

УДК 517.9+532

## ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ НАВЬЕ–СТОКСА ДЛЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В СЛУЧАЕ ЗАДАЧ, СВЯЗАННЫХ С НЕФТЕГАЗОВОЙ ОТРАСЛЮ

© 2020 г. Академик РАН В. Б. Бетелин<sup>1,\*</sup>, В. А. Галкин<sup>2,\*\*</sup>, А. О. Дубовик<sup>2,\*\*\*</sup>

Поступило 15.09.2020 г.

После доработки 15.09.2020 г.

Принято к публикации 21.09.2020 г.

В рамках модели гидродинамики, описывающей течение вязкой несжимаемой жидкости, представлены классы точных решений, соответствующие вихревому и потенциальному течению. Исследование точных решений является необходимым условием для создания kernового симулятора, что связано с моделированием динамики жидкости в пористой среде и откликом месторождения на динамические воздействия с целью повышения нефтеотдачи.

*Ключевые слова:* гидродинамика, точные решения, переменная область, нефтегазовая отрасль

DOI: 10.31857/S2686954320060053

Рассматривается течение несжимаемой жидкости в открытой пространственной области  $\{x\} \in D(t) \subset \mathbb{R}_n$  с границей  $\partial D(t)$ , где  $t$  – время. Условие несжимаемости жидкости предполагает неизменность объема  $D(t)$ . Предполагается, что в указанной области жидкость имеет постоянную плотность  $\rho > 0$ , а ее динамика задается полем скоростей  $\mathbf{u} = \{u_i(\mathbf{x}, t)\}_1^n$  и давлением  $p(\mathbf{x}, t)$ , которые подчиняются уравнениям Навье–Стокса [1, 2] и закону сохранения массы в эйлеровых координатах:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_j u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \rho^{-1} \frac{\partial p}{\partial x_i} = \operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} u_i) + \rho^{-1} F_i, \quad (1)$$
$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad t > 0, \quad \mathbf{x} \in D(t),$$

где  $\varepsilon = \eta \rho^{-1}$  – кинематическая вязкость жидкости,  $\eta$  – динамическая вязкость,  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \{F_i\}_1^n$  – плотность объемных сил. Ниже рассматривается случай, когда  $\varepsilon = \operatorname{const} \geq 0$ ,  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \equiv 0$ ,  $\rho \equiv 1$ . Задачи управления течением жидкости особую актуальность приобретают в связи с необходимостью со-

здания технологии “цифровое месторождение” [3–5]. Ниже рассмотрены точные решения системы (1) при дополнительных условиях, представляющих интерес для создания kernового симулятора. В частности, для нефтегазовой отрасли рассматриваемые ниже точные решения непосредственно связаны с моделированием динамики жидкости в пористой среде и откликом месторождения на динамические воздействия различных типов (механические, тепловые, электрические, химические и т.п.), что позволяет провести оптимизацию управляющих воздействий с целью повышения коэффициента извлечения нефти. Исследованию влияния тепловых эффектов на структуру течения посвящены работы [6–9], в том числе и таких вязких жидкостей, как нефть [8]. Представленный класс задач позволяет включить в рассмотрение модели деформации пластов в задачах гидрогеодинамики, описанные в [10].

Одним из важнейших вопросов построения kernового симулятора является получение точной динамики несжимаемой жидкости в пористой среде. Рассмотрим простейшую модель пористой среды, состоящую из дискретного набора точек – узлов сетки  $\partial D(t) \subset \mathbb{R}_n$ . В этом случае область течения  $D(t) \equiv \mathbb{R}_n \setminus \partial D(t)$ . На узлах сетки, являющихся границей области течения, потребуем выполнение условия прилипания

$$\mathbf{u}|_{\partial D(t)} = 0. \quad (2)$$

Для построения точных решений системы (1) с условиями прилипания (2) воспользуемся нетривиальными точными решениями  $(\mathbf{V}, \Phi)$  задачи

<sup>1</sup> Федеральный научный центр

Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук, Москва, Россия

<sup>2</sup> Сургутский филиал Федерального научного центра

Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук, Москва, Россия

\*E-mail: betelin@niisi.msk.ru

\*\*E-mail: val-gal@yandex.ru

\*\*\*E-mail: alldubovik@gmail.com

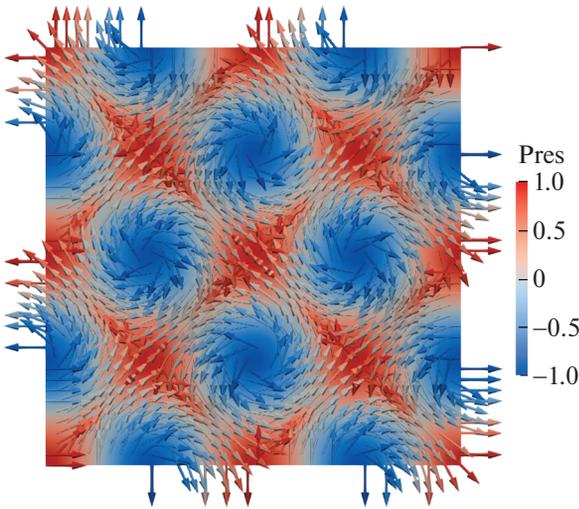


Рис. 1. Структура течения.

$$[\mathbf{V}, \text{rot } \mathbf{V}] = \nabla \Phi, \quad \text{div } \mathbf{V} = 0, \quad (3)$$

где отысканию подлежат гладкий потенциал  $\Phi$  и векторное поле  $\mathbf{V}$  на  $D(t)$ .

### ПРИМЕРЫ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

1. Рассмотрим модель пористой среды, состоящую из узлов плоской сетки  $\partial D(t) = \pi \times \mathbb{Z}_2 + 0.5 \times (\pi, \pi)$  в пространстве  $\mathbb{R}_2$ . Случай сетки, состоящей из узлов, расположенных с шагом  $h$ , получается заменой пространственно-временных переменных в приведенных ниже формулах. Соответствующее точное решение задачи (1), (2) имеет следующий вид:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \exp(-\varepsilon \lambda t) \begin{pmatrix} \sin(\sqrt{\lambda} x_2) \\ \sin(\sqrt{\lambda} x_1) \end{pmatrix},$$

$$p(\mathbf{x}, t) = \exp(-2\varepsilon \lambda t) \cos(\sqrt{\lambda} x_2) \cos(\sqrt{\lambda} x_1),$$

$$\lambda > 0.$$

На рис. 1 изображено решение задачи в области  $x_1, x_2 \in [-\pi; \pi]$  при  $\lambda = 4$ , в центре рисунка находится точка  $O(0; 0)$ ,  $t \geq 0$ . Стрелки на рис. 1 соответствуют направлению поля скорости.

Следует подчеркнуть, что течение структурировалось на квадраты, внутри которых вращаются вихри с центрами, расположенными в узлах сетки  $\partial D(t) = \pi \times \mathbb{Z}_2 + 0.5 \times (\pi, \pi)$ , в которых скорость течения обращается в нуль. На границах квадратов, расположенных под углами  $\pm 45^\circ$  и центрами на сетке, жидкость скользит по касательной. Аналогичное структурирование течения проводящей жидкости наблюдалось при описании точного трехмерного решения системы урав-

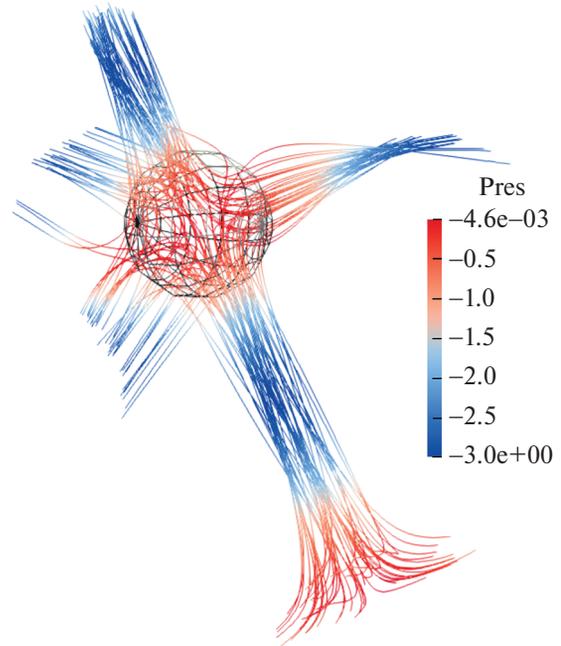


Рис. 2. Линии тока, проходящие через сферу радиуса 1 с центром в точке  $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{\pi}{4}$ .

нений магнитной гидродинамики с условием скольжения на границе параллелепипеда [11].

2. 3 - D течение. Течение осуществляется между узлов сетки  $\partial D(t) = \pi \times \mathbb{Z}_3 + 0.25 \times (\pi, \pi, \pi)$  в пространстве  $\mathbb{R}_3$ . Соответствующее точное решение задачи (1), (2) в этой области имеет вид

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} \sin(x_2) - \cos(x_3) \\ \sin(x_3) - \cos(x_1) \\ \sin(x_1) - \cos(x_2) \end{pmatrix} \exp(-\varepsilon t),$$

$$p(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{2}(\mathbf{u}, \mathbf{u}).$$

Рисунок 2 иллюстрирует линии тока в точке прилипания, где поле давления равно нулю.

Приведенные выше примеры точных решений описывают чисто вихревые течения.

3. Примеры потенциальных течений в плоской области с переменной геометрией. В случае потенциального течения жидкости  $\mathbf{u} = \nabla \Psi$ ,  $\mathbf{u}$  – вектор скорости течения, решение уравнений гидродинамики с условием скольжения на границе сводится к решению задачи Неймана для уравнения Лапласа на нахождение потенциала скорости  $\Psi(t, \mathbf{x}(t))$ :

$$\Delta \Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial n} \Big|_{\partial D(t)} = \mathbf{V}(x_1, x_2, t) \cdot \mathbf{n} \Big|_{\partial D(t)},$$

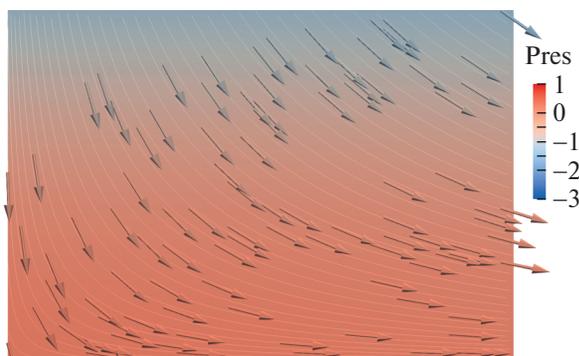


Рис. 3. Линия тока и поле давления в прямоугольнике  $D(t)$  при  $t = 0.2$ .

$$p = -\frac{1}{2}(\nabla\Psi)^2 - \frac{d\Psi}{dt}, \quad (x_1, x_2) \in D(t) \subset \mathbb{R}_2.$$

Закон деформации области  $D(t)$  задан следующей динамикой:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{V}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2),$$

где  $\mathbf{x}(t)$  — положение точки в области  $D(t)$ , при условии, что в момент времени  $t = 0$  она находилась в точке  $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \in D(0)$ .

Далее описывается решение двух тестовых задач. Численное решение получено методом контрольного объема. Результаты расчетов совпали в пределах точности разностной схемы с точными решениями задач.

3.1. Первый тестовый расчет проведен в случае, когда деформация области происходит под действием преобразований, заданных векторным полем  $\mathbf{V} = \{\alpha(t)x; -\alpha(t)y\}$ , где  $\alpha(t)$  — заданная функция времени. (Ниже в тестовых расчетах  $\alpha(t) = \cos\pi t$ ,  $D(0)$  — квадрат со стороной 1.) При таком преобразовании области ее объем сохраняется, что соответствует деформации области, заполненной несжимаемой жидкостью. В этом случае область  $D(t)$  с течением времени трансформируется из квадрата в прямоугольник, вытянутый вдоль оси  $Ox_1$ , а затем возвращается в исходное состояние. Далее область трансформируется в прямоугольник, вытянутый вдоль координатной оси  $Ox_2$ , возвращается в исходное положение и т.д.

Аналитическое решение задачи имеет вид

$$\Psi = \frac{\alpha(t)}{2}(x_1^2 - x_2^2),$$

$$p = -\frac{3}{2}\alpha(t)(x_1^2 + x_2^2) - \frac{\alpha'(t)}{2}(x_1^2 - x_2^2).$$

Далее проиллюстрированы результаты расчетов в моменты времени при  $t = 0.2$  (рис. 3). На рисунках цветом отображены значения поля давления  $p$ , линиями и стрелками показано направле-

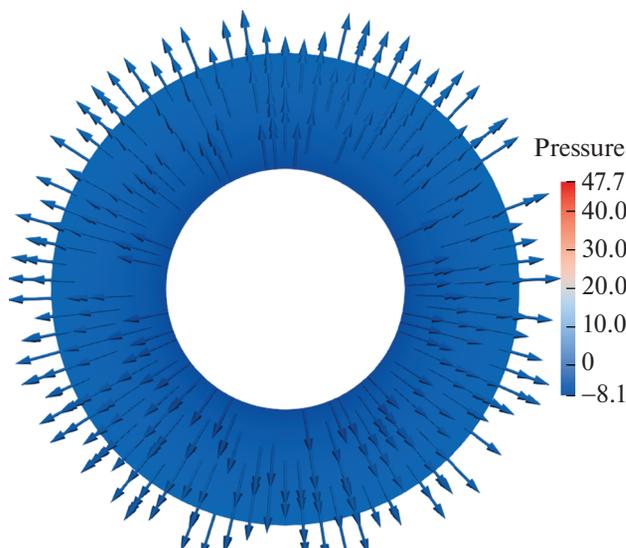


Рис. 4. Поле скорости и поле давления в  $D(t)$  при  $t = 0.2$ .

ние поля скорости  $\mathbf{u} = \nabla\Psi$ , соответствующее потенциальному течению жидкости.

3.2. В следующем тестовом расчете  $D(0)$  — круг радиуса 1 с выколотым центром, который превращается в кольцо  $D(t)$ , а затем возвращается в исходное состояние. Внешний радиус кольца в момент времени  $t > 0$  положим равным  $\sqrt{1 + \alpha^2(t)}$ , а внутренний —  $\alpha(t)$ , где  $\alpha(t) = \sin\pi t \geq 0$ .

Трансформация границы области задана векторным полем в полярных координатах:

$$\mathbf{V}(\rho, \varphi, t) = \left\{ \frac{\alpha(t)\alpha'(t)}{\rho}; 0 \right\}.$$

При таком преобразовании области ее объем сохраняется. Точное решение имеет вид

$$\Psi = \alpha(t)\alpha'(t)\ln\rho,$$

$$p = -\frac{3}{2}\frac{\alpha^2(t)\alpha'^2(t)}{\rho^2} - \pi^2 \cos(2\pi t)\ln\rho.$$

Ниже приведены результаты расчетов в моменты времени  $t = 0.2$  (рис. 4). На рисунках цветом отображены значения поля давления  $p$ , стрелками показано направление поля скорости  $\mathbf{u} = \nabla\Psi$ , соответствующее потенциальному течению жидкости. В начальный момент времени и при  $t = 1$  жидкость покоится.

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках госзадания ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, тема № 0065-2019-0019.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Уч. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика. 5-е изд., стереотип. М.: Физматлит, 2001. 736 с.
2. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Ч. 1. М.: Наука, 1986. 640 с.
3. Бетелин В.Б., Галкин В.А. Управление параметрами несжимаемой жидкости при изменении во времени геометрии течения // ДАН. 2015. Т. 463. № 2. С. 149–151.
4. Галкин В.А., Дубовик А.О., Епифанов А.А. Приближенные методы для уравнений несжимаемой жидкости // ЖВМиМФ. 2017. Т. 57. № 2. С. 275–284.
5. Вольпин С.Г., Юдин В.А., Кац Р.М., Афанаскин И.В., Галкин В.А. Применение суперкомпьютерных технологий – ключ к решению проблем повышения нефтеотдачи на месторождениях России // В сб.: СПб науч. форум. VIII встреча лауреатов нобелевской премии. СПб. 2013. С. 90–92.
6. Галич Н.Е. Тепловая неустойчивость и пробой движущихся вязких жидкостей в электрическом поле и при поглощении света // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 7. С. 10–17.
7. Алтоиз Б.А., Савин Н.В., Шатагина Е.А. Влияние тепловыделения в микропрослойке жидкости при измерении ее вязкости // ЖТФ. 2014. Т. 84. В. 5. С. 21–27.
8. Куштанова Г.Г. Физика геосферы. Казань: Изд-во КазГУ, 2004. 44 с.
9. Семенов Н.Н. Цепные реакции. М.: Госхимтехиздат, 1934.
10. Шестаков В.М. Гидрогеодинамика. М.: Изд-во МГУ, 1995. 368 с.
11. Бетелин В.Б., Галкин В.А., Гореликов А.В. Алгоритм типа предиктор–корректор для численного решения уравнения индукции в задачах магнитной гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости // ДАН. 2015. Т. 464. № 5. С. 525–528.

## EXACT NAVIER–STOKES SOLUTIONS FOR AN INCOMPRESSIBLE FLUID IN THE CASE OF PROBLEMS RELATED TO THE OIL AND GAS INDUSTRY

Academician of the RAS V. B. Betelin<sup>a</sup>, V. A. Galkin<sup>b</sup>, and A. O. Dubovik<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Federal State Institution “Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences”, Moscow, Russian Federation

<sup>b</sup> Surgut Branch of Federal State Institution “Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences”, Surgut, Russian Federation

Classes of exact solutions corresponding to vortex and potential flows are presented within the framework of a hydrodynamic model describing the flow of a viscous incompressible fluid. The study of exact solutions is a prerequisite for creating a core simulator, which is associated with modeling the dynamics of fluid in a porous medium and the response of the field to dynamic influences in order to increase oil recovery.

*Keywords:* hydrodynamics, exact solutions, variable domain, oil and gas industry