *При* $s\ge 4$, $n\ge sk+1$ *справедливо равенство*

$$\mathrm{wsat}(\mathrm{KG}(n,k),K_s)=(1+o(1))(s-2)\binom{n}{k}.$$

В последней теореме имеется в виду, что $n\to\infty$, и при этом k не обязано быть фиксированным – необходимо лишь выполнение неравенства $n\ge sk+1$.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, номер 075-15-2019-1613.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Erdős P., Hajnal A., Moon J.W.* A problem in graph theory // The American Mathematical Monthly. 1964. V. 71. P. 1107–1110.
2. *Bollobás B.* Weakly k-saturated graphs // Beitrage zur Graphentheorie (Kolloquium, Manebach). 1967. P. 25–31.
3. *Lovász L.* Flats in matroids and geometric graphs // Combinatorial Surveys (Proc. 6th British Comb. Conf.). Academic Press. 1977. P. 45–86.
4. *Cui Y., Pu L.* Weak saturation numbers of $K_{2,\ t}$ and $K_p \cup K_q$ // AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics. 2019. V. 16. № 3. P. 237–240.
5. *Gun W., Korándi D., Sudakov B.* $K_{s,\ t}$-saturated bipartite graphs // European J. of Combinatorics. 2015. V. 45. P. 12–20.
6. *Moshkovitz G., Shapira A.* Exact bounds for some hypergraph saturation problems // J. combinatorial theory B. 2015. V. 111. P. 242–248.
7. *Korándi D., Sudakov B.* Saturation in random graphs // Random structures and algorithms. 2017. V. 51. № 1. P. 169–181.
8. *Mohammadian A., Tayfeh-Rezaie B.* Star saturation number of random graphs // Discrete Math. 2018. V. 341. P. 1166–1170.
9. *Kronenberg G., Martins T., Morrison N.* Weak saturation numbers of complete bipartite graphs in the clique // arxiv2004.01289, 2020.

MINIMUM CLIQUE-FREE SUBGRAPHS OF KNESER GRAPHS

S. V. Vahrushev[a], M. E. Zhukovskii[a,b,c,d], S. G. Kiselev[a], and A. Y. Skorkin[a]

[a] *Moscow Institute of Physics and Technology (National State University), Dolgoprudny, Moscow Region, Russian Federation*
[b] *Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Omsk, Russian Federation*
[c] *Adyghe State University, Caucasus Mathematical Center, Maykop, Russian Federation*
[d] *The Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

In this paper, we estimate saturation and weak saturation numbers of Kneser graphs with clique patterns.

Keywords: Kneser graphs, saturation number, weak saturation number