

УДК 532.5.031, 517.938.5

О СУЩЕСТВОВАНИИ ФОКУСНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ В ОДНОЙ МОДЕЛИ ВОЛЧКА ЛАГРАНЖА С ВИБРИРУЮЩЕЙ ТОЧКОЙ ПОДВЕСА

© 2020 г. А. В. Борисов^{1,2,3,*}, П. Е. Рябов^{1,2,4,**}, С. В. Соколов^{1,2,***}

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 17.03.2020 г.

Поступило 10.09.2020 г.

После доработки 30.10.2020 г.

Принято к публикации 01.11.2020 г.

Рассматривается вполне интегрируемая гамильтонова система с двумя степенями свободы, которая описывает динамику волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса. Наглядно представлены результаты исследования проблемы устойчивости положений равновесия. Как оказалось, оба положения равновесия при наличии вибрирующей точки подвеса могут быть неустойчивыми, что соответствует существованию фокусных особенностей в указанной модели.

Ключевые слова: вполне интегрируемые гамильтоновы системы, волчок Лагранжа, фокусная особенность

DOI: 10.31857/S2686954320060077

Настоящее сообщение посвящено топологическому анализу положений равновесия динамически симметричного твердого тела в однородном поле силы тяжести. Как известно [1, 2], нахождение точек ранга ноль, исследование их невырожденности и типа является первым этапом анализа фазовой топологии любой вполне интегрируемой гамильтоновой системы. Одна из точек тела, лежащая на оси симметрии (точка подвеса), совершает высокочастотные периодические или условно-периодические колебания (вибрации) малой амплитуды. Из-за наличия вибраций точки подвеса дифференциальные уравнения движения твердого тела, описывающие его ориентацию относительно системы координат, явно зависят от времени. В работах А.П. Маркеева [3, 4] указано преобразование, приводящее исходные уравнения движения, записанные в форме уравнений Эйлера—Пуассона, к приближенной системе относительно новых переменных, которая также имеет форму уравнений Эйлера—Пуассона, но не зависит явно от времени. Оказывается, что полученная система дифференциальных уравнений является вполне интегрируемой по Лиувиллю гамильтоновой системой с двумя степенями свободы. В данной работе мы подвергаем полученную систему топологическому анализу и наглядно демонстрируем проблемы исследования устойчивости положений равновесия на основе определения типа особенностей [5].

Для динамически симметричного твердого тела, когда центр тяжести лежит на оси динамической симметрии, соответствующая система дифференциальных уравнений имеет вид обобщенных уравнений Кирхгофа

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} \quad (1)$$

с функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}(M_1^2 + M_2^2 + cM_3^2) + a\gamma_3 - \frac{1}{2}b\gamma_3^2. \quad (2)$$

Здесь через $\mathbf{M} = \{M_1, M_2, M_3\}$ и $\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ обозначены вектор кинетического момента и единичный орт вертикали в системе главных осей, жестко связанных с твердым телом и проходящих через точку закрепления. Параметры a , b и c , согласно [3, 6], имеют явный физический смысл. Параметр a связан с расположением центра масс

¹ Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук, Москва, Россия

² Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия

³ Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия

⁴ Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва, Россия

*E-mail: borisov@rcd.ru

**E-mail: PERyabov@fa.ru

***E-mail: sokolov.sv@phystech.edu

вдоль вертикальной оси и в дальнейшем для конкретного исследования знак параметра a предполагается фиксированным. Параметр b характеризует разность усреднений квадратов проекций компонент вектора скорости точки подвеса на оси OX и OZ в системе координат $OXYZ$ с началом в точке подвеса, который может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Положительный параметр c характеризует отношение главных компонент тензора инерции динамически симметричного твердого тела.

Уравнения (1) могут быть представлены в гамильтоновом форме

$$\dot{\mathbf{M}} = \{\mathbf{M}, H\}, \quad \dot{\gamma} = \{\gamma, H\}$$

со скобкой Ли–Пуассона, соответствующей алгебре Ли $e(3)$,

$$\begin{aligned} \{M_i, M_j\} &= -\varepsilon_{ijk} M_k, & \{M_i, \gamma_j\} &= -\varepsilon_{ijk} \gamma_k, \\ \{\gamma_i, \gamma_j\} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Скобка Ли–Пуассона (3) является вырожденной, она обладает двумя функциями Казимира, коммутирующими относительно структуры (3) с любой функцией от $\mathbf{M}, \gamma$:

$$\begin{aligned} L &= (\mathbf{M}, \gamma) \quad (\text{интеграл площадей}), \\ \Gamma &= |\gamma|^2 \quad (\text{геометрический интеграл}). \end{aligned}$$

Фазовое пространство $\mathcal{P}$ задается в виде касательного расслоения $T\mathbb{S}^2$ к двумерной сфере $\mathbb{S}^2$

$$\mathcal{P} = \{(\mathbf{M}, \gamma): L = \ell, \Gamma = 1\}.$$

Система (1) допускает один дополнительный первый интеграл движения – интеграл Лагранжа

$$F = M_3.$$

Функция F вместе с гамильтонианом H образуют на $\mathcal{P}$ полный инволютивный набор интегралов системы (1). Согласно теореме Лиувилля–Арнольда, регулярная поверхность уровня первых интегралов вполне интегрируемой гамильтоновой системы представляет собой несвязное объединение торов, заполненных условно-периодическими траекториями. Определим интегральное отображение $\mathcal{F}: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^2$, полагая $(f, h) = \mathcal{F}(\mathbf{x}) = (F(\mathbf{x}), H(\mathbf{x}))$. Отображение $\mathcal{F}$ принято также называть отображением момента. Обозначим через $\mathcal{C}$ совокупность всех критических точек отображений момента, т.е. точек, в которых $\text{rank } d\mathcal{F}(x) < 2$. Множество критических значений $\Sigma = \mathcal{F}(\mathcal{C} \cap \mathcal{P})$ называется бифуркационной диаграммой. Цель настоящей публикации состоит в определении и исследовании типа особенностей ранга ноль отображения

момента, которым соответствуют положения равновесия.

1. НЕОБХОДИМЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В этом разделе мы приводим результаты, касающиеся аналитической классификации типов критических точек ранга ноль. Напомним некоторые факты и определения, связанные с понятием типа критической точки в интегрируемой системе [1].

Пусть $\mathcal{P}$ – симплектическое многообразие. Любой гладкой функции $F: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ сопоставляется гамильтоново векторное поле на $\mathcal{P}$, обозначаемое $\text{sgrad} F$. Скобки Пуассона, порожденные симплектической структурой, обозначаем через $\{\cdot, \cdot\}$, так что дифференциальные уравнения системы $\text{sgrad} F$ имеют вид

$$\dot{x} = \{F, x\}.$$

Пусть $\dim \mathcal{P} = 2n$ и гамильтонова система $\text{sgrad} H$ имеет n функционально независимых первых интегралов

$$F_1, \dots, F_n$$

в инволюции ($\{F_i, F_j\} = 0$). Точка $\xi \in \mathcal{P}$ называется критической ранга $k < n$, если ранг системы векторов $\text{sgrad} F_i$ в точке ξ равен k . Введем понятие типа критической точки, следуя [1].

Рассмотрим критическую точку ξ ранга $n - m$ ($m > 0$). Пусть далее в этом разделе индекс i пробегает множество $1, \dots, m$. Линейной заменой с постоянными коэффициентами системы функций $F_1, \dots, F_n$ можно добиться того, чтобы точка ξ была критической для каждой из функций F_i и регулярной для всех остальных. Тогда $\text{sgrad} F_i(\xi) = 0$ и линеаризация этого поля в точке ξ есть симплектический оператор $\alpha_i: T_\xi M \rightarrow T_\xi M$. Линейная оболочка $\mathcal{A}(\xi)$ таких операторов есть подалгебра в алгебре всех симплектических операторов на $T_\xi M$.

Определение 1 [1]. Точка ξ называется невырожденной критической точкой ранга $n - m$, если $\mathcal{A}(\xi)$ есть подалгебра Картана, что равносильно следующим требованиям:

- 1) симплектические операторы α_i линейно независимы ($\dim \mathcal{A}(\xi) = m$);
- 2) существует оператор $\alpha \in \mathcal{A}(\xi)$, у которого все собственные числа различны.

Напомним, что собственные числа симплектического оператора разбиваются на группы: пары чисто мнимых $\pm i\beta$, пары вещественных $\pm\alpha$ и четверки комплексных $\pm\alpha \pm i\beta$ ($\alpha\beta \neq 0$). Для оператора α_i в проекции на корневые подпространства

ства таких групп поле $\text{sgrad} F_l$ имеет соответственно центр, седло или фокус. Оператор $\alpha \in \mathfrak{A}(\xi)$ с различными собственными числами называется регулярным элементом. Выбрав в невырожденной точке регулярный элемент, обозначим через m_1, m_2, m_3 соответственно количество центров, седел и фокусов ($m = m_1 + m_2 + 2m_3$). От выбора регулярного элемента эти целые неотрицательные числа не зависят.

Определение 2 [1]. Четверка $(n - m, m_1, m_2, m_3)$ называется типом невырожденной критической точки ξ .

Для систем с двумя степенями свободы часто используются следующие наглядные обозначения и названия. Точки ранга ноль типа $(0, 2, 0, 0)$ называются точками типа центр-центр, типа $(0, 1, 1, 0)$ — центр-седло, типа $(0, 0, 2, 0)$ — седло-седло, наконец, точки типа $(0, 0, 0, 2)$ называются точками типа фокус-фокус.

2. ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ — КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ РАНГА НОЛЬ ОТОБРАЖЕНИЯ МОМЕНТА

Для гамильтониана (2) существуют два положения равновесия (критические точки ранга 0 отображения момента $\mathcal{F}$), которые имеют в $\mathcal{P}$ следующие координаты:

$$\xi^\pm: M_1 = M_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad M_3 = \pm\ell, \quad \gamma_3 = \pm 1.$$

Положениям равновесия отвечают стационарные вращения твердого тела вокруг оси симметрии с постоянной угловой скоростью. Соответствующие значения постоянных первых интегралов определяют две точки $P^\pm$ на плоскости $\mathbb{R}^2(f, h)$:

$$P^+: \begin{cases} f = \ell \\ h = \frac{1}{2}c\ell^2 + a - \frac{b}{2}, \end{cases} \quad P^-: \begin{cases} f = -\ell \\ h = \frac{1}{2}c\ell^2 - a - \frac{b}{2}. \end{cases}$$

Следующая теорема дает ответ, когда обе точки $P^\pm$ будут изолированными точками бифуркационной диаграммы.

Теорема 1. *Изолированным точкам $P^\pm$ бифуркационной диаграммы для случая Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса в тех случаях, когда они имеются, т.е. при*

$$\ell^2 < 4(a - b) \quad (\text{для } P^+)$$

$$\text{и} \quad \ell^2 < -4(a + b) \quad (\text{для } P^-)$$

отвечают особенностям типа фокус-фокус $(0, 0, 0, 2)$ в $\mathcal{P}$.

Доказательство. Рассмотрим систему (1) с гамильтонианом (2) в явном виде

$$\begin{aligned} \dot{M}_1 &= (c - 1)M_2M_3 + (a - b\gamma_3)\gamma_2, \\ \dot{\gamma}_1 &= c\gamma_2M_3 - \gamma_3M_2, \\ \dot{M}_2 &= -(c - 1)M_1M_3 - (a - b\gamma_3)\gamma_1, \\ \dot{\gamma}_2 &= -c\gamma_1M_3 + \gamma_3M_1, \\ \dot{M}_3 &= 0, \quad \dot{\gamma}_3 = \gamma_1M_2 - \gamma_2M_1. \end{aligned} \quad (4)$$

Для этой системы точки $\xi^\pm$ являются положениями равновесия. Рассмотрим линеаризацию системы (4) в точках $\xi^\pm$. Выберем в окрестности указанных точек в $\mathcal{P}$ локальные координаты $M_1, M_2, \gamma_1, \gamma_2$ и линеаризуем систему (4) в окрестности этих точек. Получим следующие системы (верхний знак соответствует линеаризации в окрестности точки ξ^+ , а нижний знак — в окрестности точки ξ^-):

$$\begin{aligned} \dot{M}_1 &= \pm\ell(c - 1)M_2 + (a \mp b)\gamma_2, \\ \dot{M}_2 &= \mp\ell(c - 1)M_1 - (a \mp b)\gamma_1, \\ \dot{\gamma}_1 &= \mp M_2 \pm c\ell\gamma_2, \quad \dot{\gamma}_2 = \pm M_1 \mp c\ell\gamma_1. \end{aligned} \quad (5)$$

Тогда матрицы $\mathcal{A}(\xi^\pm)$ систем (5) имеют вид матриц размера 4×4 :

$$\mathcal{A}(\xi^\pm) = \begin{pmatrix} 0 & \pm(c - 1)\ell & 0 & a \mp b \\ \mp(c - 1)\ell & 0 & -(a \mp b) & 0 \\ 0 & \mp 1 & 0 & \pm c\ell \\ \pm 1 & 0 & \mp c\ell & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристические уравнения для матриц $\mathcal{A}(\xi^\pm)$ запишутся в виде

$$f_1(\mu) \cdot f_2(\mu) = 0, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} f_1(\mu) &= \mu^2 \pm i(2c - 1)\ell\mu - c(c - 1)\ell^2 \mp (a \mp b), \\ f_2(\mu) &= \mu^2 \mp i(2c - 1)\ell\mu - c(c - 1)\ell^2 \mp (a \mp b). \end{aligned}$$

Собственные значения матриц $\mathcal{A}(\xi^\pm)$, которые являются корнями характеристического уравнения (6), имеют вид

$$\alpha + i\beta, \quad -\alpha + i\beta, \quad \alpha - i\beta, \quad -\alpha - i\beta,$$

где

$$\alpha = \frac{\sqrt{\pm 4(a \mp b) - \ell^2}}{2}, \quad \beta = \pm \frac{1}{2}(1 - 2c)\ell.$$

При условии, сформулированном в теореме для точек бифуркационной диаграммы $P^\pm$, т.е. при $\ell^2 < 4(a - b)$ и $\ell^2 < -4(a + b)$, числа α и β вещественные. Более того, когда α и β отличны от нуля,

то все четыре собственных значения действительно различны, а следовательно, особенности $\xi^\pm$ невырождены и имеют тип фокус-фокус $(0, 0, 0, 2)$ в $\mathcal{P}$.

З а м е ч а н и е 1. Конечно, при некоторых значениях ℓ и c собственные значения могут быть кратными. Так, например, происходит при $\ell = 0$, $\ell = \pm 2\sqrt{\pm(a \mp b)}$ или при $c = \frac{1}{2}$. При $\ell = \pm 2\sqrt{a-b}$ изолированная точка P^+ на бифуркационной диаграмме оказывается на границе образа отображения момента. В момент попадания на эту границу точка становится вырожденной, а затем, по мере роста ℓ , т.е. когда $|\ell|$ становится больше, чем $2\sqrt{a-b}$, точка P^+ меняет тип с фокус-фокус на центр-центр, т.е. “верхнее положение” ξ^+ становится устойчивым положением равновесия. Такой вывод согласуется с результатом, полученным ранее другим классическим методом в работе Маркеева [6]. Рассмотрим “нижнее положение” равновесия ξ^- , которому соответствует на бифуркационной диаграмме точка P^- . При значениях параметра интеграла площадей $|\ell|$ больше, чем $2\sqrt{-(a+b)}$, положение равновесия устойчиво, что соответствует особенности типа центр-центр. В момент, когда $\ell = \pm\sqrt{-(a+b)}$, точка P^- все еще остается устойчивым положением равновесия, но особенность уже вырожденная, а вот при уменьшении интеграла площадей, т.е. когда $|\ell| < \sqrt{-2(a+b)}$, точка P^- становится изолированной особенностью, меняя тип с центр-центр на фокус-фокус, что ведет к тому, что “нижнее положение” ξ^- становится неустойчивым положением равновесия.

При $\ell = 0$ или при $c = \frac{1}{2}$ тип особенности сохраняется. Для этого необходимо заменить гамильтониан H на новый гамильтониан $\tilde{H}$ в виде линейной комбинации $\tilde{H} = H + \lambda F$, для которого по-прежнему имеем в точках $\xi^\pm$ особенность ранга 0. Для такого нового гамильтониана $\tilde{H}$ все собственные значения характеристического уравнения линейаризованной системы станут вновь различными, и мы возвращаемся в предыдущую ситуацию общего положения.

З а м е ч а н и е 2. Отметим также случай, когда изолированные точки P^+ и P^- на бифуркационной диаграмме могут совпадать. Это происходит при нулевом значении интеграла площадей ℓ и $a = 0$; $b < 0$, т.е. когда центр масс помещен в начало системы координат, связанным с твердым телом, но при этом параметр b , который отвечает за воздействие на точку подвеса вибрирующего потенциала, должен быть отрицателен. Это ведет к существованию почти торической интегрируе-

мой системы с двойным pinched тором в прообразе изолированного критического значения $P^+ = P^- = P\left(0; -\frac{b}{2}\right)$ отображения момента [7].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены положения равновесия динамически симметричного твердого тела с вибрирующей точкой подвеса, но в отличие от классического подхода, использованного в [6] при исследовании устойчивости “верхнего положения” равновесия, анализ типа особенностей отображения момента позволил установить соотношения, при которых “нижнее положение” равновесия теряет устойчивость. Уникальным также является появление двойного pinched тора в рассматриваемой механической системе.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа А.В. Борисова (раздел 1) поддержана грантом РНФ № 19–71–30012. Работа С.В. Соколова выполнена в МФТИ в рамках проекта 5–100 государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации и поддержана грантом РФФИ № 18–29–10051-мк.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Т. 1, 2. Ижевск: Изд. дом “Удмуртский университет”, 1999. 444 с., 447 с.
2. Ryabov P.E., Oshemkov A.A., Sokolov S.V. The Integrable Case of Adler – van Moerbeke. Discriminant Set and Bifurcation Diagram // Regul. Chaotic Dyn. 2016. V. 21. № 5. P. 581–592.
3. Маркеев А.П. К теории движения твердого тела с вибрирующим подвесом // ДАН. 2009. Т. 427. № 6. С. 771–775.
4. Маркеев А.П. Об уравнениях приближенной теории движения твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // ПММ. 2011. Т. 75. № 2. С. 193–203.
5. Bolsinov A.V., Borisov A.V., Mamaev I.S. Topology and Stability of Integrable Systems // Russian Math. Surveys. 2010. V. 65. № 2. P. 259–318.
6. Маркеев А.П. О движении тяжелого динамически симметричного твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // Известия РАН. МТТ. 2012. Т. 47. № 4. С. 3–10.
7. San Vu Ngoc. On semi-global invariants for focus–focus singularities // Topology. 2003. V. 42. № 2. P. 365–380.

ON THE EXISTENCE OF FOCUS SINGULARITIES IN ONE MODEL OF A LAGRANGE TOP WITH A VIBRATING SUSPENSION POINT

A. V. Borisov^{a,b,c}, P. E. Ryabov^{a,b,d}, and S. V. Sokolov^{a,b}

^a *Institute of Machines Science named after A.A. Blagonravov of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

^b *Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Moscow Region, Russian Federation*

^c *Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

^d *Finance University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

In this paper, we consider a completely integrable Hamiltonian system with two degrees of freedom that describes the dynamics of a Lagrange top with a vibrating suspension point. The results of the study of the problem of stability of equilibrium positions are clearly presented. As it turned out, both equilibrium positions in the presence of a vibrating suspension point can be unstable, which corresponds to the existence of focus singularities in the specified model.

Keywords: completely integrable Hamiltonian systems, Lagrange top, focus singularities