ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 495, с. 74–77

МАТЕМАТИКА

УДК 517

О РАЗБИЕНИИ МНОЖЕСТВ НА ЧАСТИ МЕНЬШЕГО ДИАМЕТРА

© 2020 г. А. М. Райгородский[1,2,3,4,*]

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 25.06.2020 г.
Поступило 05.07.2020 г.
После доработки 05.07.2020 г.
Принято к публикации 17.09.2020 г.

Изучено важное обобщение классической проблемы Борсука о разбиении множеств на части меньшего диаметра. Найдены новые верхние и нижние оценки для чисел Борсука.

Ключевые слова: разбиение, раскраска, точечные множества в пространствах, граф диаметров

DOI: 10.31857/S2686954320060156

Настоящая работа посвящена одному важному варианту классической проблемы Борсука о разбиении множеств на части меньшего диаметра (см. [1]).

Пусть $b \in (0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$. Определим величину $\chi(n, b)$ как минимальное количество частей диаметра строго меньше b, на которые может быть разбито произвольное множество диаметра 1 в пространстве $\mathbb{R}^n$. При $b = 1$ получаем в точности классическое число Борсука, про которое известно, что $\chi(1, 1) = 2$, $\chi(2, 1) = 3$, $\chi(3, 1) = 4$,

$$\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{2}} + o(1)\right)^{\sqrt{n}} \le \chi(n, 1) \le \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + o(1)\right)^n \qquad (1)$$

(см. [1, 2]). При малых n и различных b множество результатов и ссылок можно найти в [1] и [3].

Нас будет интересовать случай, когда $n \to \infty$, а $b = b(n)$. В этом случае все известные верхние оценки экспоненциальны по n. Например, из работы Роджерса об упаковках сферических шапочек на сфере (см. [4]) следует неравенство

$$\chi(n, b) \le \left(\frac{\sqrt{2}}{b} + o(1)\right)^n.$$

Величину $\frac{\sqrt{2}}{b}$ можно уменьшить, применяя технику из работы [5].

Намного тоньше устроены нижние оценки. Грубо говоря, мы скоро увидим, что если $b(n) \le c < 1$ при всех n, то и эти оценки экспоненциальны. Если же $b(n) \to 1$ при $n \to \infty$, то оценки становятся субэкспоненциальными, постепенно убывая (с ростом скорости стремления функции b к единице) до вида левой части оценки (1), т.е. асимптотической константы в степени $\sqrt{n}$. Аккуратным формулировкам соответствующих новых результатов и будет посвящена наша дальнейшая работа.

Справедлива следующая

Т е о р е м а 1. *Пусть $k = k(n)$ – произвольная функция со значениями во множестве $\left\{1, \ldots, \frac{n}{2}\right\}$. Рассмотрим для каждого n максимальное целое число $a = a(n)$, с которым $\sqrt{1 - \frac{a(n)}{k(n)}} \ge b(n)$. Пусть $m(n, r, s)$ – максимальная мощность совокупности r-элементных подмножеств множества $\mathcal{R}_n = \{1, \ldots, n\}$, в которой каждые два множества имеют не менее s общих элементов. Тогда*

[1] *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия*
[2] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[3] *Кавказский математический центр Адыгейского государственного университета, Майкоп, Россия*
[4] *Институт математики и информатики Бурятского государственного университета, Улан-Удэ, Россия*
[*] *E-mail: mraigor@yandex.ru*

$$\chi(n, b(n)) \geq \frac{C_n^{k(n)}}{m(n, k(n), a(n)+1)}.$$

Величина $m(n,r,s)$ найдена при всех n, r, s. Сформулируем для полноты картины соответствующий результат (см. [6]).

Теорема 2 (П. Франкл, Р.М. Уилсон, Р. Алсведе, Л. Хачатрян). *Пусть* $2r - n < s$, $1 \leq s \leq r \leq n$. *Пусть, кроме того, при* $0 \leq i \leq \frac{n-s}{2}$ *и* $i \leq r - s$ *определена совокупность*

$$\mathcal{M}_i(n,r,s) = \\ = \{M \subseteq \mathcal{R}_n: |M| = r, |M \cap \{1, \ldots, s+2i\}| \geq s+i\},$$

т.е. $\mathcal{M}_i(n,r,s)$ *— это совокупность всех возможных* r*-элементных подмножеств множества* $\mathcal{R}_n$, *у которых не менее* $s + i$ *элементов взято из* $\{1, \ldots, \ldots, s+2i\} \subseteq \mathcal{R}_n$. *Если при некотором* $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *выполнено соотношение*

$$(r-s+1)\left(2+\frac{s-1}{l+1}\right) \leq n < (r-s+1)\left(2+\frac{s-1}{l}\right),$$

то $m(n,r,s) = |\mathcal{M}_l(n,r,s)|$ $\left(\text{мы считаем, что } \frac{s-1}{l} = \infty, \text{ коль скоро } l = 0\right)$.

Теорема 1 допускает уточнение.

Теорема 3. *Пусть* $k_{-1} = k_{-1}(n)$, $k_0 = k_0(n)$, $k_1 = k_1(n)$ *— произвольные функции со значениями во множестве* $\mathcal{R}_n$, *удовлетворяющие соотношениям*

$$k_{-1}(n) + k_0(n) + k_1(n) = n,$$
$$k_{-1}(n) + k_1(n) \leq \frac{n}{2}, \quad k_{-1}(n) \leq k_1(n).$$

Рассмотрим для каждого n *максимальное целое число* $a = a(n)$, *с которым*

$$\sqrt{\frac{k_1(n) + k_{-1}(n) - a(n)}{k_1(n) + 3k_{-1}(n)}} \geq b(n).$$

Пусть $f(n, k_{-1}, k_0, k_1, s)$ *— максимальная мощность совокупности* $(-1, 0, 1)$*-векторов в* $\mathbb{R}^n$, *в которой каждый вектор имеет ровно* k_i, $i \in \{-1, 0, 1\}$, *координат величины* i *и в которой скалярное произведение любых двух векторов не меньше* s. *Тогда*

$$\chi(n, b(n)) \geq \frac{C_n^{k_1(n)} C_{n-k_1(n)}^{k_{-1}(n)}}{f(n, k_{-1}(n), k_0(n), k_1(n), a(n)+1)}.$$

Суть уточнения в том, что при $k_{-1}(n)$, тождественно равной нулю, мы получаем в точности теорему 1: когда у векторов остаются только нулевые и единичные координаты, их скалярное произведение равно мощности пересечения множеств их единичных координат. Конечно, можно было бы давать еще более громоздкие обобщения, добавляя все новые и новые величины координат. Однако проблема в том, что даже величина $f(n, k_{-1}, k_0, k_1, s)$ в общем случае с трудом поддается оцениванию, но для нее оценки все же есть и они позволяют в ряде ситуаций уточнять теорему 1. Для других подобных величин известно крайне мало, и мы не видим смысла рассматривать их в текущем контексте.

Что касается оценок величины $f(n, k_{-1}, k_0, k_1, s)$, то тут есть, во-первых, гипотеза о ее точном значении, сформулированная в работе [7]. Также есть ряд недавних результатов Франкла и Купавского (см. [8]) и смежных результатов разных авторов (см. [9–15]). Но одним из наиболее эффективных инструментов здесь по-прежнему остается линейно-алгебраический метод (см. [1, 2, 12–15]). С его помощью можно доказать следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть даны все параметры из формулировки теоремы* 3. *Пусть* $q = q(n)$ *— минимальное число, равное степени простого, с которым выполнено неравенство* $k_{-1}(n) + k_1(n) - q(n) \leq a(n)$. *Тогда*

$$f(n, k_{-1}(n), k_0(n), k_1(n), a(n)+1) \leq \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} C_n^i C_{n-i}^j,$$

где

$$\mathcal{A} = \{(i,j): i + 2j \in \{q(n)-2, q(n)-1\}\}.$$

Можно произвести достаточно стандартный асимптотический анализ оценок из теорем 1 и 3. Аккуратная оптимизация затруднена, в том числе из-за того, что в теореме 4 оценка зависит от распределения простых в натуральном ряде. Тем не менее, сравнительно легко понять, что если $b(n) \leq c < 1$, где c — константа, то обе теоремы дают оценки вида $(C + o(1))^n$, где $C > 1$. Напротив, обе оценки становятся субэкспоненциальными, коль скоро $b(n) \to 1$ при $n \to \infty$. А если $b(n) = 1$, то обе оценки практически вырождаются, становясь равными n по порядку. Однако мы знаем неравенство (1), и это подсказывает нам, что теоремами 1 и 3 все не исчерпывается. Ниже мы приведем еще две новые теоремы, которые как раз работают в случаях, когда $b(n)$ достаточно быстро стремится к единице.

Теорема 5. *Пусть $d = d(n)$ и $a = a(n)$ таковы, что $d = 4q$, где $q = q(n)$ — степень простого,*

$$n \geq C^2_{d(n)-\lceil a(n)/2 \rceil}, \quad \sqrt{1 - \frac{a^2(n)}{d^2(n)}} \geq b(n).$$

Тогда

$$\chi(n, b(n)) \geq \frac{2^{d(n)-\lceil a(n)/2 \rceil - 2}}{\sum_{i=0}^{q(n)-a(n)-1} C^i_{d(n)-\lceil a(n)/2 \rceil - 1}}.$$

Например, если $b(n) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$, то $d(n) = \Theta(\sqrt{n})$, $a(n) = \Theta(\sqrt[4]{n})$, и оценка теоремы 5 становится похожа на нижнюю оценку в (1). Чем ближе $b(n)$ к тождественной единице, тем ближе $a(n)$ к нулю. При $a(n) = 0$ оценка теоремы 5 при огрублении в стиле неравенства (1) превращается с учетом формулы Стирлинга и плотности простых в натуральном ряде в неравенство

$$\chi(n, 1) \geq \left(2\left(\frac{1}{4}\right)^{1/4}\left(\frac{3}{4}\right)^{3/4} + o(1)\right)^n =$$

$$= \left(\left(2\left(\frac{1}{4}\right)^{1/4}\left(\frac{3}{4}\right)^{3/4}\right)^{\sqrt{2}} + o(1)\right)^{\sqrt{d}}.$$

Константа под знаком субэкспоненты меньше, чем константа в нижней оценке из (1). Улучшение, приводящее к той же константе, дает последняя теорема.

Теорема 6. *Пусть $d = d(n)$, $q = q(n)$ и $a = a(n)$ таковы, что q — степень простого, $q(n) \leq \frac{d(n)}{2}$,*

$$n \geq C^2_{d(n)+1}, \quad \sqrt{1 - \frac{a^2(n)}{q^2(n)}} \geq b(n).$$

Тогда

$$\chi(n, b(n)) \geq \frac{2^{q(n)-a(n)-1} C^{q(n)}_{d(n)}}{\sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} C^i_{d(n)} C^j_{d(n)-i}},$$

где

$$\mathcal{A} = \{(i, j) : i + 2j \in \{q(n) - a(n) - 2, q(n) - a(n) - 1\}\}.$$

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена за счет гранта РФФИ (проект № 18-01-00355) и гранта Президента НШ-2540.2020.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Raigorodskii A.M.* Cliques and cycles in distance graphs and graphs of diameters // Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics // AMS, Contemporary Mathematics. 2014. V. 625. P. 93–109.
2. *Боголюбский Л.И., Райгородский А.М.* Замечание о нижних оценках хроматических чисел пространств малой размерности с метриками l_1 и l_2 // Матем. Заметки. 2019. Т. 105. № 2. С. 187–213.
3. *Филимонов В.П.* О покрытии множеств в $\mathbb{R}^m$ // Матем. сб. 2014. Т. 205. № 8. С. 95–138.
4. *Rogers C.A.* Covering a sphere with spheres // Mathematika. 1963. V. 10. P. 157–164.
5. *Bourgain J., Lindenstrauss J.* On covering a set in $\mathbb{R}^d$ by balls of the same diameter / Geometric Aspects of Functional Analysis. J. Lindenstrauss and V. Milman, eds. Lecture Notes in Math. 1469, Berlin: Springer-Verlag, 1991. P. 138–144.
6. *Ahlswede R., Khachatrian L.H.* The complete intersection theorem for systems of finite sets // Europ. J. Combin. 1997. V. 18. P. 125–136.
7. *Райгородский А.М., Харламова А.А.* О совокупностях (–1, 0, 1)-векторов с запретами на величины попарных скалярных произведений / Труды по векторному и тензорному анализу. Т. 29. М.: Изд-во МГУ, 2013. С. 130–146.
8. *Frankl P., Kupavskii A.* Erdős–Ko–Rado theorem for $\{0, \pm 1\}$-vectors // J. Comb. Theory Ser. A. 2018. V. 155. P. 157–179.
9. *Frankl P., Kupavskii A.* Incompatible intersection properties // Combinatorica. 2019. V. 39. № 6. P. 1255–1266.
10. *Kupavskii A.* Degree versions of theorems on intersecting families via stability // J. Comb. Theory Ser. A. 2019. V. 168. P. 272–287.
11. *Купавский А.Б., Сагдеев А.А.* Теория Рамсея в пространстве с чебышевской метрикой // УМН. 2020. Т. 75. № 5 (455). С. 191–192.
12. *Бобу А.В., Куприянов А.Э., Райгородский А.М.* Об одном обобщении кнезеровских графов // Матем. заметки. 2020. Т. 107. № 3. С. 351–365.
13. *Raigorodskii A.M., Sagdeev A.A.* On a Frankl–Wilson theorem and its geometric corollaries // Acta Math. Univ. Comenianae. 2019. V. 88. № 3. P. 1029–1033.
14. *Райгородский А.М., Шишунов Е.Д.* О числах независимости некоторых дистанционных графов с вершинами в $\{-1, 0, 1\}^n$ // ДАН. 2019. Т. 485. № 3. С. 269–271.
15. *Пушняков Ф.А., Райгородский А.М.* Оценка числа ребер в особых подграфах некоторого дистанционного графа // Матем. заметки. 2020. Т. 107. № 2. С. 286–298.

ON THE DIVIDING SETS INTO PARTS OF SMALLER DIAMETER

A. M. Raigorodskii[a,b,c,d]

[a] *Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Moscow region, Russian Federation*

[b] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

[c] *Institute of Mathematics and Computer Science, Adygya State University, Caucasus Mathematics Center, Maykop, Russian Federation*

[d] *Institute of Mathematics and Informatics, Buryat State University, Ulan-Ude, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

An important generalization is studied of a classical Borsuk's problem on dividing sets into parts of smaller diameter. Upper new and lower bounds for Borsuk's numbers are found.

Keywords: partition, coloring, point sets in spaces, graph of diameters