

ПРОБЛЕМА КОНЦЕНТРАЦИЙ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ВЯЗКОГО ГАЗА

© 2020 г. Член-корреспондент РАН П. И. Плотников^{1,2,*}

Поступило 31.08.2020 г.

После доработки 31.08.2020 г.

Принято к публикации 12.09.2020 г.

Рассматривается трехмерная начально-краевая задача для изэнтропических уравнений динамики вязкого газа. Проблема концентраций состоит в том, что при значениях показателя адиабаты $\gamma \leq 3/2$ конечная энергия газа может концентрироваться в сколь угодно малых областях. В работе доказывается, что в критическом случае $\gamma = 3/2$ норма плотности кинетической энергии в подходящем логарифмическом пространстве Лоренца ограничена величиной, зависящей только от граничных и начальных данных. Это исключает возможность появления концентраций кинетической энергии.

Ключевые слова: уравнения Навье–Стокса, вязкий газ, проблема концентраций

DOI: 10.31857/S2686954320060120

1. В работе исследуется нестационарная трехмерная начально-краевая задача для уравнений Навье–Стокса динамики вязкого газа. Современная теория гарантирует существование слабых решений для значений показателя адиабаты γ , больших некоторого критического. В трехмерном случае это значение равно $3/2$. В настоящем сообщении мы дадим анализ критического случая. Далее будем предполагать, что газ занимает ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей класса C^3 . Состояние газа полностью характеризуется его плотностью $\varrho(x, t)$ и скоростью $\mathbf{u}(x, t)$. Задача состоит в отыскании функций ϱ и $\mathbf{u}$, удовлетворяющих в цилиндре $Q_T = \Omega \times (0, T)$ следующим уравнениям, граничным и начальным условиям:

$$\begin{aligned} \partial_t(\varrho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla \varrho^\gamma &= \\ = \operatorname{div} \mathbb{S}(\mathbf{u}) + \varrho \mathbf{f} &\quad \text{в } Q_T, \end{aligned} \quad (1a)$$

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u}) = 0, \quad \varrho \geq 0 \quad \text{в } Q_T, \quad (1б)$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T), \quad (1в)$$

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), \quad \varrho(x, 0) = \varrho_0(x) > 0 \quad \text{в } \Omega. \quad (1г)$$

Здесь тензор вязких напряжений $\mathbb{S}(\mathbf{u})$ имеет вид

$$\mathbb{S}(\mathbf{u}) = \nu_1(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) + \nu_2 \operatorname{div} \mathbf{u} \mathbb{I}, \quad (1д)$$

ν_i — положительные коэффициенты вязкости.

Функция давления ϱ^γ может быть заменена на любую монотонную дифференцируемую функцию $p(\varrho)$, допускающую оценку $c^{-1}\varrho^\gamma \leq p(\varrho) \leq c\varrho^\gamma$ для всех достаточно больших ϱ . Далее предполагается, что заданные функции $\varrho_0, \mathbf{u}_0 \in L^\infty(\Omega)$ и $\mathbf{f} \in L^\infty(Q_T)$ допускают оценки

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_0\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} + \|\varrho_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\mathbf{f}\|_{L^\infty(Q_T)} &\leq c_e, \\ \varrho_0 &> c_e^{-1} > 0, \end{aligned} \quad (2)$$

в которых c_e — положительная постоянная. Первые нелокальные результаты в математической теории уравнений Навье–Стокса сжимаемой жидкости были получены П.Л. Лионсом. В монографии [1] он доказал существование ренормализованных решений задачи (1) для всех $\gamma > 9/5$. Позднее Фейрейзл, Новотный и Пельжетова в статье [2] доказали существование решений для всех $\gamma > 3/2$ в трехмерном случае и $\gamma > 1$ двумерном случае. Мы также упомянем монографию Новотного и Страшкрабы [3], в которой дано подробное изложение вопроса. Полученные результаты позволили включить в теорию случай одноатомных газов. Для случаев двухатомных и многоатомных газов вопрос о разрешимости задачи (1) остается открытым. Вопрос о существовании решений для критических и субкритических значений γ был поставлен в работе П.Л. Лионса [4]. Для двумерных течений эта задача была решена в [5]. Поэтому далее мы будем рассматривать трехмер-

¹ Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева
Сибирского отделения Российской академии наук,
Новосибирск, Россия

² Воронежский государственный университет,
Воронеж, Россия

*E-mail: piplovnikov@mail.ru

ные течения. Основная трудность связана с так называемой проблемой концентраций, см. [1, гл. 6.6]. Используя результаты работы [2], можно построить семейство приближенных решений, удовлетворяющих модифицированному уравнению баланса импульса

$$\begin{aligned} \partial_t(\varrho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p_\varepsilon(\varrho) = \\ = \operatorname{div} \mathbb{S}(\mathbf{u}) + \varrho \mathbf{f} \quad \text{в } Q_T, \end{aligned} \quad (3)$$

уравнению баланса массы (1б) и условиям (1в), (1г). Здесь модифицированная функция давления имеет вид $p_\varepsilon(\varrho) = \varrho^\gamma + \varepsilon \varrho^3$. Согласно [2], построенное решение модифицированной задачи допускает энергетическую оценку

$$\operatorname{ess\,sup}_{t \in (0,T)} \int_{\Omega} \{ \varrho |\mathbf{u}|^2 + \varrho^\gamma + \varepsilon \varrho^3 \}(x,t) dx + \int_{Q_T} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx dt \leq c. \quad (4)$$

Здесь и далее через c обозначаются несущественные постоянные, зависящие только от данных задачи. Это решение является слабым и определяется интегральными тождествами

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} (\varrho \mathbf{u} \cdot \partial_t \xi) dx dt + \\ + \int_{Q_T} (\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p_\varepsilon(\varrho) \mathbb{I} - \mathbb{S}(\mathbf{u})) : \nabla \xi dx dt + \\ + \int_{Q_T} \varrho \mathbf{f} \cdot \xi dx dt + \int_{\Omega} \varrho_0(x) \mathbf{u}_0(x) \cdot \xi(x,0) dx = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\int_{Q_T} (\varrho \partial_t \psi + (\varrho \mathbf{u}) \cdot \nabla \psi) dx dt + \int_{\Omega} (\psi \varrho_0)(x,0) dx = 0, \quad (6)$$

которые выполняются для всех гладких векторных полей $\xi \in C^\infty(Q_T)$, удовлетворяющих условиям $\xi(x,T) = 0$ в области Ω и $\xi = 0$ на $\partial\Omega \times (0,T)$, а также для всех гладких функций ψ , равных нулю при $t = T$. Обозначим решения модифицированной задачи через ϱ_ε и $\mathbf{u}_\varepsilon$. Таким образом, вопрос о разрешимости исходной задачи (1) сводится к вопросу о предельном переходе в тождествах (5), (6) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Заметим, что в критическом случае $\gamma = 3/2$ в силу энергетической оценки и теорем вложения поле импульсов $\varrho \mathbf{u}$ решений модифицированных уравнений равномерно ограничено в пространстве $L^\infty(0,T; L^{6/5}(\Omega))$. Из уравнения баланса массы следует, что в этом случае временные производные функций плотности равномерно ограничены в пространстве $L^\infty(0,T; W^{-1,6/5}(\Omega))$. После перехода к подпоследовательности мы можем считать, что при $\gamma = 3/2$ существуют поля ϱ , $\mathbf{u}$ со следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{u} \text{ слабо в } L^2(0,T; W_0^{1,2}(\Omega)), \\ \varrho_\varepsilon \rightharpoonup \varrho * - \text{ слабо в } L^\infty(0,T; L^{3/2}(\Omega)), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \varrho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon \rightharpoonup \varrho \mathbf{u} * - \text{ слабо в } L^\infty(0,T; L^{6/5}(\Omega)) \\ \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Таким образом, вопрос о существовании решений задачи (1) сводится к вопросу о слабой сходимости последовательностей $\varrho_\varepsilon u_{i,\varepsilon} u_{j,\varepsilon}$ и p_ε . Здесь возникает трудность, которая связана с так называемой проблемой концентраций. Она вызвана тем, что при критических и субкритических значениях показателя γ конечная энергия может концентрироваться в сколь угодно малых областях пространства. Дело в том, что в трехмерном случае энергетическая оценка и теоремы вложения гарантируют интегрируемость плотности кинетической энергии $\varrho |\mathbf{u}|^2$ с экспонентой, большей единицы лишь при $\gamma > 3/2$. Следовательно, при $\gamma \leq 3/2$ нам доступна только L^1 — оценка для плотности кинетической энергии. В частности, мы можем утверждать, что для некоторых мер Радона $\mathcal{M}$, π , сосредоточенных в замыкании цилиндра Q_T , выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \varrho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon \otimes \mathbf{u}_\varepsilon \rightarrow \mathcal{M}, \\ p_\varepsilon(\varrho_\varepsilon) \rightarrow \pi^* - \text{слабо в пространстве} \\ \text{мер Радона при } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Для решения проблемы концентраций необходимо доказать, что меры дефекта $\mathcal{M} - \varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$ и $\pi - \varrho^\gamma$ равны нулю. В недавно опубликованной статье Ху [6] были установлены оценки меры Хаусдорфа носителя меры дефекта. В частности, было показано, что в критическом случае концентрации тензора кинетической энергии сосредоточены на множестве хаусдорфовой размерности не выше $3/2$. Мы исследуем этот вопрос для последовательности тензоров кинетической энергии в случае критического значения показателя адиабаты. Следующее утверждение является основным результатом настоящей работы.

Теорема 1. Пусть $\gamma = 3/2$, $0 < \alpha < 8/21$, K — произвольное компактное подмножество цилиндра Q_T . Тогда для любого решения ϱ_ε , $\mathbf{u}_\varepsilon$ модифицированной задачи (4) справедлива оценка

$$\int_K \varrho_\varepsilon |\mathbf{u}_\varepsilon|^2 \log(1 + \varrho_\varepsilon |\mathbf{u}_\varepsilon|^2)^\alpha \leq C, \quad (8)$$

где постоянная C зависит только от K , граничных данных и области Ω . Кроме того, если последовательность ϱ_ε , $\mathbf{u}_\varepsilon$ удовлетворяет соотношениям (7), то для любой функции $h \in C_0^\infty(Q_T)$ выполняется соотношение

$$\int_{Q_T} h \varrho_\varepsilon u_{\varepsilon,i} u_{\varepsilon,j} dx dt \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} h \varrho u_i u_j dx dt \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

2. Для доказательства теоремы 1 достаточно установить справедливость оценки (8). Так как эта оценка является локальной, то удобно свести задачу к случаю, когда решение определено и имеет компактный носитель во всем пространстве $\mathbb{R}^4$. С этой целью выберем любое решение ϱ , $\mathbf{u}$ модифицированной начально-краевой задачи, которое удовлетворяет интегральным тождествам (5), (6) и допускает энергетическую оценку (4). Зафиксируем компакт $K \subseteq Q_T$ и неотрицательную, бесконечно дифференцируемую, финитную функцию $\lambda(x, t)$, $(x, t) \in \mathbb{R}^4$, с носителем, лежащим в цилиндре Q_T , такую, что $\lambda(x, t) = 1$ в окрестности компакта K . Положим

$$\rho(x, t) = \lambda^4(x, t)\varrho(x, t), \quad \mathbf{v}(x, t) = \lambda\mathbf{u}(x, t).$$

Продолжим ρ и $\mathbf{v}$ нулем за пределы цилиндра Q_T на все пространство $\mathbb{R}^4$. Выбирая в качестве тестовых функций в интегральном тождестве (5) векторное поле вида $\lambda^6\xi$, а в интегральном тождестве (6) скалярную тестовую функцию вида $\lambda^5\psi$, придем к интегральным тождествам

$$\int_{\mathbb{R}^4} (\lambda\rho\mathbf{v} \cdot \partial_t \xi + (\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + P\mathbb{I} - \mathbb{T}) : \nabla \xi) dxdt + \int_{\mathbb{R}^4} \mathbf{F} \cdot \xi dxdt = 0, \quad (9)$$

$$\int_{\mathbb{R}^4} (\lambda\rho\partial_t \psi + (\rho\mathbf{v}) \cdot \nabla \psi + G\psi) dxdt = 0, \quad (10)$$

которые справедливы для любых $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^4)$ и $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^4)$. Входящие в эти тождества финитные функции $\mathbb{T}$, P , $\mathbf{F}$ и G допускают оценки

$$\|P\|_{L^1(\mathbb{R}^4)} + \|\mathbf{F}\|_{L^1(\mathbb{R}^4)} + \|G\|_{L^1(\mathbb{R}^4)} + \|\mathbb{T}\|_{L^2(\mathbb{R}^4)} \leq C, \\ P \geq \rho^{3/2}$$

и имеют носители, лежащие в цилиндре Q_T . Подстановка векторных полей

$$\xi = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(x-y)}{|x-y|} \rho(y, t) dy,$$

$$\xi = \int_{|x-y| \geq r} \frac{(x-y)}{|x-y|} \rho(y, t) dy + \frac{1}{r} \int_{|x-y| \leq r} (x-y) \rho(y, t) dy$$

в интегральное тождество (9) и последующее интегрирование полученных равенств по частям с учетом интегрального тождества (10) даст два интегральных соотношения. Вычитание этих соотношений приводит к равенству, которое можно записать в виде обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{r}{a(r)} W'(r) - W(r) - \Phi(r) = 0. \quad (11)$$

Здесь функции W , Φ и коэффициент $a(r) = a^\perp(r)/a^\parallel(r)$ задаются формулами

$$W(r) = \frac{1}{2} \int_0^r \int_{\mathbb{R}^4} \rho(x, t) \frac{1}{s^2} \times \\ \times \left\{ \int_{B(x, s)} (\Pi^\perp(x-y)(\mathbf{v}(x, t) - \mathbf{v}(y, t)))^2 dy \right\} dxdt ds + \\ + 2 \int_0^r \int_{\mathbb{R}^4} P(x, t) \frac{1}{s^2} \left\{ \int_{B(x, s)} \rho(y, t) dy \right\} dxdt ds, \\ \Phi(r) = \int_{\mathbb{R}^4} \rho(x, t) \left\{ \int_{B(x, r)} Q_{ij}(x-y) S_{ij}(y, t) dy \right\} dxdt - \\ - \int_{\mathbb{R}^4} \mathbf{F}(x, t) \cdot \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} D(x-y) \rho(y, t) dy \right\} dxdt - \\ - \int_{\mathbb{R}^4} G(x, t) \cdot \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} D(x-y) (\rho\mathbf{v})(y, t) dy \right\} dxdt, \\ a^\perp = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^4} \rho(x, t) \times \\ \times \left\{ \int_{B(x, r)} \rho(y, t) (\Pi^\perp(x-y)(\mathbf{v}(x, t) - \mathbf{v}(y, t)))^2 dy \right\} dxdt,$$

$$a^\parallel = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^4} \rho(x, t) \times \\ \times \left\{ \int_{B(x, r)} \rho(y, t) (\Pi(x-y)(\mathbf{v}(x, t) - \mathbf{v}(y, t)))^2 dy \right\} dxdt + \\ + \int_{\mathbb{R}^4} P(x, t) \left\{ \int_{B(x, r)} \rho(y, t) dy \right\} dxdt,$$

в которых проекторы определены соотношениями

$$\Pi^\perp(\eta)x = x - \frac{\eta \cdot x}{|\eta|} \eta,$$

$$\Pi(\eta)x = \frac{\eta \cdot x}{|\eta|} \eta \text{ для всех } \eta \neq 0,$$

симметричное ядро D определено равенствами

$$D(x) = (|x|^{-1} - r^{-1})x \quad \text{при } |x| \leq r, \\ D(x) = 0 \quad \text{при } |x| \geq r,$$

а симметричное ядро Q_{ij} обладает следующими свойствами

$$|Q_{ij}(x)| = 0 \quad \text{при } |x| \geq r, \\ |Q_{ij}(x)| \leq c|x|^{-1} \quad \text{при } |x| \leq r.$$

Следующее предложение о решениях уравнения (11) играет ключевую роль при доказательстве основной теоремы 1.

Предложение 1. При сделанных предположениях для каждого $\sigma \in (0, 4/3)$ существуют положительные постоянные τ_σ и c_σ такие, что решение уравнения (11) допускает оценку

$$W(r) \leq c_\sigma |\ln r|^{-\sigma} \quad \text{для всех } r \in (0, \tau_\sigma).$$

Очевидное равенство

$$\begin{aligned} \int_{B(r,x)} \rho(y) |x-y|^{-1} dy &= \frac{1}{r} \int_{B(r,x)} \rho(y, t) dy + \\ &+ \int_0^r \left\{ \frac{1}{s^2} \int_{B(s,x)} \rho(y, t) dy \right\} ds \end{aligned}$$

устанавливает связь между потенциалом Ньютона плотности газа и функцией $W(r)$. Это соотношение вместе с предложением 1 влечет за собой следующее утверждение. Введем в рассмотрение потенциалы

$$\Psi_\mu(x, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|^2} (1 + \|x-y\|)^\mu \varrho^{4/5}(y, t) dy,$$

$$G_\mu(x, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|^2} \varrho^{5/4}(y, t) \log(1 + \varrho(y, t))^\mu dy,$$

$$\Sigma_\mu(x, t) = G_0(1 + |\log G_0|)^\mu,$$

$$G_0(x, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|^2} \varrho^{5/4}(y, t) dy.$$

Лемма 1. Для любого $\mu \in (0, 2/3)$ существует постоянная $C(\mu)$ такая, что

$$\|\Psi_\mu\|_{L^2(\mathbb{R}^4)} + \|G_\mu\|_{L^2(\mathbb{R}^4)} + \|\Sigma_\mu\|_{L^2(\mathbb{R}^4)} \leq C(\mu).$$

Последним шагом на пути к доказательству теоремы 1 является применение следующей оценки для плотности кинетической энергии. Зафиксируем произ-

вольно $\beta \in (0, 1)$ и положим $w = |\mathbf{v}| \log(1 + |\mathbf{v}|)^{5\beta/4}$. Тогда для любого $t \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^4} \rho(t) |\mathbf{v}(t)|^2 \log(1 + \rho(t) |\mathbf{v}(t)|^2)^\beta dx dt &\leq \\ &\leq c \|G_{5\beta/4}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{4/5} \|\mathbf{v}(t)\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}^3)}^2 + \\ &+ c \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho^{5/4}(y, t)}{|x-y|^2} |\nabla w(x, t)| dy dx \right)^{4/5} \|\mathbf{v}(t)\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}^3)}^{6/5}, \end{aligned}$$

которое вместе с оценками леммы 1 и энергетическим неравенством влечет за собой утверждение теоремы 1.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 19-11-00146.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lions P.L. Mathematical topics in fluid dynamics. V. 2. Compressible models. Oxford: Clarendon Press, 1998.
2. Feireisl E., Novotný A., Petzeltová H. // J. of Mathematical Fluid Mechanics. 2001. V. 3. № 3. P. 358–392.
3. Novotný A., Straškraba I. Introduction to the mathematical theory of compressible flow / Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications. V. 27. Oxford: Oxford University Press, 2004.
4. Lions P.L. On some challenging problems in nonlinear partial differential equations / Mathematics: Frontiers and Perspectives. V. Arnold, eds. RI: AMS Providence, 2000. P. 121–135.
5. Plotnikov P.I., Weigant W. // SIAM J. Math. Anal. 2015. V. 47. P. 626–652.
6. Xianpeng Hu // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 2019. V. 234. P. 375–416.

CONCENTRATIONS PROBLEM FOR SOLUTIONS TO COMPRESSIBLE NAVIER–STOKES EQUATIONS

Corresponding Member of the RAS P. I. Plotnikov^{a,b}

^a Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation

^b Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation

A three-dimensional initial-boundary value problem for the isentropic equations of the dynamics of a viscous gas is considered. The concentration problem is that for the values of the adiabatic exponent $\gamma \leq 3/2$, the finite energy can be concentrated on arbitrarily small sets. In this work, it is proved that in the critical case $\gamma = 3/2$ the norm of the density of kinetic energy in the logarithmic Lorentz space is bounded by a constant that depends only on the initial and boundary data. This eliminates the possibility of concentrations formation.

Keywords: Navier–Stokes equations, a viscous gas, concentrations problem