ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 495, с. 91–94

МАТЕМАТИКА

УДК 514.84

КВАНТОВАНИЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

 О. К. Шейнман[1,*]

Представлено академиком РАН С.П. Новиковым 13.08.2020 г.
Поступило 19.08.2020 г.
После доработки 19.08.2020 г.
Принято к публикации 17.09.2020 г.

По интегрируемой системе, заданной представлением Лакса со спектральным параметром на римановой поверхности, строится унитарное проективное представление соответствующей алгебры Ли гамильтоновых векторных полей операторами ковариантных производных по отношению к связности Книжника–Замолодчикова. С физической точки зрения это является предквантованием дираковского типа интегрируемой системы. Одновременно таким образом устанавливается соответствие между интегрируемыми системами рассматриваемого типа и конформными теориями поля. Мы ограничиваемся случаем систем, спектральные кривые которых допускают голоморфную инволюцию. Примеры – системы Хитчина типов B_n, C_n, D_n, а также типа A_n на гиперэллиптических кривых.

Ключевые слова: интегрируемая система, квантование, конформная теория поля, связность Книжника–Замолодчикова

DOI: 10.31857/S2686954320060168

Идея квантования гамильтонианов Хитчина с помощью связности Книжника–Замолодчикова была использована или по крайней мере упомянута в литературе по теоретической физике много раз: Д. Иванов (1996), Фельдер и Вишерковский (1987, G. Felder, Ch. Wieczerkowski), М.А. Ольшанецкий (1997), но лишь для гамильтонианов второго порядка. В [8] было предложено обобщение для всех гамильтонианов и, более того, для всех классических наблюдаемых рассматриваемых систем. Оно опирается на теорию интегрируемых систем, заданных представлением типа Лакса со спектральным параметром на римановой поверхности, предложенную И.М. Кричевером [3] и развитую автором [5, 9, 10], и на глобальный операторный формализм квантования струны [2, 6, 7, 9]. Доказательство унитарности в [8] основано на теореме Пуанкаре об абсолютных инвариантах.

В настоящем сообщении мы рассматриваем системы, спектральные кривые которых допускают голоморфную инволюцию. Примеры – системы Хитчина типов B_n, C_n, D_n, а также типа A_n на гиперэллиптических кривых [11, 12]. Мы существенно используем результаты М. Шлихенмайера о почти градуированных структурах на многоточечных алгебрах Кричевера–Новикова ([6] и ссылки в ней).

В основе нашего подхода, в отличие от уже имеющихся, лежит представление Лакса со спектральным параметром на римановой поверхности. Отношение нашего подхода к подходу Хитчина такое же, как отношение связности Книжника–Замолодчикова к связности Хитчина. В сравнении с квантовыми интегрируемыми системами, мы квантуем полную алгебру наблюдаемых, а не только некоторую ее коммутативную подалгебру.

ЛАКСОВЫ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Пусть задана четверка $\{\Sigma, \Pi, \mathfrak{g}, V\}$, где Σ – компактная неособая риманова поверхность, $\Pi = \{P_1, \ldots, P_N\}$ – множество точек на ней, $\mathfrak{g}$ – полупростая алгебра Ли над $\mathbb{C}$, V – ее точный модуль, G – группа Шевалле, соответствующая паре $\{\mathfrak{g}, V\}$.

Конфигурацией флагов назовем упорядоченное множество $\Gamma = \{\gamma_s \in \Sigma \mid s = 1, \ldots, K\}$, такое что $\Gamma \cap \Pi = \emptyset$, и множество флагов F_s в V, $s = 1, \ldots, K$, ассоциированных с его элементами. Пространством конфигураций флагов назовем множество конфигураций флагов с одним и тем же K, таких

[1] *Математический институт им. В.А.Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия*
**E-mail: sheinman@mi-ras.ru*

что F_s и F_s' принадлежат одной G-орбите в соответствующем пространстве флагов для любого $s = 1,\dots,K$.

По данной конфигурации флагов определим соответствующую алгебру операторов Лакса. Для каждого s определим фильтрацию $\{0\} \subseteq \mathfrak{g}_{s,-k_s} \subseteq \dots \mathfrak{g}_{s,i} \subseteq \mathfrak{g}_{s,i+1} \subseteq \dots \mathfrak{g}_{s,k_s} = \mathfrak{g}$ условием $\mathfrak{g}_{s,i}F_{s,j} \subseteq F_{s,i+j}$ для всех i, j. Пусть $\mathcal{L}$ – пространство мероморфных отображений $L : \Sigma \to \mathfrak{g}$, голоморфных вне $\Pi \cup \Gamma$, и таких что для $s = 1,\dots,K$ в окрестности γ_s

$$L_s(z) = \sum_{i=-k_s}^{\infty} L_{s,i} z^i,$$

где $L_{s,i} \in \mathfrak{g}_{s,i}$ (z – локальная координата в окрестности γ_s).

Определение 1. Линейное пространство $\mathcal{L}$, снабженное структурой поточечного коммутатора, называется *алгеброй операторов Лакса*.

Пучок алгебр операторов Лакса на пространстве конфигураций флагов мы обозначим также $\mathcal{L}$.

Пусть $D = m_1P_1 + \dots + m_NP_N$ – неотрицательный дивизор, $\mathcal{L}^D = \left\{ L \in \mathcal{L} \mid (L) + \sum_{s=1}^{K} k_s\gamma_s + D \geq 0 \right\}$. Очевидно, $\mathcal{L}^D \subset \mathcal{L}$ – подпучок конечного ранга. Группа G действует на тотальном пространстве пучка $\mathcal{L}^D$ следующим образом: $g\{\{\gamma_s, F_s\}, L\} = \{\{\gamma_s, gF_s\}, gLg^{-1}\}$, где $\{\gamma_s, F_s\}$ – конфигурация флагов, представляющая точку базы, L – точка слоя. Фактор-пространство по этому действию: $\mathcal{P}^D = \mathcal{L}^D/G$ служит фазовым пространством определяемой динамической системы. Как правило, мы будем опускать $\{\gamma_s, F_s\}$ в обозначении точки фазового пространства, обозначая ее просто L.

Динамика на фазовом пространстве определяется уравнением Лакса

$$\dot{L} = [L, M],$$

где $M \in \mathrm{Mer}(\Sigma \to \mathfrak{g})$, M голоморфно вне $\Pi \cup \Gamma$, $M_s(z) = \nu_s h_s/z + M_s^-(z) + O(z)$, $M_s^-(z)$ – разложение Лорана того же вида, что и выше, $\nu_s \in \mathbb{C}$, $h_s \in \mathfrak{g}$ – единственный полупростой элемент, оставляющий фильтрацию $\{\mathfrak{g}_{s,i}\}$ инвариантной, и такой, что $\mathrm{ad}\, h_s|_{\mathfrak{g}_{s,i}/\mathfrak{g}_{s,i-1}} = i \cdot \mathrm{id}$. Чтобы уравнение Лакса было замкнутым, необходимо задать M как функцию L [9, 10].

КОНФОРМНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ, СВЯЗАННАЯ С ЛАКСОВОЙ ИНТЕГРИРУЕМОЙ СИСТЕМОЙ

Под конформной теорией поля (CFT) мы понимаем семейство римановых поверхностей, конечномерное расслоение (расслоение конформных блоков) на этом семействе, и проективно плоскую связность на нем (ср. [1]). В качестве этого семейства мы рассматриваем здесь семейство спектральных кривых над фазовым пространством $\mathcal{P}^D$ интегрируемой системы.

Для каждого $L \in \mathcal{P}^D$ кривая Σ_L, заданная уравнением $\det(L(z) - \lambda) = 0$, называется спектральной кривой оператора L.

Пусть Π_L – полный прообраз Π на Σ_L, $\mathcal{A}_L$ – алгебра мероморфных функций на Σ_L, голоморфных вне Π_L, $\mathcal{V}_L$ – алгебра Ли векторных полей на Σ_L с теми же аналитическими свойствами. Обе алгебры относятся к классу алгебр Кричевера–Новикова. С каждым представлением множества Π_L в виде дизъюнктного объединения $\mathrm{In}_L \cup \mathrm{Out}_L$ можно связать структуру почти градуированной алгебры (соответственно, алгебры Ли) на соответствующей алгебре Кричевера–Новикова. Эта структура аналогична градуировке, но предполагает конечный разброс около суммы степеней для мультипликативных операций. Разбиение $\Pi_L = \mathrm{In_L} \cup \mathrm{Out_L}$ определяет также базисы в $\mathcal{A}$ and $\mathcal{V}$, называемые базисами Кричевера–Новикова. Базисный элемент задается точкой $P \in \mathrm{In}_L$ и целым числом i, называемым степенью элемента; мы обозначаем базисные элементы алгебр $\mathcal{A}_L$ и $\mathcal{V}_L$ через $A_{L,P,i}$, $V_{L,P,i}$ соответственно. За подробным изложением теории алгебр Кричевера–Новикова мы отсылаем к [2, 6, 9]. Базисы Кричевера–Новикова можно также определить в пространствах λ-форм на Σ_L для любого $\lambda \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$.

Ниже мы предполагаем, что Σ_L обладает голоморфной инволюцией σ_L, такой, что $\sigma_L\Pi_L = \Pi_L$, и $\sigma_L \mathrm{In}_L = \mathrm{Out}_L$. В частности $|\mathrm{In_L}| = |\mathrm{Out}_L|$. Спектральным кривыми с инволюцией обладают, например, системы Хитчина с калибровочными группами $SO(2n)$, $SO(2n+1)$, $Sp(2n)$, либо системы с группой $SL(n)$ на гиперэллиптических кривых.

Для разбиения $\Pi_L = \mathrm{In}_L \cup \mathrm{Out}_L$ дуальное разбиение, дуальные градуировки и дуальные базисы получаются перестановкой множеств In_L и Out_L. Введенные выше алгебры для дуальной градуировки мы обозначаем $\mathcal{A}_L^*$ и $\mathcal{V}_L^*$. Инволюция σ_L индуцирует два изоморфизма почти градуированных алгебр (соответственно, алгебр Ли): $\sigma_L\colon \mathcal{A}_L \to \mathcal{A}_L^*$ и $\sigma_L\colon \mathcal{V}_L \to \mathcal{V}_L^*$.

Пусть F_L – модуль λ-форм на Σ_L ($\lambda \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$) (над $\mathcal{A}_L$ и $\mathcal{V}_L$), $\mathcal{F}_L = \wedge^{\infty/2} F_L$ – пространство полубесконечных внешних форм на F_L (являющееся вакуумным модулем над $\mathcal{A}_L$ и $\mathcal{V}_L$), F_L^* – контрагредиентный модуль к F_L, $\mathcal{F}_L^*$ – его внешняя полубесконечная степень. Для модуля λ-форм с некоторым разбиением множества Π_L контрагредиентным будет модуль $(1-\lambda)$-форм с почти-градуировкой, заданной дуальным разбиением. Базисы Кричевера–Новикова модулей λ- и $(1-\lambda)$-форм оказываются дуальными по отношению к спариванию, заданному формой $(\omega_\lambda, \omega_{1-\lambda}) = \sum_{P\in \mathrm{In}} \mathrm{res}_P \omega_\lambda \cdot \omega_{1-\lambda}$ (здесь сумма по In может быть заменена суммой по Out с одновременной заменой знака).

Пусть $\{A_{L,P,i} \mid P \in \mathrm{In}_L, i \in \mathbb{Z}\}$ – базис Кричевера–Новикова в $\mathcal{A}_L$, $\{\omega_{L,P}^j \mid P \in \mathrm{In}_L, j \in \mathbb{Z}\}$ – дуальный базис 1-форм на Σ_L (также мероморфных, и голоморфных вне Π_L) по отношению к спариванию $\langle A, \omega\rangle = \sum_{Q\in \mathrm{Out}_L} \mathrm{res}_Q A\omega$. Пусть $u(A)$ – оператор представления элемента $A \in \mathcal{A}_L$ в пространстве $\mathcal{F}_L$. Определим тензор энергии-импульса E как

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i,j=-\infty}\ \sum_{P,P'\in \mathrm{In}_L} :u(A_{L,P,i})u(A_{L,P',j}): \omega_{L,P}^i \omega_{L,P'}^j,$$

где двоеточия обозначают нормальное упорядочение. E является операторно-значным квадратичным дифференциалом на Σ_L. Для каждого $v \in \mathcal{V}_L$ положим

$$T(v) = \nu \cdot \sum_{Q\in \mathrm{Out}_L} \mathrm{res}_Q(E\cdot v),$$

где ν – нормировочная константа.

Теорема 1. *Отображение $T\colon v \to T(v)$ задает проективное представление алгебры Ли $\mathcal{V}_L$:*

$$T([v,v']) = [T(v), T(v')] + \eta'(v,v')\cdot \mathrm{id},$$

(*где η' – 2-коцикл на $\mathcal{V}_L$*), *связанное с представлением и алгебры $\mathcal{A}_L$ следующим образом*:

$$[T(v), u(A)] = u(\partial_v A)$$

для любых $v \in \mathcal{V}_L$, $A \in \mathcal{A}_L$.

T называется представлением Сугавары.

КОНФОРМНЫЕ БЛОКИ И ПРОЕКТИВНО-ПЛОСКАЯ СВЯЗНОСТЬ

Пусть X – касательный вектор к $\mathcal{P}^D$ в точке L, ρ_L – коцикл, представляющий класс Кодаиры–Спенсера в $H^1(\Sigma_L, T\Sigma_L)$, где $T\Sigma_L$ – касательный пучок на Σ_L. Коцикл ρ_L определяется соотношением $\rho_L(X) = d_L^{-1}\partial_X d_L$, где d_L – функция склейки в кольцевой окрестности любого подмножества точек в Out_L. Очевидно, $\rho_L(X)$ является локальным векторным полем на Σ_L. В [7, 9] показано, что это векторное поле может быть продолжено до элемента алгебры Ли $\mathcal{V}_L$, а произвол в выборе d_L компенсируется переходом к пучку конформных блоков, который мы сейчас определим.

Рассмотрим пучок $\mathcal{A}_L$-модулей $\mathcal{F}_L$ на $\mathcal{P}^D$. Пусть $\mathcal{A}_L^{reg} \subset \mathcal{A}_L$ – подалгебра функций, регулярных в точках множества Out_L. Пучок $\mathcal{C}$ фактор-пространств $\mathcal{F}_L/\mathcal{A}_L^{reg}\mathcal{F}_L$ на $\mathcal{P}^D$ называется пучком конформных блоков (коинвариантов). Вместе с ним рассматривается пучок $\mathcal{C}^*$ дуальных конформных блоков, который соответствует дуальному модулю $\mathcal{F}_L^*$ и алгебре $\mathcal{A}_L^{*reg}$: $\mathcal{C}^* = \mathcal{F}_L^*/\mathcal{A}_L^{*reg}\mathcal{F}_L^*$. Пусть

$$\nabla_X = \partial_X + T(\rho_L(X)).$$

Теорема 2. *Операторы ∇_X определяют проективно-плоскую связность на пучке коинвариантов*:

$$[\nabla_X, \nabla_Y] = \nabla_{[X,Y]} + \lambda(X,Y)\cdot \mathrm{id},$$

где λ – коцикл на алгебре Ли касательных векторных полей к $\mathcal{P}^D$, id – *тождественный оператор*.

Доказательство аналогично приведенному в [6, 7, 9]. Мы называем определенную здесь связность ∇ связностью Книжника–Замолодчикова.

КВАНТОВАНИЕ КОММУТИРУЮЩИХ ГАМИЛЬТОНИАНОВ

Пусть ω – симплектическая структура Кричевера–Фонга на $\mathcal{P}^D$ [3, 9, 10], $f \to X_f$ – определяемый ей гомоморфизм пуассоновой алгебры классических наблюдаемых лаксовой интегрируемой системы в алгебру Ли гамильтоновых векторных полей на $\mathcal{P}^D$. Тогда по теореме 2 $f \to \nabla_{X_f}$ – это проективное представление пуассоновой алгебры наблюдаемых в пространстве сечений пучка конформных блоков.

Теорема 3 [8–10]. *Если* $\{f,g\} = 0$, *то* $[\nabla_{X_f}, \nabla_{X_g}] = \lambda(X_f, X_g)\cdot \mathrm{id}$. *Если f, g зависят только от переменных действия*, *то* $[\nabla_{X_f}, \nabla_{X_g}] = 0$.

УНИТАРНОСТЬ

Определим эрмитово скалярное произведение на пространстве сечений пучка $\mathcal{C}$, такое что операторы ∇_X станут кососимметрическими для всех гамильтоновых векторных полей X на $\mathcal{P}^D$.

Над каждой точкой $L \in \mathcal{P}^D$ введем эрмитово спаривание между $\mathcal{F}_L$ и $\mathcal{F}_L^*$, полагая

$$(f_{i_1} \wedge f_{i_2} \wedge \ldots \mid f_{j_1}^* \wedge f_{j_2}^* \wedge \ldots)_L = \delta_{i_1 j_1} \ldots \delta_{i_n j_n},$$

где $\{f_i\}$, $\{f_j^*\}$ – дуальные базисы Кричевера–Новикова в F_L и F_L^* соответственно, n – номер внешнего сомножителя, начиная с которого оба полубесконечных монома стабилизируются, δ_{ij} – символ Кронекера. Определим линейный оператор σ_L: $\mathcal{F}_L \to \mathcal{F}_L^*$ соотношением σ_L: $f_{i_1} \wedge f_{i_2} \wedge \ldots \to f_{i_1}^* \wedge f_{i_2}^* \wedge \ldots$ Тогда $\langle \phi_1, \phi_2 \rangle_L = (\phi_1 \mid \sigma_L \phi_2)_L$, $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{F}_L$ – невырожденная эрмитова билинейная форма на $\mathcal{F}_L$ (в двухточечном случае ($|\mathrm{In}| = |\mathrm{Out}| = 1$) определена в [2], в многоточечном случае – в [6]).

Г и п о т е з а. Относительно введенной билинейной формы операторы Сугавары $T(v)$ эрмитовы.

В [2] гипотеза доказана для произвольного рода в двухточечном случае. Обобщение на многоточечный случай представляется делом техники.

Форма $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ дает корректно определенное скалярное произведение на коинвариантах.

Для пары сечений s_1, s_2 пучка $\mathcal{C}$ положим

$$\langle s_1, s_2 \rangle = \int_{\mathcal{P}^D} \langle s_1, s_2 \rangle_L \frac{\omega^p}{p!}, \quad p = \frac{1}{2} \dim \mathcal{P}^D.$$

Пусть $\mathcal{L}^2(\mathcal{C}, \omega^p/p!)$ – пространство сечений пучка $\mathcal{C}$, интегрируемых с квадратом по отношению к симплектическому объему на $\mathcal{P}^D$.

Т е о р е м а 4. *Для каждого гамильтонова векторного поля X на $\mathcal{P}^D$ оператор ∇_X в пространстве гладких сечений в $\mathcal{L}^2(\mathcal{C}, \omega^p/p!)$ косоэрмитов.*

З а м е ч а н и е. Мы формулируем теорему по модулю сформулированной выше гипотезы.

Полная версия данной работы будет опубликована в Трудах международного математического центра им. С. Банаха в Польше.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20–01–00157).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Friedan D., Shenker S.* // Nuclear Phys. 1987. V. B281. P. 509–545.
2. *Кричевер И.М., Новиков С.П.* // Функц. анализ и его прил. 1987. Т. 21. № 4. С. 47–61.
3. *Krichever I.M.* // Comm. Math. Phys. 2002. V. 229. P. 229–269.
4. *Krichever I.M., Phong D.H.* // Surveys in Differential Geometry. 1998. V. IV. P. 239–313.
5. *Кричевер И.М., Шейнман О.К.* // Функц. анализ и его прил. 2007. Т. 41. № 4. С. 46–59.
6. *Schlichenmaier M.* // Krichever–Novikov type algebras. Theory and applications. De Gruyter Studies in Mathematics 53. B.; Boston: Walter de Gruyter Gmbh, 2014. 360 p.
7. *Шлихенмайер М., Шейнман О.К.* // УМН. 2004. Т. 59. № 4 (358). С. 147–180.
8. *Sheinman O.K.* // Proc. Workshop on Geometric Methods in Physics. Birkhauser, 2012.
9. *Sheinman O.K.* // Current algebras on Riemann surfaces. De Gruyter Expositions in Mathematics, 58. B.; Boston: Walter de Gruyter GmbH, 2012. 150 p.
10. *Шейнман О.К.* // УМН. 2016. Т. 71. № 1. С. 117–168.
11. *Шейнман О.К.* // Функц. анализ и его прил. 2019. Т. 53. № 4. С. 63–78.
12. *Борисова П.И., Шейнман О.К.* // Тр. МИАН. 2020. Т. 311.

QUANTIZATION OF INTEGRABLE SYSTEMS WITH SPECTRAL PARAMETER ON A RIEMANN SURFACE

O. K. Sheinman[a]

[a] *Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS S.P. Novikov

An integrable system given by a Lax representation with spectral parameter on a Riemann surface is assigned with a unitary projective representation of the corresponding Lie algebra of Hamiltonian vector fields by means operators of covariant derivatives with respect to the Knizhnik–Zamolodchikov connection. It is a Dirac-type prequantization of the integrable system from the physical point of view. Simultaneously, it establishes a correspondence between integrable systems in question and Conformal Field Theories. In the present paper, we focus on the systems whose spectral curves possess a holomorphic involution. Examples are represented by Hitchin systems of the types B_n, C_n, D_n, and also of the type A_n on hyperelliptic curves.

Keywords: integrable system, quantization, conformal field theory, Knizhnik–Zamolodchikov connection