ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 495, с. 22–25

МАТЕМАТИКА

УДК 517.955

ЗАДАЧА КОЛМОГОРОВА О ЕДИНСТВЕННОСТИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

© 2020 г. **В. И. Богачев[1,2,3,4,*], Т. И. Красовицкий[1,4], С. В. Шапошников[1,2,3,4,**]**

Представлено академиком РАН А.Н. Ширяевым 17.07.2020 г.
Поступило 20.08.2020 г.
После доработки 20.08.2020 г.
Принято к публикации 17.09.2020 г.

Дано решение задачи Колмогорова о единственности вероятностных решений параболического уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова.

Ключевые слова: уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова, задача Коши, единственность решения

DOI: 10.31857/S2686954320060065

В знаменитых работах А.Н. Колмогорова [1, 2] было исследовано уравнение

$$\partial_t \mu_t = \partial_x^2 (a\mu_t) - \partial_x (b\mu_t), \quad \mu_0 = \nu \tag{1}$$

относительно семейства вероятностных мер μ_t при заданной начальной вероятностной мере μ_0 на прямой. Это уравнение, ныне именуемое уравнением Фоккера–Планка–Колмогорова, сам Колмогоров называл "вторым дифференциальным уравнением". В работе [1] в § 15 "Постановка вопроса об однозначности и о существовании решений для второго дифференциального уравнения" поставлена проблема единственности решения задачи (1), а в [2] и проблема единственности аналогичной многомерной задачи

$$\partial_t \mu_t = \partial_{x_i} \partial_{x_j} (a^{ij} \mu_t) - \partial_{x_i} (b^i \mu), \quad \mu_0 = \nu, \tag{2}$$

где ν – заданная вероятностная борелевская мера на $\mathbb{R}^d$ и в записи уравнения опускается суммирование по повторяющимся индексам. Коэффициенты a^{ij} и b^i предполагались в работах Колмогорова "достаточно регулярными", но уравнение имеет смысл и для борелевских коэффициентов, если они локально ограничены (или хотя бы локально интегрируемы относительно решения). В этом случае под решением понимается набор вероятностных борелевских мер $\{\mu_t\}_{t\in[0,T]}$ на $\mathbb{R}^d$ (т.е. $\mu_t \geq 0$ и $\mu_t(\mathbb{R}^d) = 1$), для которого при всяком борелевском множестве E функция $t \mapsto \mu_t(E)$ измерима по Лебегу (что равносильно измеримости по t интегралов по μ_t от гладких функций с компактными носителями) и для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ при почти всех $t \in [0,T]$ верно равенство

$$\int \varphi d\mu_t - \int \varphi d\nu = \int_0^t \int (a^{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} \varphi + b^i \partial_{x_i} \varphi) d\mu_s ds.$$

Если матрица диффузии $A = (a^{ij})$ положительно определена, то меры μ_t при $t > 0$ заданы плотностями $\varrho(x,t)$. Тогда уравнение записывается в виде

$$\partial_t \varrho(x,t) = \partial_{x_i} \partial_{x_j} (a^{ij}(x) \varrho(x,t)) - \partial_{x_i} (b^i(x) \varrho(x,t)), \\ \mu_0 = \nu, \tag{3}$$

где производные понимаются в обобщенном смысле. Если при этом коэффициенты гладкие, то решение при $t > 0$ задается гладкой функцией $\varrho(x,t)$ в виде $\mu_t = \varrho(x,t)dx$, а уравнение (3) превращается в параболическое уравнение с обычными производными. Например, в случае единичной матрицы диффузии приходим к уравнению

$$\partial_t \varrho = \Delta \varrho - \operatorname{div}(\varrho b), \quad \mu_0 = \nu, \tag{4}$$

что в одномерном случае, т.е. при $d = 1$, имеет вид

$$\partial_t \varrho = \partial_x^2 \varrho - \partial_x (\varrho b), \quad \mu_0 = \nu. \tag{5}$$

В работе Колмогорова [2] единственность решения установлена для уравнения на компактном ри-

[1]*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[2]*Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Москва, Россия*
[3]*Православный Свято-Тихоновский гуманитарный университет, Москва, Россия*
[4]*Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия*
**E-mail: vibogach@mail.ru*
***E-mail: starticle@mail.ru*

мановом многообразии (в случае достаточно регулярных коэффициентов и начального распределения с непрерывной плотностью). Проблема единственности решений уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова в одномерном случае была рассмотрена такими известными математиками, как У. Феллер [3, 4], К. Иосида [5] и Э. Хилле [6], однако в несколько иной постановке, связанной с полугруппами. Ниже в замечании 1 указан пример, показывающий неравносильность постановки с полугруппами и исходной проблемы Колмогорова. Из работы А. Фридмана [7] следует единственность вероятностного решения в случае равномерной ограниченности функций a^{ij}, b^i, A^{-1}, $\partial_{x_i}a^{ij}$, $\partial_{x_i}\partial_{x_j}a^{ij}$, $\partial_{x_i}b^i$ и их локальной гельдеровости. Более общие достаточные условия получены в [8] и [9], где допускается линейный рост b^i и квадратичный рост a^{ij}. Различные достаточные условия единственности можно найти в [10]. Однако даже для единичной матрицы диффузии A и гладкого сноса b долго оставалось неизвестным, может ли существовать более одного вероятностного решения, причем вопрос был открыт и в одномерном случае. Лишь в 2011 г. в [11] был построен пример неединственности при $d \geq 3$ (см. также [12] и гл. 9 в [10]). Однако для $d = 1$ и $d = 2$ ответ был по-прежнему неизвестен. Ниже даны ответы в этих двух оставшихся случаях, причем ответы оказываются разными: в одномерном случае единственность есть, а в двумерном построен контрпример. Основной результат состоит в следующем.

Т е о р е м а 1. *Если вероятностное решение одномерной задачи Коши* (5) *для локально ограниченной борелевской функции* b *существует*, *то оно единственно*.

Подчеркнем, что нет никаких глобальных ограничений на коэффициент сноса и нет предположений о поведении решений на бесконечности или о каких-либо полугрупповых свойствах решений.

Для непостоянного коэффициента диффузии a верен следующий результат.

Т е о р е м а 2. *Пусть* a — *положительная локально липшицева функция*, b — *локально ограниченная борелевская функция*. *Предположим*, *что*

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{a(x)}}dx = \int_{0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{a(x)}}dx = +\infty.$$

Тогда если вероятностное решение задачи Коши (1) *существует*, *то оно единственно*. *Если хотя бы один из этих интегралов сходится*, *то существуют локально ограниченный коэффициент сноса* b (*непрерывный*, *если функция* a *имеет непрерывную производную*, *и гладкий*, *если такова* a) *и начальное распределение*, *заданное локально липшицевой плотностью* (*гладкой*, *если такова* a), *для которых симплекс вероятностных решений задачи Коши бесконечномерен*.

Отметим, что даже для бесконечно дифференцируемого коэффициента сноса b может случиться, что помимо единственного вероятностного решения с гладким начальным распределением существует другое семейство неотрицательных ограниченных мер, являющееся решением с тем же начальным условием (см. пример 1).

Следующий результат говорит, что задача Коши для уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова в размерности $d = 2$ может иметь бесконечномерный симплекс вероятностных решения. Напомним, что ранее такие примеры были построены только при $d \geq 3$.

Т е о р е м а 3. *Пусть* γ — *стандартная гауссовская мера на прямой*, *заданная плотностью* $(2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2}$. *Положим*

$$b^1(x) = -x - 6e^{x^2/2}, \quad b^2(y) = -y.$$

Пусть σ — *произвольная вероятностная мера с гладкой плотностью. Тогда задача Коши*

$$\partial\mu_t = \Delta\mu_t - \operatorname{div}(\mu_t b), \quad \mu_0 = \gamma\otimes\sigma$$

имеет бесконечно много линейно независимых вероятностных решений.

Класс вероятностных решений уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова отличается от традиционных классов решений с условиями на рост или интегрируемость. Есть примеры (см. [10, гл. 9] и пример 1 ниже), когда вероятностное решение единственно, а в классе неотрицательных интегрируемых ограниченных функций задача Коши имеет по крайней мере два различных решения. Отдельным, но близким по духу вопросом является единственность полугруппы, порождаемой соответствующим эллиптическим оператором. По этому вопросу см. [10, гл. 5].

Если допускать коэффициенты сноса, которые лишь локально интегрируемы относительно решения μ, но могут быть локально неограниченными, то можно построить примеры неединственности вероятностных решений даже в размерности 1 как для стационарного уравнения с единичным сносом, т.е. уравнения $\varrho'' - (\varrho b)' = 0$ относительно вероятностных плотностей, так и для параболического уравнения (см. [13]). Поэтому мы рассматриваем локально ограниченные коэффициенты сноса.

П р и м е р 1. (i) В [10, задача 9.8.47] предложен такой пример (с указанием к решению), в котором для бесконечно дифференцируемого коэффициента сноса b на прямой помимо единственного вероятностного решения с гладким начальным распределением существует другое семейство неотрицательных ограниченных мер, являющееся решением с тем же начальным условием:

$$b(x) = -2x(1+x^2)^{-1} - (1+x^2)\operatorname{arctg} x,$$

начальная плотность $u_0(x) = (\pi(1+x^2))^{-1}$.

(ii) Рассмотрим пример, в котором для бесконечно дифференцируемого коэффициента сноса b на прямой и гладкого начального условия нет вероятностных решений, однако существует единственное субвероятностное решение. Возьмем ту же начальную плотность u_0, что и в (i), но снос изменим так:

$$b(x) = -2x(1+x^2)^{-1} + (1+x^2)\operatorname{arctg} x.$$

Так как $xb(x) \geq -2$, то для функции $V(x) = x^2 + 4$ получаем $V'' + bV' \geq -V$, что в силу [10, теорема 9.6.3] влечет единственность интегрируемого решения. Явными вычислениями можно проверить, что $e^{-t}u_0(x)$ является таковым решением, причем оно субвероятностное.

Замечание 1. Объясним отличие рассмотренной нами проблемы в постановке Колмогорова от изученной Э. Хилле [6] задачи существования и единственности для одномерного уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова. Для упрощения ограничимся случаем единичного коэффициента диффузии, причем приведем формулировки в наших обозначениях, хотя в [6] противоположные обозначения: через a обозначается снос. В [6, § 8, с. 116] задача в случае уравнения на всей прямой ставится так: найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы для всякой функции $h \in L^1(\mathbb{R})$ с $Lh = h'' - (bh)' \in L^1(\mathbb{R})$ нашлось единственное решение $T(x,t,h)$ уравнения $\partial_t u = \partial_x^2 u - \partial_x(ub)$ с начальным условием h в смысле соотношения $\|T(\cdot,t,h) - h\|_{L^1} \to 0$ при $t \to 0$. Такая постановка называется задачей L_0, а в задаче L еще дополнительно требуется, чтобы решение с неотрицательным начальным условием h было неотрицательно и имело такой же интеграл по прямой, как и h, т.е. решения с вероятностными начальными плотностями из области определения оператора L должны быть вероятностными. Коэффициент сноса в [6] предполагается непрерывным, но это незначительное техническое отличие. Согласно [6, теоремы 8.5 и 8.7], необходимое и достаточное условие разрешимости задачи L_0 состоит в расходимости интеграла

$$\int_0^x \exp B(y) \int_0^y \exp(-B(u))\,du\,dy,$$

где

$$B(y) = \int_0^y b(s)\,ds$$

на $-\infty$ и $+\infty$, а для разрешимости задачи L дополнительно требуется расходимость интеграла

$$\int_0^x \exp(-B(y)) \int_0^y \exp(B(u))\,du\,dy$$

на $-\infty$ и $+\infty$. Это есть предыдущее условие для сноса $-b$, что делает условия для b и $-b$ одинаковыми. В обеих цитированных теоремах Хилле замыкание оператора L порождает полугруппу в $L^1(\mathbb{R})$. Из предыдущего примера видно, что возможна ситуация, когда при каждом начальном распределении, являющемся вероятностной мерой, существует единственное вероятностное решение задачи Коши, но есть также и другие решения. Наконец, еще одно отличие от условий Хилле нашего результата (в котором нет никаких условий на снос, кроме его локальной ограниченности) состоит в том, что у Хилле решение должно существовать для каждой начальной функции (правда, из области определения оператора, а у нас допускаются произвольные начальные вероятностные меры), в нашей же постановке решения могут существовать для одних начальных условий и отсутствовать для других, но в теореме 1 утверждается, что ни при каком вероятностном начальном распределении не может быть двух разных решений. При этом единственность есть и тогда, когда замыкание оператора L не порождает полугруппу в $L^1(\mathbb{R})$.

Теорема Хилле говорит (для непрерывного сноса), что при нарушении условия Хилле для задачи L либо при каком-то начальном условии нет решения, либо при каком-то ином начальном условии есть несколько решений, а по нашей теореме 1 вторая возможность не может осуществляться, так что причиной всегда является первая. Примером отсутствия вероятностных решений при некоторых начальных распределениях и их наличия при других служит уравнение со сносом $b(x) = -x - 6e^{x^2/2}$, для которого стандартная гауссовская мера γ на прямой является стационарным решением с начальным распределением γ, но можно показать, что здесь имеются начальные вероятностные распределения, для которых нет вероятностных решений, что по терминологии Хилле означает, что задача L для этого сноса неразрешима. Для этого сноса нарушено условие Хилле: второй из выписанных выше интегралов сходится на $-\infty$.

О проблеме единственности для стационарных уравнений см. [10, 14, 15]. Отметим, что нами рассмотрен случай, когда коэффициент сноса не зависит от времени, но остается открытым вопрос единственности в одномерном случае при наличии зависимости b от времени.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа поддержана грантами РФФИ 18–31–20008, 20–01–00432, Московским центром фундаментальной и прикладной математики, грантом 18-1-6-83-1 Фонда "Базис" и стипендией для второго автора, а также фондом Саймонса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колмогоров А.Н.* Об аналитических методах в теории вероятностей // Успехи матем. наук. 1938. Т. 5. С. 5–41.
2. *Kolmogoroff A.N.* Zur Theorie der stetigen zufälligen Prozesse // Math. Ann. 1933. B. 104. S. 149–160.
3. *Феллер В.* К теории стохастических процессов (теоремы существования и единственности) // Успехи матем. наук. 1938. Т. 5. С. 57–96.
4. *Feller W.* The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations // Ann. Math. (2). 1952. V. 55. P. 468–519.
5. *Yosida K.* Integration of Fokker–Planck's equation in a compact Riemannian space // Ark. Mat. 1949. V. 1. P. 71–75.
6. *Hille E.* The abstract Cauchy problem and Cauchy's problem for parabolic differential equations // J. Analyse Math. 1954. V. 3. P. 81–196.
7. *Friedman A.* On the uniqueness of the Cauchy problem for parabolic equations // Amer. J. Math. 1959. V. 81. P. 503–511.
8. *Смирнова Г.Н.* О классах единственности решения задачи Коши для параболических уравнений // ДАН СССР. 1963. Т. 153. № 6. С. 1269–1272.
9. *Aronson D.G., Besala P.* Uniqueness of solutions of the Cauchy problem for parabolic equations // J. Math. Anal. Appl. 1966. V. 13. P. 516–526.
10. *Bogachev V.I., Krylov N.V., Röckner M., Shaposhnikov S.V.* Fokker–Planck–Kolmogorov equations. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2015.
11. *Шапошников С.В.* О единственности интегрируемых и вероятностных решений задачи Коши для уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова // ДАН. 2011. Т. 439. № 3. С. 331–335.
12. *Bogachev V.I., Röckner M., Shaposhnikov S.V.* On uniqueness problems related to the Fokker–Planck–Kolmogorov equations for measures // J. Math. Sci. 2011. V. 179. P. 759–773.
13. *Cherny A.S., Engelbert H.-J.* Singular stochastic differential equations. Lecture Notes in Math. V. 1858. B.: Springer-Verlag, 2005. P. 1–128.
14. *Богачев В.И., Красовицкий Т.И., Шапошников С.В.* О неединственности вероятностных решений двумерного стационарного уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова // ДАН. 2018. Т. 482. № 5. С. 489–493.
15. *Красовицкий Т.И.* Вырожденные эллиптические уравнения и неединственность решений уравнения Колмогорова // ДАН. 2019. Т. 487. № 4. С. 361–364.

THE KOLMOGOROV PROBLEM ON UNIQUENESS OF PROBABILITY SOLUTIONS OF A PARABOLIC EQUATION

V. I. Bogachev[a,b,c,d]**, T. I. Krasovitskii**[a,d]**, and S. V. Shaposhnikov**[a,b,c,d]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*
[b] *National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russian Federation*
[c] *St.-Tikhon's Orthodox University, Moscow, Russian Federation*
[d] *Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation*
Presented by Academicianof the RAS A.N. Shiryaev

We give a solution to the Kolmogorov problem on uniqueness of probability solutions to a parabolic Fokker–Planck–Kolmogorov equation.

Keywords: Fokker–Planck–Kolmogorov equation, Cauchy problem, uniqueness of a solution