ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2020, том 495, с. 8–12

МАТЕМАТИКА

УДК 517.518.232

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПРОСТРАНСТВ ФУНКЦИЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ГЛАДКОСТИ НА ОБЛАСТИ

© 2020 г. Член-корреспондент РАН О. В. Бесов[1,*]

Поступило 06.04.2020 г.
После доработки 06.04.2020 г.
Принято к публикации 22.10.2020 г.

Дается описание интерполяционных пространств для пространств функций положительной гладкости на области с условием гибкого конуса.

Ключевые слова: регулярная область, пространства функций положительной гладкости, интерполяция, мультипликативные оценки

DOI: 10.31857/S2686954320060041

Дается описание интерполяционных пространств для пространств функций положительной гладкости на области G евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющей условию гибкого конуса. В качестве следствия получены мультипликативные оценки норм функций. Рассмотрения основаны на интегральных представлениях функции по гибкому конусу через ее локальные приближения многочленами и на оценках возникающих операторов свертки.

Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $n \in \mathbb{N}$; $n \geq 2$; $\mathbb{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_n)$; все рассматриваемые функции локально суммируемы на области своего определения.

Определение 1. Область $G \subset \mathbb{R}^n$ будем называть *областью с условием гибкого конуса*, если при некоторых $T \in (0,1]$, $\kappa > 0$ для любого $x \in G$ существует кусочно гладкий путь

$$\gamma = \gamma_x\colon [0,T] \to G, \quad \gamma(0) = x, \quad |\gamma'| \leq 1 \text{ п.в.}, \tag{1}$$

такой, что

$$\operatorname{dist}(\gamma(t), \mathbb{R}^n \setminus G) \geq \kappa t \quad \text{при} \quad 0 < t \leq T.$$

Будем пользоваться следующими обозначениями. Везде далее символом G обозначается область в $\mathbb{R}^n$ с условием гибкого конуса, не совпадающая с $\mathbb{R}^n$, $G_\delta = \{x \in G\colon \operatorname{dist}(x, \partial G) > \delta\}$ при $\delta > 0$.

При $t > 0$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ положим

$$y + tE := \{x\colon x = y + tz,\ z \in E\},$$
$$B(x,t) := \{y\colon |y - x| < t\} = x + B(0,t),$$

χ – индикатор шара $B(0,1)$,

$$\|\varphi \mid L^*_{p,s}\| == \left\{\int_0^T (t^{-s}\varphi(t))^p \frac{dt}{t}\right\}^{1/p} \quad \text{при } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|\varphi \mid L^*_{\infty,s}\| = \operatorname{esssup}|t^{-s}\varphi(t)|, \ \|\varphi \mid L^*_p\| = \|\varphi \mid L^*_{p,0}\|.$$

При $1 \leq p < \infty$ $L_p(G)$ – лебегово пространство определенных на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ функций с нормой $\|f \mid L_p(G)\| = \left(\int_G |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$, $L_p = L_p(\mathbb{R}^n)$. Все рассматриваемые функции f и производные $D^\alpha f$ локально суммируемы на области своего определения.

Символом $W_p^s(G)$ при $s \in \mathbb{N}$ будем обозначать пространство Соболева с нормой

$$\left\|f \mid W_p^s(G)\right\| = \left\|f \mid L_p(G)\right\| + \sum_{|\alpha|=s} \left\|D^\alpha f \mid L_p(G)\right\|,$$
$$W_p^0(G) = L_p(G).$$

При $x, a \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ для числовой функции f положим $\tau_a f(x) = f(x + a)$, $\sigma_t f(x) = f(tx)$. Символом $\mathbb{P}_{m-1}$ обозначим линейное пространство многочленов вида $\sum_{|\alpha| \leq m-1} c_\alpha x^\alpha$. Пусть $\pi = \pi^{m-1}\colon L(B_0) \to L(B_0)$ – некоторый проектор на $\mathbb{P}_{m-1}$,

$$\pi_{a,t} = \tau_a^{-1} \circ \sigma_t^{-1} \circ \pi \circ \sigma_t \circ \tau_a,$$

[1] *Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия*
**E-mail: besov@mi-ras.ru*

$$D_{m-1}(t)f(x) = t^{-n}\left\|f - \pi_{x,t}f \mid L(B(x,t))\right\|.$$

При $E \subset \mathbb{R}^n$ положим

$$D_{m-1}(t,E)f(x) = \begin{cases} D_{m-1}(t)f(x), & \text{если } B(x,t) \subset E, \\ 0, & \text{если } B(x,t) \not\subset E. \end{cases}$$

Замечание 1. Локальное приближение $\|f - \pi_{x,t}f \mid L(B(x,t))\|$ функции f проекционным многочленом из $\mathbb{P}_{m-1}$ эквивалентно ее наилучшему приближению в $L(B(x,t))$ с помощью многочленов из $\mathbb{P}_{m-1}$.

Определение 2. При $1 \le p,\ q \le \infty$, $m \in \mathbb{N}$, $0 < s < m$ символами $B^s_{p,q}(G)$, $L^s_{p,q}(G)$ обозначим банаховы пространства определенных на G функций с конечными нормами соответственно:

$$\|f \mid B^s_{p,q}(G)\| = \|f \mid L_p(G_\delta)\| + \|f \mid b^s_{p,q}(G)\|, \tag{2}$$

$$\|f \mid L^s_{p,q}(G)\| = \|f \mid L_p(G_\delta)\| + \|f \mid l^s_{p,q}(G)\|, \tag{3}$$

где $\delta \in (0,T)$ достаточно мало и в случае $p,q < \infty$

$$\|f \mid b^s_{p,q}(G)\| = \left\{\int_0^T \left(\int_G [D_{m-1}(t,G)f(x)]^p dx\right)^{q/p} t^{-sq-1}dt\right\}^{1/q},$$

$$\|f \mid l^s_{p,q}(G)\| = \left\{\int_G \left(\int_0^T [D_{m-1}(t,G)f(x)]^q t^{-sq-1}dt\right)^{p/q} dx\right\}^{1/p},$$

с обычной модификацией при $p = \infty$ или $q = \infty$.

Замечание 2. Эквивалентные нормы в пространствах $L^s_{p,q}(G)$, $B^s_{p,q}(G)$ можно задать через разности функций вместо локальных приближений, см. [1]. Доказательство эквивалентности имеется также в [4]. Отметим еще, что при натуральных s и $q = 2$ пространства $L^s_{p,2}(G)$ совпадают с пространствами Соболева $W^s_p(G)$, см. [1].

Через $(A_0, A_1)_{\theta,r}$, $(A_0, A_1)_{[\theta]}$ будем обозначать интерполяционные пространства между банаховыми пространствами A_0 и A_1, получаемые соответственно методами вещественной и комплексной интерполяции. Следующая теорема хорошо известна в случае $G = \mathbb{R}^n$, см. [2, 3]. Для области G с "усиленным условием конуса" она приведена в [1].

Теорема 1. *Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ — область с условием гибкого конуса,*

$$s_0, s_1 \in (0,\infty), \quad r \in [1,\infty],$$
$$p_0, p_1, p, q_0, q_1, q \in [1,\infty], \quad 0 < \theta < 1,$$
$$s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1,$$
$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Тогда при указанных в формулах дополнительных ограничениях справедливы интерполяционные равенства:

$$\begin{gathered}(B^{s_0}_{p,q_0}(G), B^{s_1}_{p,q_1}(G))_{\theta,r} = B^s_{p,r}(G) \\ (s_0 \ne s_1 \ \ \textit{или} \ \ r = q),\end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{gathered}(B^{s_0}_{p_0,q_0}(G), B^{s_1}_{p_1,q_1}(G))_{\theta,q} = B^s_{p,q}(G) \\ (p = q, q_0, \ \ q_1 < \infty),\end{gathered} \tag{5}$$

$$(B^{s_0}_{p_0,q_0}(G), B^{s_1}_{p_1,q_1}(G))_{[\theta]} = B^s_{p,q}(G)(q_0 < \infty), \tag{6}$$

$$\begin{gathered}(W^{s_0}_p(G), W^{s_1}_p(G))_{\theta,r} = B^s_{p,r}(G) \\ (\textit{верно и при} \ \ 0 \le s_0 < s_1 < \infty),\end{gathered} \tag{7}$$

а также при $1 < p_0, p_1, p, q_0, q_1, q < \infty$ *следующие три равенства*:

$$\begin{gathered}(L^{s_0}_{p_0,q_0}(G), L^{s_1}_{p_1,q_1}(G))_{\theta,p} = L^s_{p,p}(G) = B^s_{p,p}(G) \\ (s_0 \ne s_1 \ \ \textit{или} \ \ p = q),\end{gathered} \tag{8}$$

$$(L^s_{p_0,q}(G), L^s_{p_1,q}(G))_{\theta,p} = L^s_{p,q}(G), \tag{9}$$

$$(L^{s_0}_{p_0,q_0}(G), L^{s_1}_{p_1,q_1}(G))_{[\theta]} = L^s_{p,q}(G). \tag{10}$$

Одно из свойств интерполяционных пространств состоит в оценке (см. [2, теорема 1.3.3])

$$\|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,r}} \le C_{\theta,r}\|a\|^{1-\theta}_{A_0}\|a\|^{\theta}_{A_1},$$
$$0 < \theta < 1, \quad 1 \le r \le \infty.$$

Поэтому из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *При соотношениях параметров, указанных в теореме* 1, *справедливы мультипликативные оценки*

$$\left\|f \mid B^s_{p,r}(G)\right\| \le C\left\|f \mid B^{s_0}_{p_0,q_0}(G)\right\|^{1-\theta}\left\|f \mid B^{s_1}_{p_1,q_1}(G)\right\|^{\theta},$$

$$\left\|f \mid L^s_{p,r}(G)\right\| \le C\left\|f \mid L^{s_0}_{p_0,q_0}(G)\right\|^{1-\theta}\left\|f \mid L^{s_1}_{p_1,q_1}(G)\right\|^{\theta}.$$

Эти мультипликативные оценки для области G менее общего вида являются следствием интерполяционной теоремы из [1].

Основой рассмотрений служит интегральное представление функции, являющееся аналогом интегральных представлений из [1]. Приведем его.

Пусть $\vartheta \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\vartheta(u) = 0$ при $u \le -\delta$, $\vartheta(u) = 1$ при $u \ge \delta$, $\tau, \tau_1 \in \mathbb{R}$, $0 < \delta < \frac{\kappa}{3}\sqrt{n}$,

$$\omega(u,\tau) = \frac{d^k}{du^k}\left(\frac{u^{k-1}}{(k-1)!}\vartheta(u-\tau)\right),$$

$$\text{так что} \quad \int \omega(u,\tau)du = 1, \tag{11}$$

$$\xi(u,\tau) = \frac{u^k}{(k-1)!}\vartheta'(u-\tau) = u\eta(u,\tau),$$

$$\zeta(u,\tau,\tau_1) = \xi(u,\tau) + \\ + (\tau-\tau_1)\eta(u,\tau), \xi(\cdot,\tau), \eta(\cdot,\tau), \zeta(\cdot,\tau,\tau_1) \in C_0^\infty. \quad (12)$$

При $t > 0$, $\tau = \tau(t)$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{t}\omega\left(\frac{u}{t},\frac{\tau}{t}\right)\right] = -\frac{1}{t^2}\left[\frac{u}{t}\omega'_u\left(\frac{u}{t},\frac{\tau}{t}\right) + \omega\left(\frac{u}{t},\frac{\tau}{t}\right)\right] + \\ + \frac{1}{t}\omega'_\tau\left(\frac{u}{t},\frac{\tau}{t}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\tau}{t}\right).$$

Заметим, что

$$u\omega'_u(u,\tau) + \omega(u,\tau)) = u\frac{\partial^{k+1}}{\partial u^{k+1}}\left(\frac{u^{k-1}}{(k-1)!}\vartheta(u-\tau)\right) + \\ + \frac{\partial^k}{\partial u^k}\left(\frac{u^{k-1}}{(k-1)!}\vartheta(u-\tau)\right) = \frac{\partial^{k+1}}{\partial u^{k+1}}\left(u\frac{u^{k-1}}{(k-1)!}\vartheta(u-\tau)\right) - \\ - k\frac{\partial^k}{\partial u^k}\left(\frac{u^{k-1}}{(k-1)!}\vartheta(u-\tau)\right) = \\ = \frac{\partial^k}{\partial u^k}\left[\frac{u^k}{(k-1)!}\vartheta'(u-\tau)\right] = \frac{\partial^k}{\partial u^k}\xi(u,\tau).$$

Отсюда и из (12) имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{t}\omega\left(\frac{u}{t},\frac{\tau(t)}{t}\right)\right] = \\ = -\frac{1}{t^2}\left[\xi_u^{(k)}\left(\frac{u}{t},\frac{\tau(t)}{t}\right) + \left(\frac{\tau(t)}{t} - \tau'(t)\right)\eta_u^{(k)}\left(\frac{u}{t},\frac{\tau(t)}{t}\right)\right] = \\ = -t^{-2}\zeta^{(k)}\left(\frac{u}{t},\frac{\tau(t)}{t},\tau'(t)\right), \quad (13)$$

где $\zeta^{(k)}$ означает производную порядка k по первому аргументу.

Для $f \in L(G,\mathrm{loc})$, $0 < t \le T$ введем усреднения

$$\tilde{f}_t(y) = t^{-2n}\iint\Omega\left(\frac{z}{t}\right)\Omega\left(\frac{w}{t},\frac{\gamma_y(t)-y}{t}\right)\times \\ \times f(y+z+w)dzdw,$$

$$f_t(x) = t^{-n}\int\Omega\left(\frac{y}{t}\right)\tilde{f}_t(x+y)dy,$$

где

$$\Omega(y,z) = \prod_{i=1}^n\omega(y_i,z_i), \quad \omega(u) = \omega(u,0),$$

$$\Omega(y) = \Omega(y,0), \quad \int\Omega(y,z)dy = 1.$$

Легко убедиться, что $f_t \to f$ при $t \to 0+0$ в смысле сходимости в $L(G,\mathrm{loc})$ и почти всюду. Имеем далее

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[t^{-3n}\Omega\left(\frac{y}{t}\right)\Omega\left(\frac{z}{t}\right)\Omega\left(\frac{w}{t},\frac{\gamma_{x+y}(t)-(x+y)}{t}\right)\right] = \\ = t^{-1-3n}\sum_{i=1}^n\left[\Omega\left(\frac{y}{t}\right)\Omega\left(\frac{z}{t}\right)\times\right. \\ \times D_i^k\Phi_i\left(\frac{w}{t},\frac{\gamma_{x+y}(t)-(x+y)}{t},\gamma_{x+y}(t)\right) + \\ + \Omega\left(\frac{y}{t}\right)\Phi_i\left(\frac{z}{t}\right)D_i^k\Omega\left(\frac{w}{t},\frac{\gamma_{x+y}(t)-(x+y)}{t}\right) + \\ \left. + \Phi_i\left(\frac{y}{t}\right)\Omega\left(\frac{z}{t}\right)D_i^k\Omega\left(\frac{w}{t},\frac{\gamma_{x+y}(t)-(x+y)}{t}\right)\right],$$

где $\Phi_i(\cdot,y,z) \in C_0^\infty(R^n)$, $\Phi_i(y) = \Phi_i(y,0,0)$.

Применив формулу Ньютона–Лейбница на отрезке $[\varepsilon,T]$, получим при $\varepsilon \to 0+0$

$$f(x) = f_T(x) + \int_0^T\iiint t^{-1-3n}\sum_{i=1}^n\left[\Omega\left(\frac{y}{t}\right)\Omega\left(\frac{z}{t}\right)\times\right. \\ \times D_i^k\Phi_i\left(\frac{w}{t},\frac{\gamma_{x+y}(t)-(x+y)}{t},\gamma'_{x+y}(t)\right) + \\ + \Omega\left(\frac{y}{t}\right)\Phi_i\left(\frac{z}{t}\right)D_i^k\Omega\left(\frac{w}{t},\frac{\gamma_{x+y}(t)-(x+y)}{t}\right) + \\ \left. + \Phi_i\left(\frac{y}{t}\right)\Omega\left(\frac{z}{t}\right)D_i^k\Omega\left(\frac{w}{t},\frac{\gamma_{x+y}(t)-(x+y)}{t}\right)\right]\times \\ \times f(x+y+z+w)dydzdwdt, \quad (14)$$

где равенство понимается в смысле сходимости в $L(G,\mathrm{loc})$ и почти всюду. Здесь D_i означает производную по i-й координате первого векторного аргумента функции.

Запишем интегральное представление (8) в виде произведения двух операторов: $f(x) = \mathcal{RS}f(x)$. Введем для этого некоторые обозначения.

Определение 3. Пусть $1 \le p \le \infty$, $1 \le q \le \infty$, $s > 0$. Пространством $L^*_{q(s)}(L_p)$ назовем банахово пространство наборов

$$a = \{a_0, \{a_{ji}\}_{1\le j\le 3, 1\le i\le n}\}$$

функций, где $a_0 \in L_p(G)$, a_{ji} – L_p-значные функции на $(0,T]$, с нормой при $q < \infty$

$$\|a\,|\,L^*_{q(s)}(L_p)\| := \|a_0\,|\,L_p\| + \\ + \sum_{j=1}^3\sum_{i=1}^n\left\{\int_0^T t^{-sq-1}\|a_{ji}(\cdot,t)\,|\,L_p\|^q dt\right\}^{1/q}$$

с соответствующей модификацией при $q = \infty$.

Пространством $L_p(L^*_{q(s)})$ назовем банахово пространство наборов $a = \{a_0, \{a_{ji}\}_{1\le j\le 3,\ 1\le i\le n}\}$ функций, где $a_0 \in L_p$, a_{ji} – $L_{q(s)}$-значные функции на $\mathbb{R}^n$, с нормой при $q < \infty$

$$\|a\,|\,L^*_{q(s)}(L_p)\| = \|a_0\,|\,L_p\| + \\ + \sum_{j=1}^3\sum_{i=1}^n\left\|\left\{\int_o^T t^{sq-1}|a_{ji}(\cdot,t)|^q dt\right\}^{1/q}\,|\,L_p\right\|$$

с соответствующей модификацией при $q = \infty$.

Положим

$$\mathcal{S}f = \{\mathcal{S}_0 f, \{\mathcal{S}_{ji} f\}_{1\le j\le 3,\ 1\le i\le n}\} \quad \text{при} \quad f: G \to \mathbb{R}^n, \quad (15)$$

где

$$\mathcal{S}_0 f(y) = T^{-3n}\iint \Omega\left(\frac{z}{T}\right)\Omega\left(\frac{w}{T}, \frac{\gamma_y(t)-y}{T}\right)\times$$
$$\times f(y+z+w)dzdw, \quad y\in G,$$

$$\mathcal{S}_{1i} f(y,t) = \iint t^{-2n}\Omega\left(\frac{z}{t}\right)D_i^k\Phi\left(\frac{w}{t}, \frac{\gamma_y(t)-y}{t}, \gamma_y(t)\right)\times$$
$$\times f(y+z+w)dzdw, \quad y\in G, \quad 0<t\le T,$$

$$\mathcal{S}_{2i} f(y,t) = \iint t^{-2n}\Phi\left(\frac{z}{t}\right)D_i^k\Omega\left(\frac{w}{t}, \frac{\gamma_y(t)-y}{t}, \gamma_y(t)\right)\times$$
$$\times f(y+z+w)dzdw, \quad y\in G, \quad 0<t\le T,$$

$$\mathcal{S}_{3i} f(y,t) = \iint t^{-2n}\Omega\left(\frac{z}{t}\right)D_i^k\Omega\left(\frac{w}{t}, \frac{\gamma_y(t)-y}{t}, \gamma_y(t)\right)\times$$
$$\times f(y+z+w)dzdw, \quad y\in G, \quad 0<t\le T.$$

Функции $\mathcal{S}_0 f$, $\mathcal{S}_{ji} f$ определены на множествах, соответственно, $G, G\times(0,T]$. Будем считать их доопределенными нулем соответственно на $\mathbb{R}^n\backslash G$, $(\mathbb{R}^n\backslash G)\times(0,\ T]$.

При $a(x,t) = \{a_0(x), \{a_{ji}(x,t)\}_{1\le j\le 3, 1\le i\le n}\}$, $x\in\mathbb{R}^n$, $0<t\le T$, положим

$$\mathcal{R}a(x) = \mathcal{R}_0 a_0(x) + \sum_{1\le j\le 3, 1\le i\le n}\mathcal{R}_{ji}a_{ji}(x),$$

$$\mathcal{R}_0 a_0(x) = \frac{1}{T^n}\int\Omega\left(\frac{y}{T}\right)a_0(x+y)dy,$$

$$\mathcal{R}_{ji}a_{ji}(x) = \int\int_0^T \frac{1}{t^{1+n}}\Omega\left(\frac{y}{t}\right)a_{ji}(x+y,t)dtdy \quad (16)$$
$$(j=1,2),$$

$$\mathcal{R}_{3i}a_{3i}(x) = \int\int_0^T \frac{1}{t^{1+n}}\Phi\left(\frac{y}{t}\right)a_{3i}(x+y,t)dtdy.$$

Тогда

$$f(x) = \mathcal{R}_0\mathcal{S}_0 f(x) + \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{n}\mathcal{R}_{ji}\mathcal{S}_{ji}f(x) = \quad (17)$$
$$= \mathcal{R}\mathcal{S}f(x) \quad \text{при} \quad x\in G.$$

Л е м м а 1. *Следующие операторы ограничены*:

$$S_0: L_p(G)\to L_p, \quad (18)$$

$$\mathcal{S}_{ji}: B^s_{p,q}(G)\to L^*_{q(s)}(L_p), \quad (19)$$
$$L^s_{p,q}(G)\to L_p(L^*_{q(s)}), \quad L_p(G)\to L_p(L^*_2),$$

$$\mathcal{R}_0: L_p\to B^s_{p,q}(G), \quad L_p\to L^s_{p,q}(G), \quad (20)$$

$$\mathcal{R}_{ji}: L^*_{q(s)}(L_p)\to B^s_{p,q}(G), \quad (21)$$
$$L_p(L^*_{q(s)})\to L^s_{p,q}(G), \quad L_p(L^*_2)\to L_p(G).$$

Доказательство теоремы 1 с помощью теоремы о ретракции сводится к интерполяционным теоремам для весовых пространств банаховозначных последовательностей и пространств L_p банаховозначных функций. Эта схема применялась в случае $G=\mathbb{R}^n$, при этом операторы коретракции и ретракции строились с помощью гармонических разложений функции. В рассматриваемом случае такой способ невозможен. Коретракция и ретракция строятся здесь с помощью интегральных представлений функций.

О п р е д е л е н и е 4 (см. [2]). Банахово пространство Y называется р е т р а к т о м б а н а х о в а п р о с т р а н с т в а X, если существуют линейные непрерывные операторы $\mathcal{R}$: $X\to Y$ (ретракция) и $\mathcal{S}$ (коретракция) такие, что $I_Y = \mathcal{R}\mathcal{S}$: $Y\to Y$ является тождественным оператором.

Т е о р е м а 2. *Пусть G – открытое множество с условием гибкого конуса. Пространства*

$$B^s_{p,q}(G)\ (1\le p,q\le\infty, s>0),$$
$$L^s_{p,q}(G)\ (1<p,q<\infty, s>0), \quad L_p(G)\ (1<p<\infty)$$

являются ретрактами соответственно пространств

$$L^*_{q(s)}(L_p), \quad L_p(L^*_{q(s)}), \quad L_p(L^*_2).$$

При этом операторы $\mathcal{S}$ (коретракции) и $\mathcal{R}$ (ретракции) задаются формулами (15), (16).

Т е о р е м а 3. *Пусть A_0, A_1, A – банаховы пространства*,

$$s_0, s_1\in(0,\infty),$$
$$p_0, p_1, p, q_0, q_1, q, r\in[1,\infty], \quad 0<\theta<1,$$
$$s = (1-\theta)s_0+\theta s_1,$$
$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1}.$$

Тогда при указанных в формулах дополнительных ограничениях справедливы интерполяционные равенства:

$$(L^*_{q_0(s_0)}(A), L^*_{q_1(s_1)}(A))_{\theta,r} = L^*_{r(s)}(A) \quad (22)$$
$$(s_0\ne s_1 \quad \text{или} \quad r=q),$$

$$(L^*_{q_0(s_0)}(A_0), L^*_{q_1(s_1)}(A_1))_{\theta,q} = L_{q(s)}((A_0,A_1)_{\theta,q}) \quad (23)$$
$$(q_0, q_1<\infty),$$

$$(L^*_{q_0(s_0)}(A_0), L^*_{q_1(s_1)}(A_1))_{[\theta]} = L^*_{q(s)}((A_0,A_1)_{[\theta]}) \quad (24)$$
$$(q_0<\infty, \quad q_1\le\infty),$$

$$(L_{p_0}(A_0), L_{p_1}(A_1))_{\theta,p} = L_p((A_0,A_1)_{\theta,p}) \ (p_0,p_1<\infty), \quad (25)$$

$$(L_{p_0}(A_0), L_{p_1}(A_1))_{[\theta]} = L_p((A_0, A_1)_{[\theta]}) \ \ (p_0, p_1 < \infty). \quad (26)$$

Доказательство. Доказательства равенств (25), (26) приведены в [2, 3]. Равенства (22)–(24), вероятно, также известны. Отметим, что равенство (22) можно доказать, повторяя доказательство теоремы 1.18.2 из [2], установленной для пространств векторнозначных последовательностей. Доказательство равенств (23), (24) сводится к теореме 1.18.2 из [2] (об интерполяции пространств векторнозначных последовательностей) с помощью следующей перенормировки:

$$\|f \,|\, L^*_{q(s)}(A)\|^q = \sum_{k=k_0}^{\infty} \int\limits_{2^{-k}}^{2^{-k+1}} (t^s \|f(t) \,|\, A\|)^q \frac{dt}{t} \times$$

$$\times \sum_{k=k_0}^{\infty} 2^{-k(sq-1)} \|f_k \,|\, L_q(A)\|^q = \|\{f_k\} \,|\, l_q^{s-1/q}(L_q(A))\|^q.$$

Доказательство равенств (4)–(6), (8)–(10) теоремы 1 следует из теорем 2 и 3.

Доказательство (7) проводится по плану, принятому в [3].

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа подготовлена при поддержке программы Президиума РАН № 01 “Фундаментальная математика и ее приложения” (грант PRAS-18-01).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1996.
2. *Трибель Х.* Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
3. *Берг Й., Лёфстрём Й.* Интерполяционные пространства. М.: Мир, 1980.
4. *Аджиев С.С.* // Тр. МИАН. 1999. Т. 227. С. 7–42.

INTERPOLATION OF SPACES OF FUNCTIONS OF POSITIVE SMOOTHNESS ON A DOMAIN

Corresponding Member of the RAS O. V. Besov[a]

[a] *Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

An interpolation theorem for spaces of functions of positive smoothness on a domain with flexible cone condition is established.

Keywords: interpolation of function spaces, spaces of functios of positive smoothness