ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 495, с. 100–106

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977

ОЦЕНКА РОСТА СТЕПЕНИ НЕВЫПУКЛОСТИ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ В ТЕРМИНАХ α-МНОЖЕСТВ

 Член-корреспондент РАН **В. Н. Ушаков**[1,*], **А. А. Ершов**[1,**]

Поступило 04.09.2020 г.
После доработки 23.09.2020 г.
Принято к публикации 24.09.2020 г.

Изучаются свойства α-множеств, являющихся одним из обобщений выпуклых множеств. Установлена взаимосвязь между α-множествами и слабо выпуклыми множествами по Виалю и по Ефимову–Стечкину. Получена оценка роста с течением времени меры невыпуклости α у множеств достижимости одного класса управляемых систем в двумерном фазовом пространстве.

Ключевые слова: обобщенно выпуклое множество, α-множество, слабо выпуклое множество, множество достижимости, управляемая система

DOI: 10.31857/S268695432006017X

α-множества введены в 2000-х гг. для классификации множеств достижимости управляемых систем по степени их невыпуклости [1]. Они являются одним из видов так называемых обобщенно выпуклых множеств, к которым относятся, например, сильно и слабо выпуклые множества по Виалю и по Ефимову–Стечкину [2], линейно выпуклые множества в пространстве над полем комплексных чисел [3], α-паравыпуклые множества Э. Майкла [4, 5], созданные на их основе функционально паравыпуклые множества [6] и многие другие.

Прикладная значимость в теории управления и актуальность изучения α-множеств также основывается на двух предположениях: во-первых, для некоторых управляемых систем степень невыпуклости α у множеств достижимости растет непрерывно с течением времени (аналог теоремы 3.6.2 из [2, гл. 3, §3.6]), и, во-вторых, α-множества обладают свойствами, полезными для решения задач (в качестве аналога отметим работы [7–9]).

Главная цель настоящего сообщения заключается в доказательстве справедливости первого предположения для линейных по управлению управляемых систем в двумерном фазовом пространстве. Для достижения этой цели установим взаимосвязь между α-множествами и слабо выпуклыми множествами на плоскости, и затем воспользуемся результатом теоремы 3.6.2 из [2, гл. 3, §3.6].

1. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ α-МНОЖЕСТВАМИ И СЛАБО ВЫПУКЛЫМИ МНОЖЕСТВАМИ ПО ЕФИМОВУ–СТЕЧКИНУ

Будем использовать следующие обозначения.

Через $\mathrm{co}M$ обозначим выпуклую оболочку множества M, $\mathrm{cl}M$ – замыкание множества M, $\langle x_*, x^*\rangle$ – скалярное произведение x_* и x^* из $\mathbb{R}^n$, $\|x_*\| = \langle x_*, x_*\rangle^{1/2}$ – евклидову норму в $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{diam}(M) = \sup\limits_{x,y\in M}\|x-y\|$ – диаметр множества M, $B(a, r) = \{x\in\mathbb{R}^n : \|x-a\| < r\}$ – открытый шар радиуса r и с центром в точке a, $\angle(x_*, x^*) = \arccos\dfrac{\langle x_*, x^*\rangle}{\|x_*\|\cdot\|x^*\|}\in[0,\pi]$ – угол между векторами x_* и x^*.

Под метрической проекцией p^* точки x^* на множество M мы понимаем ближайшую к x^* точку из M. Множество всех проекций точки x^* на множество M обозначим через $\Omega_M(x^*)$.

В частном случае α-множества из двумерного евклидова пространства его можно определить следующим образом [10].

[1] *Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург, Россия*
**E-mail: ushak@imm.uran.ru*
***E-mail: ale10919@yandex.ru*

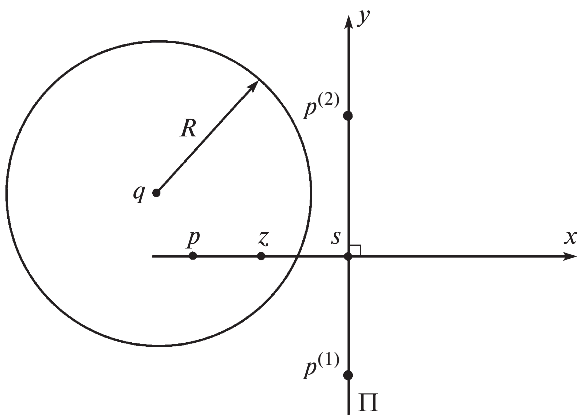

Рис. 1. Схема расположения отрезка $p^{(1)}p^{(2)}$ и точки z.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть A – замкнутое множество в двумерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$ и $z^* \in \mathbb{R}^2 \backslash A$. Определим функцию

$$\alpha_A(z^*) = \pi \quad \text{в случае,} \quad \text{если} \quad z^* \in \mathrm{co}\Omega_A(z^*),$$

и

$$\alpha_A(z^*) = \max_{x,y \in \Omega_A(z^*)} \angle(x - z^*, y - z^*)$$
в противном случае.

Полагаем $\alpha_A = \sup\limits_{z^* \in \mathbb{R}^n \backslash A} \alpha_A(z^*) \in [0, \pi]$.

Множество A с мерой невыпуклости $\alpha = \alpha_A$ назовем α-м н о ж е с т в о м.

Отметим, что в евклидовых пространствах размерности 3 и выше α-множества определены иначе (см. [1, 10]), но в $\mathbb{R}^2$ все определения эквивалентны [10, теорема 1].

О п р е д е л е н и е 2 [11]. Множество A в линейном пространстве E называется с л а б о в ы п у к л ы м п о Е ф и м о в у – С т е ч к и н у, с постоянной $R > 0$, если существует непустое множество $A_1 \subset E$ такое, что

$$A = \bigcap_{a \in A_1} (E \backslash B(a, R)).$$

О п р е д е л е н и е 3 [2, §1.1]. Пусть в линейном пространстве E с нормой $\|\cdot\|_E$ заданы две точки x, y и задано число $R \geq \frac{\|x - y\|_E}{2}$. Множество

$$D_R(x, y) = \bigcap_{a \in E: \{x, y\} \subset \mathrm{cl} B(a, R)} \mathrm{cl} B(a, R)$$

называется с и л ь н о в ы п у к л ы м о т р е з к о м.

О п р е д е л е н и е 4 [2, §1.1]. Множество A в линейном пространстве E с нормой $\|\cdot\|_E$ называется с л а б о в ы п у к л ы м п о В и а л ю с постоянной $R > 0$, если для любых двух точек $x, y \in A$ таких, что $0 < \|x - y\|_E < 2R$, существует точка $z \in D_R(x, y) \cap A$, не совпадающая с точками x и y.

Под расстоянием от точки x до множества M в линейном пространстве E с нормой $\|\cdot\|_E$ будем понимать величину $\rho(x, M) = \inf\limits_{y \in M} \|x - y\|_E$.

О п р е д е л е н и е 5 [2, §1.7]. Будем говорить, что множество M в линейном пространстве E с нормой $\|\cdot\|_E$ обладает ч е б ы ш е в с к и м с л о е м толщины $R > 0$, если для любой точки $x \in E$ такой, что $\rho(x, M) < R$, существует и единственна метрическая проекция точки x на M.

Л е м м а 1. *Пусть заданы две точки $p^{(1)}, p^{(2)}$ на плоскости и число $R > \frac{|p^{(1)}p^{(2)}|}{2}$, где $|p^{(1)}p^{(2)}| = \|p^{(2)} - p^{(1)}\|$ – длина отрезка $p^{(1)}p^{(2)}$. Обозначим через $s = \frac{1}{2}(p^{(1)} + p^{(2)})$ середину отрезка $p^{(1)}p^{(2)}$, через ps серединный перпендикуляр к отрезку $p^{(1)}p^{(2)}$, через $B(q, R)$ такой открытый круг с центром в точке q и радиусом R, что $p^{(1)} \notin B(q, R)$, $p^{(2)} \notin B(q, R)$. Пусть некоторая точка $z \in ps \cap B(q, R)$* (рис. 1).

Тогда, если $|zs| \geq R - \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}|p^{(1)}p^{(2)}|^2}$, то точки z и q лежат в одной полуплоскости относительно прямой П, содержащей $p^{(1)}$ и $p^{(2)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем декартову систему координат с центром в точке s, ось sy проведем через точку $p^{(2)}$. Без ограничения общности считаем, что точка z находится слева от точки s, как показано на рис. 1.

Введем обозначения

$$p^{(1)} = (0, -y_2), \quad p^{(2)} = (0, y_2),$$
$$z = (-x, 0), \quad q = (x_0, y_0),$$

где

$$y_2 = \frac{1}{2}|p^{(1)}p^{(2)}|, \tag{1}$$

$$x \geq R - \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}|p^{(1)}p^{(2)}|^2}. \tag{2}$$

Предположим противное, что точка q находится по другую сторону от прямой П относительно точки z, т.е. $x_0 > 0$. Покажем, что это невозможно.

Действительно, условия $p^{(1)} \notin B(q, R)$ и $p^{(2)} \notin B(q, R)$ равносильны системе неравенств

$$x_0^2 + (y_2 - y_0)^2 \geq R^2,$$
$$x_0^2 + (y_2 + y_0)^2 \geq R^2,$$

из которых (при $x_0 > 0$) следует, что

$$x_0 \geq \sqrt{R^2 - y_2^2}. \tag{3}$$

С учетом (1), (2) и (3) получаем, что

$$|zq|^2 = (x_0 + x)^2 + y_0^2 \geq$$

$$\geq \left(\sqrt{R^2 - y_2^2} + R - \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}|p_1 p_2|^2}\right)^2 = R^2,$$

т.е. z не может принадлежать кругу $B(q, R)$.

Таким образом, пришли к противоречию.

Л е м м а 2. *Пусть множество $A \subset \mathbb{R}^2$ слабо выпуклое по Ефимову–Стечкину с постоянной R, связно и его диаметр $\operatorname{diam}(A) < 2R$.*

Тогда A обладает чебышевским слоем толщины R.

Доказательство проведем от противного. По определению 5 для наличия чебышевского слоя толщины R у множества A все точки, удаленные от A на расстояние, меньшее R, должны иметь единственную метрическую проекцию на A. Предположим, что существует точка $z \in \mathbb{R}^2 \setminus M$ такая, что $\rho(z, A) < R$, и имеющая по крайней мере две различные метрические проекции $p^{(1)}$ и $p^{(2)}$ на A. Обозначим через $r = \|z - p^{(1)}\|$. Заметим, что $r = \rho(z, A) < R$ и что в круге $B(z, r)$ не может быть ни одной точки из A.

Обозначим через $s = \dfrac{p^{(1)} + p^{(2)}}{2}$ и рассмотрим точку

$$y = s + \frac{1}{2}\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}|p^{(1)}p^{(2)}|^2} + \right.$$

$$\left. + R - \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}|p^{(1)}p^{(2)}|^2}\right)\frac{p^{(1)} + p^{(2)} - 2z}{\|p^{(1)} + p^{(2)} - 2z\|}.$$

Заметим (см. рис. 2), что

$$\|y - z\| = \|y - s\| + \|s - z\| =$$

$$= \frac{1}{2}\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}|p^{(1)}p^{(2)}|^2} + \right.$$

$$\left. + R - \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}|p^{(1)}p^{(2)}|^2}\right) + \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}|p^{(1)}p^{(2)}|^2} <$$

$$< r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}|p^{(1)}p^{(2)}|^2} + \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}|p^{(1)}p^{(2)}|^2} = r$$

из-за монотонного убывания функции

$$f(r) = r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}|p^{(1)}p^{(2)}|^2} \text{ при } r > \frac{1}{2}|p^{(1)}p^{(2)}|.$$

Следовательно, точка y находится в круге $B(z, r)$, и, значит, $y \in \mathbb{R}^2 \setminus A$. В силу слабой выпуклости по Ефимову–Стечкину множества A существует от-

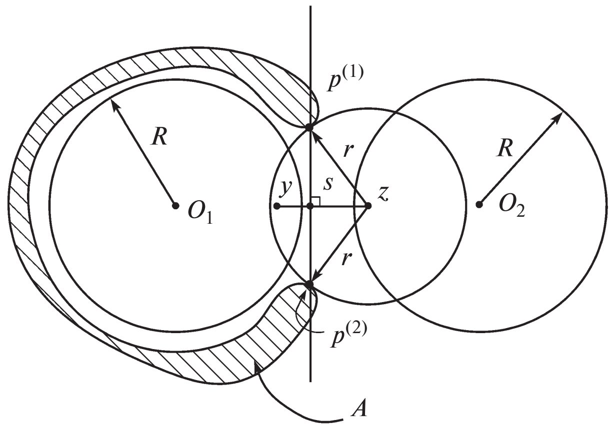

Рис. 2. Точка z и ее проекции $p^{(1)}$ и $p^{(2)}$ на множество A.

крытый круг радиуса R, который содержит точку y, но не пересекается с множеством A.

Однако

$$\|y - s\| > R - \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}\left|p^{(1)}p^{(2)}\right|^2},$$

и, следовательно, в силу леммы 1, центр любого такого круга, содержащего точку y, но не содержащего точки $p^{(1)}$ и $p^{(2)}$, будет находиться по одну сторону от прямой $p^{(1)}p^{(2)}$ вместе с точкой y (т.е. находиться в одной полуплоскости, образуемой прямой $p^{(1)}p^{(2)}$). Аналогично, центр любого открытого круга радиуса R, не пересекающегося с A, содержащего точку z, но не содержащего точки $p^{(1)}$ и $p^{(2)}$, будет находиться по другую сторону от прямой $p^{(1)}p^{(2)}$ относительно точки y (рис. 2).

Очевидно, что точки $p^{(1)}$ и $p^{(2)}$ невозможно соединить какой-либо кривой из A, не нарушив условия $\operatorname{diam}(A) < R$. Следовательно, нарушается условие связности A и наше предположение о существовании нескольких проекций неверно.

Т е о р е м а 1. *Пусть связное множество $A \subset \mathbb{R}^2$ слабо выпукло по Ефимову–Стечкину с постоянной R и $\operatorname{diam}(A) \leq 2r$, где $r < R$. Тогда A является α-множеством с числом*

$$\alpha \leq \arccos\left(1 - 2\left(\frac{r}{R}\right)^2\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего заметим, что, в силу [2, лемма 1.3.4], A является замкнутым, как и любое другое множество, слабо выпуклое по Ефимову–Стечкину. Тем самым A является α-множеством с числом $\alpha \leq \pi$. Оценим степень его невыпуклости α более аккуратно.

Вначале докажем, что ни одна точка $z^* \in \mathbb{R}^2 \setminus A$ не может находиться в выпуклой оболочке своих

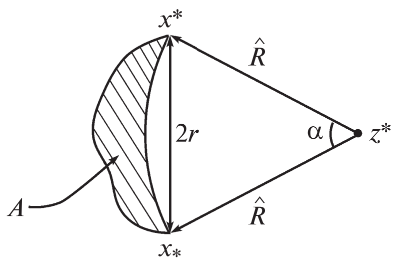

Рис. 3. Точка z^*, имеющая более одной проекции на множество A.

проекций на множество A. Действительно, предположим, что существует такая точка $z^* \in \mathrm{co}\Omega_A(z^*)$. Тогда множество проекций $\Omega_A(z^*)$ должно содержать не менее двух точек. Однако, в силу леммы 2, множество A обладает чебышевским слоем толщины R, или, иными словами, все точки из R-окрестности множества A обладают единственной метрической проекцией на A. Следовательно, расстояние $\rho(z^*, \Omega_A(z^*)) \geq R$ или, иначе говоря, точка z^* является центром открытого круга $B(z^*, \hat{R})$ с радиусом

$$\hat{R} \geq R, \tag{4}$$

который не содержит точек из A. В то же время на границе данного круга располагается множество $\Omega_A(z^*)$. Если множество $\Omega_A(z^*)$ содержит всего две проекции, то в силу соотношения $z^* \in \mathrm{co}\Omega_A(z^*)$ эти проекции есть диаметрально противоположные точки круга $B(z^*, \hat{R})$, расстояние между которыми $2\hat{R}$. Это противоречит неравенству $\mathrm{diam}(A) \leq 2r$. Если множество $\Omega_A(z^*)$ содержит большее количество точек, то можно выбрать из них такие точки $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$, что $z^* \in \mathrm{co}\{x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}\}$. Однако несложными рассуждениями, учитывая линейную связность A, приходим к выводу, что данный случай также невозможен из-за неравенства $\mathrm{diam}(A) \leq 2r$.

Итак, мы получили, что A является α-множеством с числом $\alpha < \pi$. Оценим теперь значение α, ссылаясь на определение 1. Пусть

$$\alpha = \angle x_* z^* x^* = \max_{x, y \in \Omega_A(z^*)} \angle x z^* y.$$

Рассмотрим $\Delta x_* x^* z^*$ на рис. 3.

По теореме косинусов

$$|x_* x^*|^2 = \hat{R}^2 + \hat{R}^2 - 2\hat{R} \cdot \hat{R} \cos\alpha.$$

Отсюда,

$$\alpha = \arccos\left(1 - \frac{|x_* x^*|^2}{2\hat{R}^2}\right). \tag{5}$$

Так как $\Omega_A(z^*) \subset A$, то

$$\left|p^{(1)} p^{(2)}\right| \leq \mathrm{diam}(\Omega_A(z^*)) \leq \mathrm{diam}(A) = 2r. \tag{6}$$

Поскольку функция (5) достигает максимума при наибольшем $|p^{(1)} p^{(2)}|$ и наименьшем $\hat{R}$, то из неравенств (6) и (4) следует утверждение теоремы.

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Введем в рассмотрение управляемую систему на промежутке $[t_0, \vartheta]$, описываемую векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + B(t)u(t), \quad x(t_0) \in X^{(0)}, \tag{7}$$

где t — время, $x(t) \in \mathbb{R}^2$ — фазовый вектор, $X^{(0)}$ — ограниченное множество в $\mathbb{R}^2$, $u(t)$ — вектор управления из компакта $P \subset \mathbb{R}^2$, $f\colon [t_0, T] \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ — непрерывная функция, $B(t)$ — (2×2)-матрица с непрерывными коэффициентами. Под множеством допустимых управлений U системы (7) понимаем множество всех интегрируемых по Лебегу вектор-функций $u(t)\colon [t_0, T] \mapsto P$.

Предполагаем выполненными следующие условия на систему (7):

1) для любого $t \in [t_0, T]$ функция $f(t, x)$ дифференцируема по x,

2) производная $f'_x(\cdot, x)$ ограничена константой M и удовлетворяет условию Липшица с постоянной L,

3) множество $X^{(0)}$ слабо выпукло по Ефимову—Стечкину с постоянной $R_0 > \frac{1}{2}\mathrm{diam}(X^{(0)})$,

4) для любого $t \in [t_0, T]$ множество $B(t) \cdot P = \{B(t)u\colon u \in P\}$ сильно выпукло [2, определение 1.1.4] с постоянной r_P,

5) выполнено неравенство $r_P \leq M\hat{R}$, где

$$\hat{R} = \left(\frac{L}{6M} + \frac{1}{R_0}\right)^{-1} \exp(-6M(T - t_0)). \tag{8}$$

При этих условиях существуют решения $x(t)$ системы в классе абсолютно непрерывных функций на $[t_0, T]$, которые мы называем движениями системы (7).

Обозначим через $X(T) = X(T; t_0, X^{(0)})$ множество достижимости системы (7) в конечный момент времени T со стартовым множеством $X^{(0)}$. Относительно $X(T)$ сформулируем и докажем следующие утверждения.

Л е м м а 3. *Справедлива оценка*

$$\mathrm{diam}(X(T)) \leq e^{M(T - t_0)}\mathrm{diam}(X^{(0)}) + \hat{R}(e^{M(T - t_0)} - 1).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим два произвольных движения $x(t)$ и $y(t)$ управляемой системы (7), порожденное допустимыми управлениям $u(t)$ и $v(t)$ соответственно, и оценим рассогласование $\|y(T)-x(T)\|$ этих движений в момент T, тем самым мы оценим $\operatorname{diam}(X(T))$.

Из уравнения (7) следует, что для этих движений выполняется соотношение

$$\dot{y}(t)-\dot{x}(t)=f(t,y(t))-f(t,x(t))+v(t)-u(t),$$

которое после интегрирования по времени t принимает вид

$$y(t)-x(t)=y(t_0)-x(t_0)+ \\ +\int_{t_0}^{t}(f(\tau,y(\tau))-f(\tau,x(\tau)))d\tau+\int_{t_0}^{t}(v(\tau)-u(\tau))d\tau. \quad (9)$$

Учитывая сильную выпуклость множества $B(t)\cdot P$ и неравенство $r_P\le M\hat{R}$ из условия 5), получаем, что

$$\int_{t_0}^{t}\|v(\tau)-u(\tau)\|d\tau\le\int_{t_0}^{t}\operatorname{diam}(B(t)\cdot P)d\tau\le \\ \le(t-t_0)r_P(t-t_0)M\hat{R}. \quad (10)$$

Кроме того, применив теорему об оценке конечных приращений (см., например, [12, гл. 1, §3.3, теорема 3.3.2]) для функции $f(t,\cdot)$, получаем для любого момента времени $t\in[t_0,T]$ неравенство

$$\|f(t,y(t))-f(t,x(t))\|\le M\|y(t)-x(t)\|. \quad (11)$$

Из (9), (10) и (11) следует оценка

$$0\le\|y(t)-x(t)\|\le\|y(t_0)+x(t_0)\|+ \\ +M\int_{t_0}^{t}\|y(\tau)-x(\tau)\|d\tau+(t-t_0)M\hat{R}. \quad (12)$$

Применяя к (12) лемму Гронуолла [13, гл. 1, §2, с. 26], получаем неравенство

$$\|y(t)-x(t)\|\le\|y(t_0)-x(t_0)\|e^{M(t-t_0)}+\hat{R}(e^{M(t-t_0)}-1)\le \\ \le\operatorname{diam}(X^{(0)})e^{M(t-t_0)}+\hat{R}(e^{M(t-t_0)}-1),$$

которое выполняется, в частности, при $t=T$. В силу произвольности выбора движений $x(t)$ и $y(t)$ из него следует утверждение леммы.

З а м е ч а н и е 1. Для выполнения утверждения леммы 3 по отношению к системе (7) условие 3) излишне, а условия 4) и 5) можно заменить простым неравенством $\operatorname{diam}(B(t)\cdot P)\le M\hat{R}$, где $\hat{R}$ – любая наперед заданная постоянная.

Т е о р е м а 2. *Если*

$$e^{M(T-t_0)}\operatorname{diam}(X^{(0)})+\hat{R}(e^{M(T-t_0)}-1)<2\hat{R},$$

то

$$\alpha_{X(T)}\le \\ \le\arccos\left(1-\frac{(e^{M(T-t_0)}\operatorname{diam}(X^{(0)})+\hat{R}(e^{M(T-t_0)}-1))^2}{2\hat{R}^2}\right). \quad (13)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\operatorname{diam}(X^{(0)})<2R_0$ по условию 3), то по лемме 2 множество A_0 обладает чебышевским слоем толщины R_0, что эквивалентно тому, что множество $X^{(0)}$ является слабо выпуклым по Виалю с постоянной R_0 (см. [2, теорема 1.7.4]). Кроме того, в силу [2, лемма 1.3.4] множество $X^{(0)}$ является замкнутым. Но тогда, по [2, теорема 1.8.1], множество $X(T)$ является замкнутым, слабо выпуклым по Виалю множеством с постоянной $\hat{R}$. По [2, теорема 1.3.4] множество $X(T)$ является слабо выпуклым по Ефимову–Стечкину с той же константой $\hat{R}$, а из [2, теорема 1.4.1] следует его связность.

В силу леммы 3 имеем оценку

$$\operatorname{diam}(X(T))\le e^{M(T-t_0)}\operatorname{diam}(X^{(0)})+\hat{R}(e^{M(T-t_0)}-1).$$

В свою очередь, применяя к множеству $X(T)$ теорему 1, получаем оценку (13).

3. ПРИМЕРЫ

3.1. Пример 1

Рассмотрим математический маятник без силы трения, описываемый системой

$$\dot{x}_1=x_2, \\ \dot{x}_2=-\sin x_1+u_2, \quad (14)$$

где $x_1=x_1(t)$ – угол отклонения маятника от вертикального положения, $x_2=\dot{x}_1(t)$ – скорость отклонения маятника от вертикального положения. Управление маятником на промежутке $[t_0,T]$ осуществляется при помощи управляющего воздействия $u=u(t)$, стесненного ограничением $u_2=u_2(t)\in[-1,1]$.

Определим множество начальных позиций $X^{(0)}=\{(x_1,x_2)\colon x_1^2+x_2^2\le 1\}$.

Теперь перейдем к рассмотрению системы (14) на предмет выполнения условий 1)–5). Прежде всего, запишем систему (14) в матричной форме

$$\dot{x}(t)=f(x(t))+u(t), \quad (15)$$

где $x(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}$, $f(x)=\begin{pmatrix}x_2\\ -\sin x_1\end{pmatrix}$, $u(t)=\begin{pmatrix}0\\ u_2(t)\end{pmatrix}\in P$,

$$P=\{u=(u_1,u_2)\colon u_1=0,u_2\in[-1,1]\}.$$

Поскольку P не является сильно выпуклым множеством, то теорема 2 не применима к системе (14).

3.2. Пример 2

Модифицируем систему (14) так, чтобы она полностью удовлетворяла условиям 1)–5). Для этого заменим ограничение P на управление u на множество $\hat{P} = \{u = (u_1, u_2) \colon u_1^2 + u_2^2 \leq 1\}$. Тогда $r_{\hat{P}} = 1$.

Далее, находим

$$f'_x = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\cos(x_1) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим получившуюся матрицу f'_x через $\mathscr{A}$. Спектральная норма производной f'_x, подчиненная евклидовой векторной норме, равна

$$\|f'_x\| = \|\mathscr{A}\| = \sup_{\|x\|=1} \sqrt{(\mathscr{A}x, \mathscr{A}x)} = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathscr{A}^*\mathscr{A})},$$

где $\mathscr{A}^* = \bar{\mathscr{A}}^t$ – матрица, сопряженная к матрице $\mathscr{A}$, $\lambda_{\max}(\mathscr{A}^*\mathscr{A})$ – максимальное собственное значение произведения матриц $\mathscr{A}^*\mathscr{A}$.

Последовательно находим

$$\mathscr{A}^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{A}^*\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 x_1 \end{pmatrix},$$

$$\|\mathscr{A}^*\mathscr{A} - \lambda E\| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & \cos^2 x_1 - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(\cos^2 x_1 - 1), \quad \lambda_{\max}(\mathscr{A}^*\mathscr{A}) = 1.$$

Отсюда, $\|f'_x\| = 1$ в любой точке из $\mathbb{R}^2$. Следовательно, в качестве ограничивающей норму производной константы можно взять $M = 1$.

Константа Липшица L должна удовлетворять условию

$$\| f'_x(t,x) - f'_y(t,y) \| \leq L\|x - y\|,$$

где $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

Полагаем

$$\mathscr{B} = f'_x(t,x) - f'_y(t,y) = \begin{pmatrix} 0 & \cos(y_1) - \cos(x_1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Находим

$$\mathscr{B}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \cos(y_1) - \cos(x_1) & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathscr{B}^*\mathscr{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (\cos(y_1) - \cos(x_1))^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что $\lambda_{\max}(\mathscr{B}^*\mathscr{B}) = (\cos(y_1) - \cos(x_1))^2 \leq (y_1 - x_1)^2$, т.е. $\|\mathscr{B}\| \leq \|x - y\|$. Отсюда следует, что $L = 1$.

Поскольку начальное множество $X^{(0)}$ выпукло, то $R_0 = \infty$.

Далее находим по формуле (8) величину

$$\hat{R} = \left(\frac{L}{6M} + \frac{1}{R_0}\right)^{-1} \exp(-6M(T - t_0)) = 6\,e^{-6(T-t_0)}.$$

Неравенство $r_P \leq M\hat{R}$, необходимое для применения теоремы 2, будет выполняться при $T - t_0 \leq$ $\leq \frac{1}{6}\ln 6 = 0.2986...$

Наконец, применяя теорему 2, получаем оценку

$$\alpha \leq \arccos\left(1 - \frac{(e^{T-t_0} + \hat{R}(e^{T-t_0} - 1))^2}{2\hat{R}^2}\right) =$$

$$= \arccos\left(1 - \frac{(e^{7(T-t_0)} + 6(e^{T-t_0} - 1))^2}{72}\right).$$

Заметим, что величина

$$1 - \frac{(e^{7(T-t_0)} + 6(e^{T-t_0} - 1))^2}{72} < -1$$

только при $T - t_0 > 0.3245...$, т.е. действие оценки прекращается из-за нарушения условия 5) раньше, чем аргумент арккосинуса выйдет из области определения арккосинуса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе получена оценка роста меры невыпуклости α множества достижимости для определенного класса управляемых систем, линейных по управлению. Это фактически первая оценка подобного рода и довольно грубая. В качестве возможных направлений дальнейших исследований наметим построение более тонких оценок для управляемых систем в фазовых пространствах большей размерности и прогнозирование меры невыпуклости α множеств достижимости для более широких классов управляемых систем.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18–01–00221 А.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Успенский А.А., Ушаков В.Н., Фомин А.Н.* α-множества и их свойства / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2004. 62 с. Деп. в ВИНИТИ 02.04.2004, № 543-В2004.
2. *Иванов Г.Е.* Слабо выпуклые множества и функции: теория и приложения. М.: Физматлит, 2006. 352 с.

3. *Зелинский Ю.Б.* Выпуклость. Избранные главы. Киев: Институт математики НАН Украины, 2012. 280 с.
4. *Michael E.* Paraconvex sets // Mathematica Scandinavica. 1959. V. 7. № 2. P. 312–315.
5. *Ngai H.V., Penot J.-P.* Paraconvex functions and paraconvex sets // Studia Mathematica. 2008. V. 184. № 1. P. 1–29.
6. *Семенов П.В.* Функционально паравыпуклые множества // Матем. заметки. 1993. Т. 54. № 6. С. 74–81.
7. *Иванов Г.Е.* Слабо выпуклые множества и их свойства // Матем. заметки. 2006. Т. 79. № 1. С. 60–86.
8. *Иванов Г.Е., Половинкин Е.С.* Второй порядок сходимости алгоритма вычисления цены линейных дифференциальных игр // ДАН. 1995. Т. 340. № 2. С. 151–154.
9. *Ivanov G.E., Golubev M.O.* Strong and weak convexity in nonlinear differential games // IFAC PapersOnline. 2018. V. 51. Iss. 32. P. 13–18.
10. *Ершов А.А., Кувшинов О.А.* О свойствах пересечения α-множеств // ИМИ УдГУ. 2020. Т. 55. С. 79–92.
11. *Стечкин С.Б., Ефимов Н.В.* Опорные свойства множеств в банаховых пространствах и чебышевские множества // ДАН СССР. 1959. Т. 127. № 2. С. 254–257.
12. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: Мир, 1971. 392 с.
13. *Лизоркин П.И.* Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа. М.: Наука, 1981. 384 с.

ESTIMATION OF THE GROWTH OF THE DEGREE OF NON-CONVEXITY OF REACHABLE SETS IN TERMS OF α-SETS

Corresponding Member of the RAS V. N. Ushakov[a] and A. A. Ershov[a]

[a] *N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation*

In this paper, we study the properties of α-sets, which are one of the generalizations of convex sets. The relationship between α-sets and weakly convex sets is established. An estimate of the growth over time of the nonconvexity measure α of reachable sets is obtained for one class of control systems.

Keywords: generalized convex set, α-set, weak convex set, reachable set, control system