ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 495, с. 78–83

МАТЕМАТИКА

УДК 511.6

О ДЛИНЕ ПЕРИОДА ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ ДРОБИ НАД ЧИСЛОВЫМ ПОЛЕМ

 Г. В. Федоров[1,*]

Представлено академиком РАН В.П. Платоновым 08.10.2020 г.
Поступило 09.10.2020 г.
После доработки 09.10.2020 г.
Принято к публикации 14.10.2020 г.

В классическом случае давно известна связь между условием периодичности непрерывной дроби элемента $\sqrt{f}$ и условием существования фундаментальной единицы соответствующего гиперэллиптического поля $\mathcal{L} = K(x)(\sqrt{f})$, где K – поле характеристики, отличной от 2. Для элемента $\sqrt{f}$ длина периода непрерывной дроби, построенной в поле формальных степенных рядов $K((1/x))$, может быть тривиальным образом оценена сверху удвоенной степенью фундаментальной единицы. Значительно более сложной и интересной является задача о верхней оценке длин периодов других элементов гиперэллиптического поля $\mathcal{L}$, обладающих периодической непрерывной дробью. Среди таких элементов ключевую роль играют элементы вида $\sqrt{f}/x^s$, $s \in \mathbb{Z}$. Для таких элементов длина периода может многократно превосходить удвоенную степень фундаментальной единицы. Найдены верхние оценки на длины периодов некоторых ключевых элементов гиперэллиптических полей $\mathcal{L}$ над числовыми полями K. Найден пример, демонстрирующий точность доказанных верхних оценок.

Ключевые слова: непрерывная дробь, длина периода, фундаментальная единица, гиперэллиптическое поле, циклотомические многочлены, критерий Эйзенштейна

DOI: 10.31857/S2686954320060089

За последние 20 лет теория функциональных непрерывных дробей стала важным арифметическим инструментом в проблеме поиска и построения фундаментальных единиц гиперэллиптического поля. С развитием современных алгебраических и теоретико-числовых методов появился новый взгляд на ряд классических проблем, идущих от обыкновенных числовых непрерывных дробей. Одной из таких проблем является проблема о верхней оценке длин периодов функциональных непрерывных дробей элементов гиперэллиптического поля.

Проблема периодичности функциональных непрерывных дробей, построенных в поле формальных степенных рядов $K((1/x))$ для элементов гиперэллиптического поля $\mathcal{L} = K(x)(\sqrt{f})$, тесно связана с проблемой поиска и построения фундаментальных единиц кольца $D_f = K[x](\sqrt{f}) = \{\omega_1 + \omega_2\sqrt{f} \mid \omega_1, \omega_2 \in K[x]\}$ и проблемой кручения в якобиане J_f соответствующей гиперэллиптической кривой (подробнее см. [1–5]). Символом $\mathcal{L}$ (или L) мы обозначаем гиперэллиптическое поле, которое вкладывается в поле формальных степенных рядов $K((1/x))$ (соответственно $K((1/x)))$, и, тем самым, элементы поля $\mathcal{L}$ (поля L) могут быть разложены в непрерывную дробь, связанную с бесконечным нормированием v_∞ (конечным нормированием v_x). Для эллиптических кривых над полем рациональных чисел проблема кручения была решена Б. Мазуром в 1978 г. Для гиперэллиптических кривых рода 2 и выше над полем рациональных чисел и соответствующих им гиперэллиптических полей приведенные три проблемы остаются открытыми.

Для эллиптических полей над полем констант $K = \mathbb{Q}$ рациональных чисел, заданных свободными от квадратов многочленами f четвертой степени, в [6] был поставлен вопрос о возможной дли-

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
*E-mail: fedorov@mech.math.msu.su

не периода непрерывной дроби $\sqrt{f}$. Используя параметризацию из [7], в статье [8] показано, что длина периода n непрерывной дроби $\sqrt{f}$, построенной в $\mathbb{Q}((1/x))$, принимает одно из значений $\{1, \ldots, 8, 10, 12, 14, 18, 22\}$, причем для каждого значения длины периода из этого множества существует бесконечная серия соответствующих примеров неизоморфных эллиптических полей (см. [9]). Для эллиптических полей над квадратичными полями констант K в [10] доказано, что длина периода непрерывной дроби $\sqrt{f}$ в $\mathbb{Q}((1/x))$ может принимать одно из значений $\{1, \ldots, 15, 17, 18, 22, 26, 30, 34\}$.

В эллиптическом случае над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел в статьях [11, 12] полностью решена проблема классификации многочленов f с периодическим разложением $\sqrt{f}$ в непрерывную дробь в поле формальных степенных рядов $\mathbb{Q}((x))$. В частности, найдено полное описание многочленов $f \in \mathbb{Q}[x]$, $3 \le \deg f \le 4$, с периодическим разложением $\sqrt{f}$ в непрерывную дробь в $\mathbb{Q}((x))$, которое при $\deg f = 3$ с точностью до естественного отношения эквивалентности, заданного допустимыми заменами вида $a^2 f(bx)$, $a, b \in \mathbb{Q}^*$, состоит из одного бесконечного семейства многочленов и еще трех отдельных многочленов, а в случае $\deg f = 4$ — из четырех бесконечных семейств и еще семи отдельных многочленов. Из этого описания явно следуют возможные длины периодов непрерывных дробей элементов $\sqrt{f}$, построенных в $\mathbb{Q}((x))$.

Для получения верхних оценок на длины периодов ключевых элементов вида $\sqrt{f}/x^s$, $s \in \mathbb{Z}$, гиперэллиптического поля $L = K(x)(\sqrt{f})$ важным промежуточным этапом стала теорема 2 [3] о достаточных условия одновременной квазипериодичности непрерывных дробей элементов α, $\alpha \cdot x^s \in L \backslash K(x)$, заданных в поле формальных степенных рядов $K((x))$. Для гиперэллиптических полей $L = K(x)(\sqrt{f})$, построенных с помощью свободных от квадратов многочленов $f \in K[x]$ нечетной степени $2g+1$ достаточные условия также являются необходимыми. В случае $\deg f = 2g + 2$ найденные достаточные условия не являются необходимыми, что подтверждается примерами 1–3 в статье [3]. Одно из наглядных следствий этого случая — значительное отличие длин квазипериодов непрерывных дробей элементов α и $\alpha \cdot x^s$. Так, в примере 4 статьи [3] найден свободный от квадратов многочлен $f \in \mathbb{Q}$ степени 6, для которого в $\mathbb{Q}((x))$ длина периода непрерывной дроби элемента $\alpha = \sqrt{f}/x^3$ равна 2, а длина периода непрерывной дроби элемента $\alpha \cdot x^3 = \sqrt{f}$ равна 18.

В теореме 2 [13] найдено уточнение теоремы 2 [3] над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, а именно, для гиперэллиптических полей $L = \mathbb{Q}(x)(\sqrt{f})$, $\deg f = 2g + 2$, найден точный промежуток значений $s \in \mathbb{Z}$ таких, что непрерывные дроби элементов вида $\sqrt{f}/x^s \in L \backslash \mathbb{Q}(x)$ периодические. Ключевым этапом доказательства было определение рациональных корней последовательности многочленов $T_n, Q_n \in \mathbb{Z}[x]$, заданных для $n \in \mathbb{N}$ следующим образом:

$$T_n(x) = \sum_{0 \le j \le n/2} \binom{n}{2j} x^j, \quad Q_n(x) = \sum_{0 \le j < n/2} \binom{n}{2j+1} x^j. \quad (1)$$

С использованием этих результатов в статье [14] найдены оценки сверху на периоды непрерывных дробей ключевых элементов гиперэллиптических полей над полем рациональных чисел.

В данном сообщении полностью изучена мультипликативная структура над полем $\mathbb{Q}$ последовательности многочленов T_n, Q_n, и тем самым дано описание всех возможных корней многочленов T_n, Q_n для $n \in \mathbb{N}$. На основании этого найдены точные оценки сверху на длины периодов функциональных непрерывных дробей в $K((1/x))$ ключевых элементов $\sqrt{f}/x^s$, $s \in \mathbb{Z}$, гиперэллиптических полей над числовыми полями K. Аналогичные оценки справедливы для длин периодов непрерывных дробей ключевых элементов, построенных в поле формальных степенных рядов $K((x))$.

Мы высказываем предположение, что для периодических элементов гиперэллиптических полей $\mathscr{L}$ над произвольными полями K характеристики 0 длины периодов непрерывных дробей, построенных в $K((1/x))$, ограничены сверху постоянной, зависящей только от рода гиперэллиптического поля $\mathscr{L}$, порядка группы кручения якобиана соответствующей гиперэллиптической кривой и степени расширения $[K_0 : \mathbb{Q}]$, где K_0 — некоторое числовое подполе поля K.

Приведем ряд вспомогательных утверждений, необходимых для поиска корней многочленов T_n, Q_n. Из (1) следует равенство $T_n(x^2) + xQ_n(x^2) = (1 + x)^n$. Отсюда для $n, m \in \mathbb{N}$ и $a \in \mathbb{Q}$ таких, что $T_n(a) \neq 0$, справедливы тождества

$$\begin{gathered} T_{nm}(a) = (T_n(a))^m \cdot T_m(b), \\ Q_{nm}(a) = (T_n(a))^{m-1} \cdot Q_n(a) \cdot Q_m(b), \end{gathered} \quad (2)$$

где $b = a(Q_n(a)/T_n(a))^2$.

П р е д л о ж е н и е 1. 1. *Пусть n нечетно. Тогда*

а) $T_n(x) = x^{\deg Q_n} Q_n(1/x)$;

б) *если* $q|n$, *то* $T_q(x)|T_n(x)$, $Q_q(x)|Q_n(x)$.

2. *Пусть n четно. Тогда*

а) $T_n(x) = x^{\deg T_n} T_n(1/x)$;

б) *если* $n = qd$, q *— нечетное, то* $T_d(x)|T_n(x)$, $Q_q(x)|Q_n(x)$;

в) *если* $n = qd$, d *— четное, то* $T_q(x)|Q_n(x)$.

Доказательство предложения 1 следует из формул (2).

Положим $L(T_n)$ — наименьшее общее кратное многочленов T_d, где $n = qd$ и $q > 1$ нечетное. Положим $P(T_n) = T_n/L(T_n)$ и $\tilde{P}(T_n)(x) = x^d P(T_n)(1/x)$, где $d = \deg P(T_n)(x)$. Отметим, что по предложению 1 при нечетном n справедливо соотношение $\tilde{P}(T_n)|Q_n$, а при четном n справедливо равенство $\tilde{P}(T_n)(x) = P(T_n)(x)$.

П р е д л о ж е н и е 2. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, *тогда многочлены* $P(T_n)$ *и* $\tilde{P}(T_n)$ *неприводимы*.

Доказательство предложения 2 следует из представлений

$$T_n(x^2) = \frac{1}{2}((1 + x)^n + (1 - x)^n),$$
$$Q_n(x^2) = \frac{1}{2x}((1 + x)^n - (1 - x)^n),$$

соответствующих разложений на циклотомические многочлены и критерия Эйзенштейна неприводимости многочленов с целыми коэффициентами.

П р е д л о ж е н и е 3. *Пусть* $n = 2^t q$, *где q нечетно. Тогда справедливы формулы*

$$T_n(x) = \prod_{d|q} P(T_{2^t d})(x),$$

$$Q_n(x) = 2^t \prod_{d|q} \tilde{P}(T_d)(x) \cdot \prod_{r|n}{}' P(T_r)(x),$$

где последнее произведение берется по всем делителям r числа n таким, что n/r четное.

Предложение (3) доказывается по индукции.

Пусть многочлен $f \in K[x]$ свободен от квадратов, $\deg f = 2g + 2$ и $D = \omega^2 f$ является дискриминантом квадратного уравнения $\Lambda_2 y^2 + 2\Lambda_1 y + \Lambda_0 = 0$, где $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2 \in K[x]$ в совокупности взаимно простые многочлены. Пусть элемент $\beta \in \mathcal{L} = K(x)(\sqrt{f})$ является корнем этого квадратного уравнения. Тогда по теореме 2 [15] квазипериодичность непрерывной дроби $\beta = [a_0; a_1, \ldots]$ в $K((1/x))$ эквивалентна наличию решения $\Theta_1, \Theta_2 \in K[x]$, $\Theta_2 \neq 0$, уравнения

$$\Theta_1^2 - \Theta_2^2 D = \gamma \in K^*. \tag{3}$$

Следующая теорема была доказана в статье [14].

Т е о р е м а 1. *Пусть существует решение* Θ_1, $\Theta_2 \in K[x]$, $\Theta_2 \neq 0$, *уравнения* (3). *Тогда длина квазипериода непрерывной дроби элемента* β *не превосходит*

$$\deg \Theta_2 + \max\left(\deg \Lambda_1, \frac{1}{2}(\deg \Lambda_0 + \deg \Lambda_2)\right).$$

Перейдем к основным результатам сообщения.

Т е о р е м а 2. *Элемент* $\beta = \sqrt{f}/x^s \in \mathcal{L}$ *для некоторого* $s \in \mathbb{Z}$ *имеет периодическое разложение в непрерывную дробь тогда и только тогда, когда существуют многочлены* $f_1, f_2, \Omega_3, \Omega_4 \in K[x]$, *которые удовлетворяют условиям*

$$f_2\Omega_4^2 - f_1\Omega_3^2 = 1, \quad f_1 \cdot f_2 = b^2 f,$$
$$\deg f_2 > 0, \quad v_x(f_2) = v_x(\Omega_4) = 0,$$

для некоторого $b \in K^*$ *и* $-v_x(\Omega_3) \leq s \leq v_x(\Omega_3) + v_x(f_1)$. *В случае периодичности непрерывной дроби элемента* β *для длины квазипериода N справедливы оценки*

$$N \leq 2\deg(\Omega_3 + s + 1), \quad \text{если} \quad s + g + 1 \leq \deg f_1,$$
$$N \leq 2\deg(\Omega_3 + \deg f_1 - g),$$
$$\text{если} \quad \deg f_1 < s + g + 1 \leq 2g + 2,$$
$$N \leq 2\deg(\Omega_3 + \deg f_1 + 1 - s), \quad \text{если} \quad g + 1 < s,$$
$$N < 2\deg(\Omega_3 + \deg f_1 - g), \ldots$$

Доказательство теоремы 2 опирается на теорему 1, а также на предложение 2 [3].

Обозначим

$$\delta = \max(0, |g + 1 - s| - 1) + \\ + \max(0, |s + g + 1 - \deg f_1| - 1), \tag{4}$$

тогда оценку теоремы 2 можно записать следующим образом:

$$N \leq 2\deg\Omega_3 + \deg f_1 - \delta.$$

Пусть в поле $\mathcal{L} = K(x)(\sqrt{f})$ существует фундаментальная единица $\Psi_1 + \Psi_2\sqrt{f}$, где $\Psi1$,

$\Psi_2 \in K[x]$. Для $n \in \mathbb{N}$ определим многочлены $\Omega_1^{(n)}, \Omega_2^{(n)} \in K[x]$ так, что

$$\Omega_1^{(n)} + \Omega_2^{(n)}\sqrt{f} = (\Psi_1 + \Psi_2\sqrt{f})^n. \qquad (5)$$

Положим $z = \Psi_2^2 f/\Psi_1^2$, тогда

$$\Omega_1^{(n)} + \Omega_2^{(n)}\sqrt{f} = \Psi_1^n(T_n(z) + Q_n(z)\sqrt{z}), \qquad (6)$$

где многочлены $T_n(z), Q_n(z) \in \mathbb{Z}[z]$ определены в (1).

Для доказательства следующей теоремы нам понадобится еще один вспомогательный результат.

Предложение 4. *Пусть $\beta \in \mathcal{L}$ — квадратичная иррациональность с дискриминантом $D(\beta) = \omega^2 f \in K[x]$. Для того чтобы разложение элемента β в непрерывную дробь в поле $K((1/x))$ было квазипериодично, необходимо и достаточно, чтобы нашелся номер $n \in \mathbb{N}$ такой, что $\omega | \Omega_2^{(n)}$.*

Главный результат работы получен в следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть K — расширение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ степени k. Пусть $f \in K[x]$ — свободный от квадратов многочлен, и в поле $\mathcal{L} = K(x)(\sqrt{f})$ есть фундаментальная единица $u = \Psi_1 + \Psi_2\sqrt{f}$ степени m, где $\Psi_1, \Psi_2 \in K[x]$. Пусть для $n \in \mathbb{N}$ многочлены $\Omega_1^{(n)}, \Omega_2^{(n)} \in K[x]$ определены соотношениями* (5).

1. *Если хотя бы одно из значений $v_x(f)$, $v_x(\Psi_1)$, $v_x(\Psi_2)$ отлично от нуля, то непрерывная дробь элемента $\sqrt{f}/x^s$, построенная в $K((1/x))$, периодическая тогда и только тогда, когда*

$$-v_x(\Psi_1) - v_x(\Psi_2) \le s \le v_x(\Psi_1) + v_x(\Psi_2) + v_x(f).$$

В случае периодичности непрерывной дроби $\sqrt{f}/x^s$ длина квазипериода N не превосходит $m - \delta$, где значение δ определено в (4) *при некотором $f_1 | f$, $\deg f_1 < \deg f$.*

2. *Если $v_x(f) = v_x(\Psi_1) = v_x(\Psi_2) = 0$, то непрерывная дробь элемента $\sqrt{f}/x^s$, построенная в $K((1/x))$, периодическая тогда и только тогда, когда найдется такой номер j, что $v_x(\Omega_2^{(1)}) = \ldots = v_x(\Omega_2^{(j-1)}) = 0$, $|s| \le v_x(\Omega_2^{(j)})$ и $\phi(j) | 2k$. В случае периодичности непрерывной дроби $\sqrt{f}/x^s$, длина квазипериода N не превосходит $jm - \delta$, где значение δ определено в* (4) *при некотором $f_1 | f$, $\deg f_1 < \deg f$.*

Доказательство. Пункт 1 следует из результатов статьи [14]. Предположим, что $v_x(f) = v_x(\Psi_1) = v_x(\Psi_2) = 0$. Положим $z = z(x) = \Psi_2^2 f/\Psi_1^2$, тогда для $n \in \mathbb{N}$ имеем (6). Отметим, что $z(0)$ определено корректно, поскольку $\Psi_1(0) \ne 0$. Согласно предложению 4, для периодичности элемента $\sqrt{f}/x^s$, $s \ne 0$, необходимо, чтобы для некоторого минимального $j \in \mathbb{N}$ было выполнено равенство $Q_j(z)\big|_{x=0} = 0$, т.е. число $z(0)$ должно быть корнем многочлена $Q_j(x)$. В силу минимальности j, число $z(0)$ не должно быть корнем многочленов $Q_1(x)$, ..., $Q_{j-1}(x)$. Число $z(0)$ должно быть корнем либо многочлена $P(T_{j/2})$ при четном j, либо многочлена $\tilde{P}(T_j)$ при нечетном j. Имеем $\deg P(T_{j/2}) = \phi(j)/4$, $\deg \tilde{P}(T_j) = \phi(j)/2$, откуда и получаем условие $\phi(j) | 2k$. Более того, поле K в качестве подполя должно содержать поле разложения соответственно многочлена $P(T_{j/2})$ или многочлена $\tilde{P}(T_j)$.

Из оценок на длину квазипериода в теоремах 1 и 2 следует, что $N \le \deg \Theta_1 - \delta = \deg \Omega_1^{(j)} - \delta = jm - \delta$.

Теорема 3 доказана.

Из условия $\phi(j) | 2k$ теоремы 3 следует, что, например, при $k = 6$ возможно $j \in \{1, \ldots, 10, 12, 13, 14, 18, 21, 26, 28, 36, 42\}$, а при $k = 7$ возможны только случаи $j \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$, такие же, как при $k = 1$.

Следствие 1. *Пусть справедливы обозначения теоремы* 3, *непрерывная дробь элемента $\sqrt{f}/x^s$ периодическая. Пусть дополнительно либо в пункте* 1 *теоремы* 3 *имеем $j = 1$, либо в пункте* 2 *теоремы* 3 *многочлен f неприводим, либо j четно. Тогда справедливо неравенство $N \le jm - 2g$.*

Если многочлен f неприводим или j четно, то $f_1 \in K^*$, откуда и следует утверждение следствия 1.

Еще одним интересным следствием теоремы 3 является утверждение о конечности числа нормированных дискриминантов ограниченной степени, для которых соответствующие квадратичные иррациональности имеют квазипериодическое разложение в непрерывную дробь.

Следствие 2. *Пусть $\mathcal{L} = K(x)(\sqrt{f})$ — гиперэллиптическое поле и C — некоторая постоянная, $\deg f \le C$. Пусть $M = M(C)$ — множество дискриминантов D со старшим коэффициентом 1 и $\deg D \le C$, таких, что $f \mid D$ и элементы поля $\mathcal{L}$ с дискриминантом $D \in M$ обладают квазипериодическим разложением в непрерывную дробь. Тогда множество M конечно.*

Из предложения 3 следует, что множество корней многочленов $T_n(x)$ и $Q_n(x)$ при $n \in \mathbb{N}$, лежащих в квадратичных полях, исчерпывается множеством

$$\left\{-1, -\frac{1}{3}, -3, -3 \pm 2\sqrt{2}, \frac{-5 \pm 2\sqrt{5}}{5},\right.$$
$$\left. -5 \pm 2\sqrt{5}, -7 \pm 4\sqrt{3}\right\}.$$

Следующий пример показывает, что полученные в теореме 3 оценки точные.

Пример. Рассмотрим эллиптическое поле $\mathcal{L} = K(x)(\sqrt{f})$ рода $g = 1$, заданное над полем $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ с помощью многочлена

$$\begin{aligned} f &= x^4 + 4x^3 - 4(\sqrt{5}+2)x^2 - \\ &- 24(\sqrt{5}+3)x - 8(\sqrt{5}+5) = \\ &= (-x^2 - 2(\sqrt{5}+2)x - 6\sqrt{5} - 10) \times \\ &\times (-x^2 + 2\sqrt{5}x - 2 + 2\sqrt{5}). \end{aligned}$$

В поле $\mathcal{L}$ есть фундаментальная единица степени $m = 4$. Непрерывная дробь элемента $\sqrt{f}$ имеет вид

$$\sqrt{f} = \left[x^2 + 2x - 2(\sqrt{5}+3); \overline{\frac{x(\sqrt{5}-3)}{32}, 4x, \frac{(\sqrt{5}-3)x^2 + 2(\sqrt{5}-3)x + 8}{64}, 4x, \frac{x(\sqrt{5}-3)}{32}, 2(x^2 + 2x - 2(\sqrt{5}+3))} \right].$$

Длина квазипериода равна 3, коэффициент квазипериода равен $-32(3+\sqrt{5})$, длина периода равна 6. Непрерывная дробь элемента $\sqrt{f}/x$ также периодическая, длина квазипериода $N = 20$ совпадает с длиной периода. В данном примере при обозначениях теоремы 3 имеем $s = 1$, $j = 5$, $v_X(\Omega_2^{(1)}) = \ldots = v_X(\Omega_2^{(4)}) = 0$, $v_X(\Omega_2^{(5)}) = 1$, $k = [K:\mathbb{Q}] = 2$ и $\phi(j) | 2k$. По теореме 3 имеем оценку на длину квазипериода $N \le jm - \delta = 20$, поскольку $\deg f_1 = 2$, $\delta = 0$. Для этого примера достигается верхняя оценка на длину квазипериода теоремы 3.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены за счет средств Российского научного фонда, проект № 19–71–00029.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Adams W.W., Razar M.J.* Multiples of points on elliptic curves and continued fractions // Proc. London Math. Soc. 1980. V. 41. № 3. P. 481–498.
2. *Платонов В.П.* Теоретико-числовые свойства гиперэллиптических полей и проблема кручения в якобианах гиперэллиптических кривых над полем рациональных чисел // УМН. 2014. Т. 69. № 1 (415). С. 3–38.
3. *Платонов В.П., Федоров Г.В.* О проблеме периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // Матем. сб. 2018. Т. 209. № 4. С. 54–94.
4. *Платонов В.П., Петрунин М.М.* Группы S-единиц и проблема периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // Тр. МИАН. 2018. Т. 302. С. 354–376.
5. *Федоров Г.В.* Об S-единицах для нормирований второй степени в гиперэллиптических полях // Известия РАН. 2020. Т. 84. № 2. С. 197–242.
6. *Schinzel A.* On some problems of the arithmetical theory of continued fractions // Acta Arith. 1960/1961. V. 6. P. 393–413.
7. *Kubert D.S.* Universal bounds on the torsion of elliptic curves // Proc. London Math. Soc. (3). 1976. V. 33. № 2. P. 193–237.
8. *Van Der Poorten A.J., Tran X.C.* Periodic continued fractions in elliptic function fields // International Algorithmic Number Theory Symposium. Berlin, Heidelberg: Springer. 2002. P. 390–404.
9. *Scherr Z.L.* Rational polynomial pell equations // Doct. Diss. The University of Michigan. 2013. P. 1–86.
10. *Sadek M.* Periodic continued fractions and elliptic curves over quadratic fields // Journal of Symbolic Computation. 2016. V. 76. P. 200–218.
11. *Платонов В.П., Федоров Г.В.* О периодичности непрерывных дробей в гиперэллптических полях // ДАН. 2017. № 5. С. 540–544.
12. *Платонов В.П., Федоров Г.В.* О проблеме классификации периодических непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // УМН. 2020. Т. 75. № 4. С. 211–212.
13. *Платонов В.П., Федоров Г.В.* Критерий периодичности непрерывных дробей ключевых элементов гиперэллиптических полей // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20. № 1. С. 246–258.
14. *Федоров Г.В.* Об ограниченности длин периодов непрерывных дробей ключевых элементов гиперэллиптических полей над полем рациональных чисел // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20. № 4. С. 321–334.
15. *Schmidt W.M.* On continued fractions and diophantine approximation in power series fields // Acta Arith. 2000. V. 95. № 2. P. 139–166.

ON THE PERIOD LENGTH OF A FUNCTIONAL CONTINUED FRACTION OVER A NUMBER FIELD

G. V. Fedorov[a]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.P. Platonov

In the classical case, it has long been known the connection between the condition of the periodicity of the continued fraction of $\sqrt{f}$ and the condition of the existence of the fundamental unit of the corresponding hyperelliptic field $\mathscr{L} = K(x)(\sqrt{f})$. For the element $\sqrt{f}$, the period length of the continued fraction in $K((1/x))$ can be trivial estimated from above by the doubled degree of the fundamental unit. Much more complicated and interesting is the problem of estimating the period length of other elements of the hyperelliptic field $\mathscr{L}$, having periodic continued fraction. Among such elements, elements of the form $\sqrt{f}/x^s$, $s \in \mathbb{Z}$ plays a key role. For such elements, the period length can be many times greater than the double degree of the fundamental unit. In this article, we find exact upper bounds for the period length of the key elements of hyperelliptic fields $\mathscr{L}$ over number fields K. We found the example that demonstrates the accuracy of the proven upper bounds.

Keywords: continued fraction, period length, fundamental unit, hyperelliptic field, cyclotomic polynomials, Eisenstein criterion